N.º 270. 2.
BHS I B. 33-6,1
I 2a 57

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke
Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: I B
B. Nr. 33

Franz Ludwig Cancrinus

Hochfürſtl. Heſſen Hanauiſchen Cammerraths und Mitglieds der Fürſtl. Heſſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu Gieſen wie auch der naturforſchenden Geſellſchaft zu Berlin

Anleitung zur Markſcheidekunſt

erſter Teil

welcher die Arithmetik, Geometrie und ebene Trigonometrie in ſich begreift

BIBLIOTHEK DER K. B. GENERAL BERGW. U. SALINEN ADMINISTR.

K. B. A.

mit 32 Kupfertafeln

Frankfurt am Main
in der Andreäiſchen Buchhandlung 1775

Franz Ludwig Cancrinus

Hochfürstl. Heſſen Hanauiſchen Cammerraths und Mitglieds der Fürſtl. Heſſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften zu Gieſen, wie auch der naturforſchenden Geſellſchaft zu Berlin

Anleitung
zur
Markſcheidkunſt

erſter Teil

welcher
die Arithmetik, Geometrie
und ebene Trigonometrie
in ſich begreift

nebſt 32 Kupfertafeln

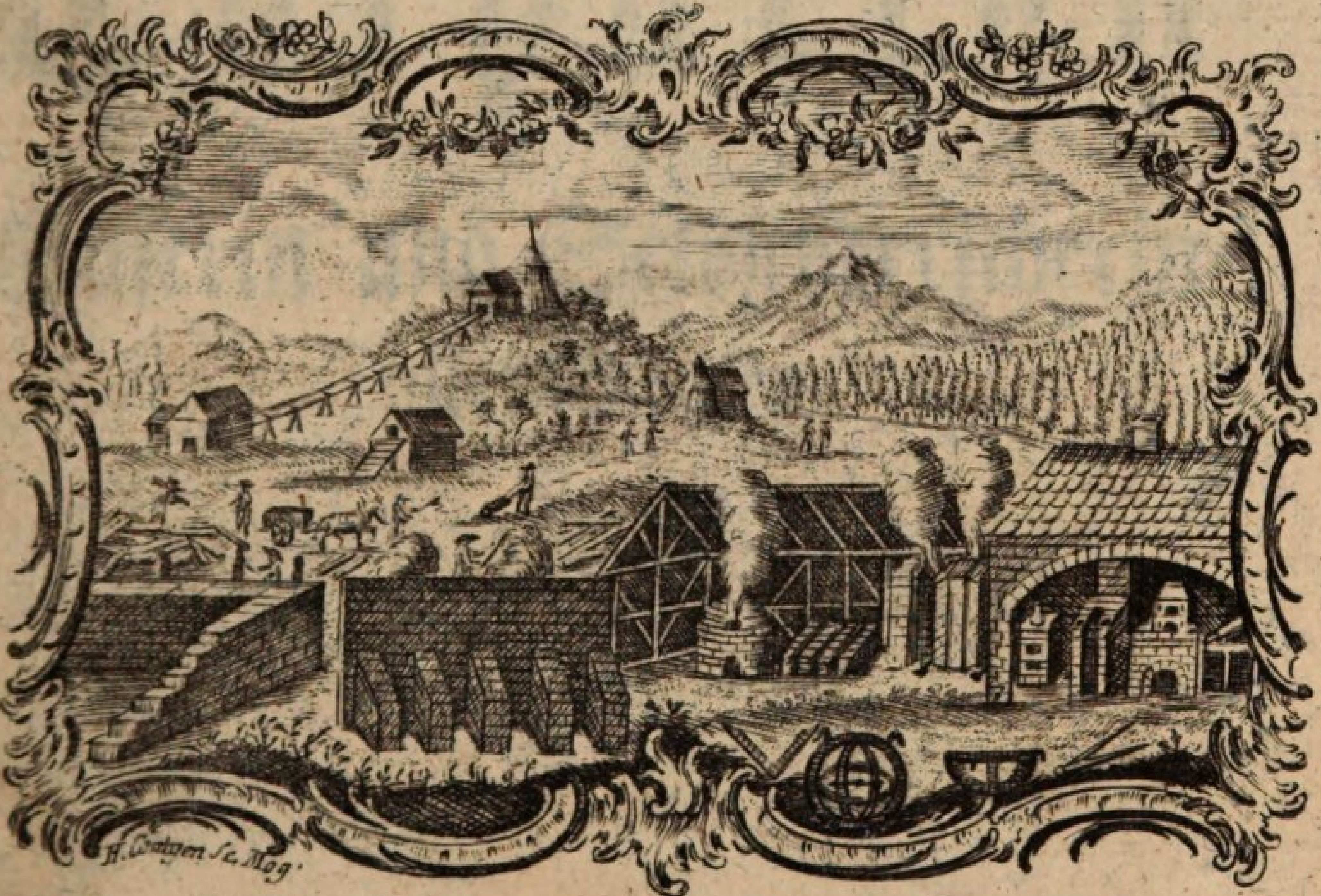
Frankfurt am Main
in der Andreäiſchen Buchhandlung 1775

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Franz Ludwig Cancrinus

Hochfürſtlich Heſſen Hanauiſchen Cammeraths

erſte Gründe der Berg und Salzwerkskunde



Sechster Teil

welcher die Markſcheidekunſt

und zwar

Erſte Abteilung

welche die Arithmetik Geometrie und ebene Trigonometrie enthält

mit 32 Kupfertafeln

Frankfurt am Main

in der Andreäiſchen Buchhandlung 1775

Der allerdurchlauchtigſten
und grosmächtigſten
Kaiſerin und Frau
Frau
Catharina
Kaiſerin und Selbſtherrſcherin
aller Reuſen

meiner
Allergnädigſten Kaiſerin
und Frau.

Vorrede.

Es wird den meiſten Kennern der Markſcheidekunſt ganz unerwartet ſein, daß ich vor dieſer Wiſſenſchaft die Arithmetik, Geometrie, und Trigonometrie abhandele, da man doch dieſelbe faſſen, und begreifen kan, wenn man nur dieſe, und iene Wahrheiten aus der reinen Mathematik vorausſchikt. Man wird mir alſo den Vorwurf machen, daß ich bei der Markſcheidekunſt zu viel voraus geſezt hätte, und daß es uns an guten Schriften in der Mathematik gar nicht fehle. Der Vorwurf iſt nicht ungegründet: Erwäge ich inzwiſchen, daß der Berg- und Salzverſtändige, ohne eine hinreichende Einſicht in die erſten Gründe der Mathematik auch

nicht das Geringſte unternehmen kan, und iſt der gröſte Teil der mathematiſchen Schriften denen Leuten, vor die ich ſchreibe, entweder zu ſchwer, oder ſind dieſe Schriften meiner Abſicht nicht ganz angemeſſen; So ſei es mir auch erlaubt, daß ich hier die reine Mathematik vortrage, und eben dadurch meine Leſer dazu vorbereite, daß ſie mich in denen folgenden Teilen um deſto leichter verſtehen können.

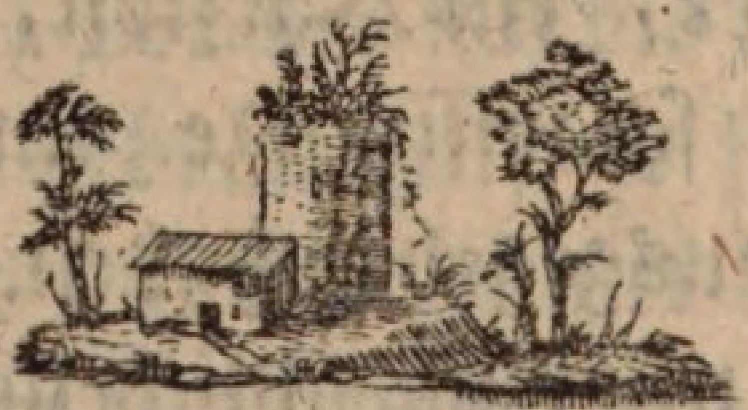
Ich habe nur die nüzlichſten Lehren dieſer Wiſſenſchaft zuſammen gefaſt, und dieſelbe ſo vorgetragen, wie die eine aus der andern folgt, nichts Neues aber habe ich geſagt, doch habe ich aller Orten mein Augenmerk zugleich mit auf die Ausübung gerichtet. Ich habe mich, ohne die Buchſtabenrechnung, vor der ſich die meiſten fürchten, viel zu gebrauchen, ſo faslich ausgedrukt, als es mir nur immer möglich ware, und das allein um deswillen, weil ich nicht vor Gelehrte, ſondern vor Leute ſchreibe, die öfters nicht einmal auf Schulen geweſen

ſind,

ſind, und ſelten einen mündlichen Vortrag haben. Freilich bin ich dadurch, ſo geſchwind ich auch ſonſt zur Sache geſchritten bin, und ſo kurz ich mich ausgedrukt habe, etwas weitläuftig geworden, iene Urſachen aber, und die Abſicht, die ich habe, die Mathematik auch unter den geringſten Bergbedienten etwas mehr zu verbreiten, wird mein Verfahren, wie ich wenigſtens hoffe, und wünſche, einiger maſen rechtfertigen. Ich mache alſo durch dieſen meinen Vortrag meinen Leſern nur einen Vorgeſchmak von der Mathematik, die, welche ſich alsdann mit mehreren Wahrheiten bekant machen, und an eine ſchärfere Art zu denken gewöhnen wollen, die werden, nicht ohne vieles Vergnügen, die Schriften leſen, die ein groſer Käſtner, ein Karſten, ein Clemm, und andere ſcharfſinnige und lehrreiche Männer herausgegeben haben.

Die etwa mit eingeſchlichenen Fehler und Unvollkommenheiten, ia ſelbſt auch die Drukfehler, wird man entſchuldigen, weil mir

mir zu dieſer Arbeit gar wenige Zeit übrig bliebe, weil mir der Druk, wieder meinen Wunſch, auf dem Fus nachfolgte, und weil ich nichts in Vorrath gearbeitet hatte. Es wäre freilich vor dieſe, wie vor alle Schriften, vorteilhaft geweſen, wenn ich dieſelbe erſt hätte einige Jahre liegen laſſen können, das aber ware, bei einem ſo ziemlich weitläuftigen Werk, gar keine Sache vor meinen Herrn Verleger. Genug, wenn ich den Bergbaulernenden, wie ſchon geſagt, die erſten Gründe der reinen Mathematik ziemlich vollſtändig, und ſo vorgetragen habe, daß ſie dieſelbe ohne einen mündlichen Unterricht begreifen lernen. Hanau den 6ten Mai 1775.



Erſte

Erſte Gründe
der
Markſcheidekunſt.

Einleitung
in die
Markſcheidekunſt.

§. 1.

Wenn man ſich mit dem, was wir in der Grubenbaukunſt vorgetragen haben, genau bekant gemacht hat, und auf alles das, was bei der Ausůbung dieſer Wiſſenſchaft zu geſchehen pflegt, aufmerkſam genug geweſen iſt (§. 12. Einleit. in die Bergwerks. und §. 2. der Grubenbauk.): So wird man auch ohne vieles Nachdenken begreifen, daß man bei der Schůrfarbeit, der regelmåſigen Anlage des Grubenbaues ůberhaupt, der Angabe der einzeln Grubengebåue, der Gewinnung und Förderung der Mineralien, der Vorzimmerung der Grubengebåue, und den Waſſer- und Wetterloſungen die Ausdehnuungen verſchiedener Dinge nach der Långe, der Breite, und der Dikke meſſen můſſe (§. 56. 62. 65. 76. 91. 102. 119. und 122. der Grubenbauk.)

§. 2.

Es iſt alſo mit der Grubenbaukunſt eine Wiſſenſchaft verknüpft, welche lehret, wie man die Gröſe der Ausdehnungen finden ſoll, welche die körperlichen Dinge, die bey dieſem Bau vorkommen, nach ihrer Länge, Breite, und Dikke einnehmen, eine ſolche Wiſſenſchaft aber heißt in der Mathematik die **Geometrie**, oder die **Meßkunſt**, und darum muß der, welcher den Grubenbau regelmäſig führen will, zugleich auch die Meßkunſt ausüben.

§. 3.

Man hat der Meßkunſt, die bey dem Grubenbau vorkomt, einen beſondern Nahmen gegeben, und man nent dieſelbe die **Markſcheidekunſt** (§. 13. Einleit. in die Bergwerksk.) Die Markſcheidekunſt läſt ſich alſo nunmehr ſehr leicht erklären, und ſie iſt nichts anders, als eine **Wiſſenſchaft, welche lehret, wie man die Meßkunſt auf den Grubenbau geſchikt anwenden ſoll.**

§. 4.

Da man ſchon in den ältern Zeiten gewohnt ware, denen, die Bergwerke baueten, gewiſſe Gränzen vorzuſchreiben, über welche ſie nicht gehen ſolten, dieſe Gränzen aber in vielen ſtrittigen Fällen entſchieden werden muſten, und das Wort Mark eben ſo viel, als

als eine Gränze bedeutet: So iſt es auch ſehr wahrſcheinlich, daß die Markſcheidekunſt aus denen Worten Mark und Scheiden zuſammengeſezt worden iſt, und alſo daher ihren Nahmen erhalten hat.

§. 5.

Weil die Markſcheidekunſt in einer geſchikten Anwendung der Meßkunſt auf den Grubenbau beſtehet (§. 3.): So muß auch die Meßkunſt bei der Markſcheidekunſt zum Grund geleget werden, und man muß iene erſt kennen, ehe man dieſe faſſen, und begreifen kan: Aber auch die Meßkunſt kan ohne die Rechenkunſt nicht verſtanden werden, und darum muß man ſich bei der Markſcheidekunſt vor allen Dingen einen Begrif von der Rechenkunſt machen.

§. 6.

Wir werden alſo in der Markſcheidekunſt überhaupt drei Wiſſenſchaften abhandeln, und dieſe ſind die Rechenkunſt, die Meßkunſt, und die Markſcheidekunſt. Die erſtere wollen wir in der erſten, die andere in der zwoten, und die leztere in der dritten Abhandlung vortragen.

Die erſte Abhandlung
von
der Rechenkunſt.

Einleitung.

§. 7.

Wenn man die verſchiedenen Rechnungsarten mit einander vergleichet, und darauf aufmerkſam iſt, worinnen dieſelbe mit einander übereinkommen, folglich das Allgemeine von dem Beſondern abſondert: So kan man ſich auch leicht einen Begrif von der Rechenkunſt machen, bei dieſer Betrachtung aber findet man, daß die Rechenkunſt überhaupt eine Wiſſenſchaft iſt, worinnen man lehret, wie man durch den Gebrauch der Zeichen aus bekanten Gröſen, die man an und für ſich betrachtet, andere unbekante Gröſen finden ſoll.

§. 8.

Die Zeichen, welche man in der Rechenkunſt gebraucht, ſind von einer zwofachen Art, und ſie bedeuten entweder beſtimte Gröſen, die eine gewiſſe Anzahl von einerlei Dingen in ſich faſſen, oder ſie ſtellen die Gröſen überhaupt vor, welche dieſe, oder

iene Vielheit von einer gewiſſen Art der Dinge in ſich begreifen. Die Rechenkunſt überhaupt betrachtet, läßt ſich alſo in zwei Wiſſenſchaften teilen: Und es behält die, worinnen man mit beſtimten Gröſen umgehet, die durch die bekanten Ziffern ausgedrukt werden, den Nahmen der Rechenkunſt, die hingegen, worinnen man allgemeine Zeichen gebraucht, welche die Gröſen überhaupt vorſtellen, heiſt die *Algebra*, die eine weitere Ausführung der Rechenkunſt iſt. Man teilt die Algebra gemeiniglich in die Buchſtabenrechenkunſt, worinnen man anſtatt der in der Rechenkunſt gewöhnlichen Ziffern mit Buchſtaben, als mit allgemeinen Zeichen rechnet, und in die eigentliche *Algebra*, welche lehret, wie man durch eben ſolche Zeichen aus bekanten andere unbekante Gröſen, vermittelſt der Gleichungen, finden ſoll, welche Gleichungen nichts anders, als Gröſen ſind, die auf zweierlei Art ausgedrukt werden. Die Rechenkunſt wollen wir in dem erſten, die Algebra überhaupt aber in dem zweeten Abſchnitt abhandeln.

Der erſte Abſchnitt
von
der Rechenkunſt.

§. 9.

In der Rechenkunſt können, wann man ſich ihren ganzen Inbegrif genau vorſtellet, vornehmlich zwei Stükke erwogen werden, vorerſt die Eigenſchaften der Gröſen überhaupt, und dann die verſchiedenen Arten aus beſtimten und bekanten Gröſen andere unbekante zu erfinden. Das erſtere erwägen wir im erſten, das andere aber in dem zweiten Kapitel.

Das erſte Kapitel
von
den Eigenſchaften der Gröſen überhaupt.

§. 10.

Wir wollen in dieſem Kapitel die allgemeinſten Wahrheiten von den Gröſen abhandeln, dieſe aber aus ihren erſten Begriffen herleiten.

§. 11.

Alles das, was ſich gedenken läſt, das nent man ein Ding, und hierunter begreift man alle Dinge in der Welt.

§. 12.

§. 12.

Die Eigenſchaften eines Dinges, wodurch man daſſelbe erkennen, und von andern unterſcheiden kan, nennet man die Merkmale dieſes Dinges. Gedenkt man ſich zum Beiſpiel einen Stein, als einen Körper, der ſpröde, im Waſſer und Oehl nicht zu erweichen, und im Feuer nicht ganz zu zerſtören iſt (§. 161. der Mineral.): So ſind die Sprödigkeit, die Härte im Waſſer und Oehl, und die Unzerſtörbarkeit im Feuer die Eigenſchaften, wodurch man den Stein vor andern Dingen erkennen, und unterſcheiden kan, und dieſe Eigenſchaften ſind ſeine Merkmale.

§. 13.

Wenn man ſich eine Sache mit ihren Merkmalen gedenket (§. 12.); ſo ſagt man, daß man einen Begrif von dieſer Sache habe: Und wenn man ſich die Merkmale vorſtellet, die viele Dinge mit einander gemein haben; ſo nennet man einen ſolchen Begrif einen gemeinſchaftlichen Begrif. Gedenket man ſich zum Beiſpiel einen einzeln Stein nach allen ſeinen beſonderen Merkmalen; ſo hat man einen Begrif von dieſem Stein: Stellet man ſich hingegen die Eigenſchaften vor, die alle Steine mit einander gemein haben, wie wir im vorigen §. gethan haben; So hat man einen gemeinſchaftlichen Begrif von den Steinen.

§. 14.

Alle die Dinge, womit man einen gewiſſen gemeinſchaftlichen Begrif verbinden kan; (§. 13.), nent man Dinge von einerlei Art, die aber, womit man keinen ſolchen Begrif verknüpfen kan, die heiſt man Dinge von verſchiedener Art. Alle Steine alſo, als Steine betrachtet, ſind Dinge von einerlei Art, weil man mit ihnen den gemeinſchaftlichen Begrif verbinden kan, daß ſie ſpröde, im Waſſer und Oehl nicht zu erweichen, und im Feuer unzerſtörbar ſind, Steine und Metalle hingegen ſind Dinge von verſchiedener Art, weil die erſteren ſpröde, dieſe aber geſchmeidig, und von ienen ſehr verſchieden ſind (§. 161. und 357. der Mineral.).

§. 15.

Wenn viele Dinge von einerlei Art zuſammen genommen werden (§. 14.): So nent man dieſe Vielheit eine Anzahl von dieſen Dingen, und eine ſolche Anzahl von Dingen von einerlei Art heiſt man eine Gröſe. Verſchiedene einzelne Steine zuſammen genommen machen demnach eine Anzahl von Steinen, dieſe Anzahl aber eine Gröſe aus.

§. 16.

Die Dinge von einerlei Art, welche eine Gröſe ausmachen, nent man die Teile der Gröſe, und ein ieder

ieder ſolcher einzelner Teil heiſt eine Einheit. Wenn man alſo viele Steine zuſammen nimt: So macht ein ieder einzelner Stein eine Einheit aus.

§. 17.

Bei der Gröſe laſſen ſich alſo keine andere Merkmale gedenken, als die Teile von einerlei Art, und ihre Vielheit. Hat man zum Beiſpiel drei Steine: So ſind ein, ein, und ein Stein die Teile von einerlei Art, drei Steine aber die Vielheit, und dieſe zwei Dinge ſind die Merkmale von dieſer Gröſe.

§. 18.

Wenn ein Ding vor das andere geſezt werden kan: So ſagt man, daß dieſe Dinge einerlei, hingegen aber verſchieden ſeien, wenn dieſes nicht Statt findet. Wenn zum Beiſpiel von zwei Steinen, der eine die Beſchaffenheit des andern hat, und daher einer vor den andern geſezt werden kan: So ſind dieſe Dinge einerlei.

§. 19.

Wenn Dinge in Anſehung ihrer Merkmale einerlei ſind (§. 12. und 18.): So nent man ſie ähnliche, und wenn ſie hierinnen verſchieden ſind, unähnliche Dinge. Wenn alſo ein Stük Erz eben die Merkmale hat, die ein anderes Stük Erz beſizzet:

So ſind dieſe Dinge einander ähnlich, unähnlich hingegen, wenn die Merkmale des einen von den Merkmalen des andern unterſchieden ſind.

§. 20.

Um der Kürze willen gebrauchet man ein Zeichen, wodurch man die Aehnlichkeit zweier Dinge ausdrukt, und dieſes iſt ein liegendes S: Nemlich $\backsim$. Wenn man alſo anzeigen will, daß ein Ding, welches wir A nennen wollen, einem andern Dinge, das B heiſen ſoll, ähnlich iſt; So ſchreibt man dieſes alſo: $A \backsim B$, und lieſt es A iſt B ähnlich.

§. 21.

Wenn Dinge in Anſehung ihrer Gröſe einerlei ſind (§. 15. und 18.); So heiſen ſie gleiche, und wenn ſie darinnen verſchieden ſind, ungleiche Dinge. Wenn man zum Beiſpiel zwei Stükke Erz hat, wovon das eine ſo gros iſt, wie das andere; So ſind dieſe Dinge gleiche Dinge: Iſt dieſes aber nicht; So ſind ſie ungleiche Dinge.

§. 22.

Das Zeichen, wodurch man die Gleichheit zweier Dinge ausdrukt, ſind zwei unter einander liegende Querſtriche: Nemlich =. Wenn man daher andeuten will, daß ein Ding, das A heiſen ſoll, einem

andern

andern Ding, das wir B nennen wollen, gleich iſt; So ſchreibt man dieſes ſo: A=B, und lieſt es A iſt B gleich.

§. 23.

Zuweilen ſind zwei Dinge einander ähnlich, und auch gleich (§. 19. und 21.), und alsdann nent man dieſe Dinge congruente Dinge. Zwei Stükke Erz, die ähnlich und auch gleich ſind, ſind alſo congruente Dinge.

§. 24.

Das Zeichen, wodurch man andeutet, daß zwei Dinge einander ähnlich, und auch gleich ſind, iſt ein liegendes S, mit zwei darunter befindlichen Querſtrichen: Nemlich $\cong$. Will man alſo anzeigen, daß ein Ding A einem andern Ding B ähnlich, und auch gleich iſt: So ſchreibt man es ſo $A \cong B$, und lieſt es A iſt congruent B.

§. 25.

Gleiche Dinge, können ihrer Gleichheit ohngeſchadet, vor einander geſezt werden.

Beweis.

Gleiche Dinge ſind in Anſehung ihrer Gröſe einerlei (§. 21.). Nun können aber einerlei Dinge vor einander geſezt werden (§. 18.), und darum können

nen auch gleiche Dinge ihrer Gleichheit ohngeſchadet vor einander geſezt werden. Wenn man zum Beiſpiel ein Ding A hat, welches B gleich iſt; So kan A vor B, und B vor A geſezt werden: Oder wenn man eine Zahl fünf, und eine Zahl drei und zwei hat; So kan fünf vor drei und zwei, und drei und zwei vor fünf geſezt werden.

§. 26.

Ein iedes Ding iſt ſich ſelbſt ähnlich (§. 19).

Beweis.

Wenn man annehmen wolte, daß nicht ein iedes Ding ſich ſelbſt ähnlich wäre: So müſte man annehmen, daß es ſich ähnlich wäre, und auch nicht. Dieſes aber iſt widerſprechend, und daher iſt ſich auch ein iedes Ding ſelbſt ähnlich. Ein Ding A iſt ſich alſo ſelbſt ähnlich.

§. 27.

Ein iedes Ding iſt ſich ſelbſt gleich (§. 21.).

Beweis.

Wolte man annehmen, daß nicht ein iedes Ding ſich ſelbſt gleich wäre: So müſte es eine gewiſſe Anzahl Einheiten in ſich faſſen, und dieſe Gröſe ſeyn, und auch nicht (§. 15. und 16.). Nun läſt ſich aber dieſes nicht gedenken, und es iſt widerſprechend, und

darum

darum iſt auch ein iedes Ding ſich ſelbſt gleich. Ein Ding A iſt ſich alſo ſelbſt gleich.

§. 28.

Aehnliche Gröſen ſind, als Gröſen betrachtet, auch gleiche Gröſen.

Beweis.

Wenn Gröſen einander ähnlich ſind: So müſſen ſie in Anſehung ihrer Merkmale einerlei ſeyn (§. 19.), die Merkmale der Gröſen aber ſind die Teile von einerlei Art, und ihre Vielheit (§. 17.), und daher ſind ähnliche Gröſen ſolche Gröſen, die Teile von einerlei Art, und ein und eben dieſelbe Vielheit dieſer Teile haben. Es ſind alſo ähnliche Gröſen in Anſehung ihrer Gröſe einerlei (§. 18.), Dinge von der Art aber ſind gleiche Dinge (§. 21.), und darum ſind auch ähnliche Gröſen, als Gröſen betrachtet, zu gleich gleiche Gröſen. Wenn man alſo eine Gröſe A, und eine Gröſe B hat, die einander, als Gröſen, ähnlich ſind: So ſind auch dieſe beiden Gröſen einander gleich.

§. 29.

Eine iede Gröſe nent man in Rükſicht auf alle ihre Teile (§. 15. und 16.) ein Ganzes. Es iſt alſo vier in Rükſicht auf ſeine Teile eins, eins, eins, und eins ein Ganzes.

§. 30.

§. 30.

Das Ganze iſt ſeinen Teilen zuſammen genommen gleich.

Beweis.

Das Ganze faſt die Teile zuſammen genommen in ſich, und die Teile zuſammen genommen machen wieder das Ganze aus (§. 29.). Es ſind alſo das Ganze, und alle ſeine Teile zuſammen genommen in Anſehung ihrer Gröſe einerlei (§. 18.). Dinge, die in Anſehung ihrer Gröſe einerlei ſind, ſind auch gleiche Dinge (§. 21.), und daher iſt auch das Ganze ſeinen Teilen zuſammen genommen gleich. Fünf iſt alſo ſeinen Teilen eins, eins, eins, eins und eins gleich.

§. 31.

Ein oder etliche Teile des Ganzen, und das Ganze ſelbſt genommen ſind ungleiche Dinge.

Beweis.

Ein oder etliche Teile von dem Ganzen, und das Ganze ſelbſt genommen, haben nicht einerlei Vielheit der Teile, ſie können alſo nicht vor einander geſezt werden, und ſind in Anſehung ihrer Gröſe verſchiedene Dinge (§. 18.). Dinge, die in Anſehung ihrer Gröſe verſchieden ſind, ſind ungleiche Dinge (§. 21.), und daher ſind auch ein und etliche Teile des Ganzen, und das Ganze ſelbſt genommen ungleiche Dinge. Das Ganze Fünf, und ſein Teil eins,

oder der Teil Drei, oder Zwei ſind alſo ungleiche Dinge.

§. 32.

Wenn zwei Dinge ungleich ſind; So iſt ein Teil des einen Dinges dem andern ganzen Ding gleich: In dieſem Fall nun ſagt man, daß das erſtere gröſer, als das leztere, das leztere aber kleiner, als das erſtere ſei. Wenn alſo bei zwei Dingen A und B ein Teil von dem Ding A dem andern ganzen Ding B gleich iſt; So iſt A gröſer, als B, und B iſt kleiner als A: Oder wenn man zwei ungleiche Zahlen, Fünf und Zwei hat; So iſt ein Teil von Fünf, nemlich Zwei, der andern ganzen Zahl Zwei gleich.

§. 33.

Man gebrauchet ein Zeichen, wodurch man die Ungleichheit zweier Dinge ausdrukt, und dieſes beſtehet in einem liegenden V: Nemlich $<$; das man zwiſchen beide Dinge ſezzet. Man ſchreibt es iederzeit ſo, daß ſeine Oefnung dem Gröſeren zugekehret iſt. Wenn alſo A und B ungleiche Gröſen ſind, und man ſchreibt das liegende V alſo dazwiſchen $A > B$; So iſt A gröſer, als B: Wenn man dieſes V hingegen dergeſtalt ſchreibet $B < A$; So iſt B kleiner, als A. Im erſten Fall lieſt man es alſo: A iſt gröſer, als B, im andern aber B iſt kleiner, als A.

§. 34.

Das Ganze iſt gröſer, als ein und etliche ſeiner Teile.

Beweis.

Das Ganze, und ein, oder etliche ſeiner Teile ſind ungleiche Dinge (§. 31.). Ein Teil von dem Ganzen iſt alſo dem einen, oder etlichen von ſeinen Teilen ganz genommen gleich (§. 32.), und daher iſt auch das Ganze gröſer, als ein, oder etliche ſeiner Teile. Das Ganze Neun iſt alſo gröſer, als der Teil Eins, und auch gröſer, als die Teile Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, und Sieben.

Ein, oder etliche Teile von dem Ganzen ſind kleiner, als das Ganze.

Beweis.

Das Ganze, und ein, oder etliche ſeiner Teile ſind ungleiche Dinge (§. 31.). Ein oder etliche Teile von dem Ganzen ganz genommen ſind alſo einem Teil von dem Ganzen gleich (§. 32.), und daher ſind auch ein, oder etliche Teile von dem Ganzen kleiner, als das Ganze. Der Teil Eins, und die Teile Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, und Sieben ſind alſo kleiner, als das Ganze Neun.

§. 35.

Wenn ein Teil einer Gröſe etlichemal genommen der ganzen Gröſe gleich wird: So heiſt er ein genau-

meſſen-

meſſender Teil (pars aliquota), und wenn dieſes nicht iſt, ein nichtgenaumeſſender Teil (pars aliquanta). Der Teil Zwei von der Gröſe Acht viermal genommen iſt alſo der ganzen Gröſe Acht gleich, der Teil Drei von der Gröſe Acht aber iſt etlichemal genommen niemals Acht gleich, und daher iſt Zwei ein aliquoter, Drei aber ein aliquanter Teil von der Gröſe Acht.

§. 36.

Die Gröſe, welche entſtehet, wenn man eine Gröſe etlichemal nimt, heiſt überhaupt das **Vielfache**, und zwar das Zweifache, wenn dieſe Gröſe zweimal, das Dreifache, wenn dieſe Gröſe dreimal, das Vierfache, wenn dieſe Gröſe viermal genommen wird, und ſo weiter. Nimt man zum Beiſpiel Zwei zweimal; So hat man das Zweifache, nemlich Vier von Zwei: Nimt man Zwei dreimal; So hat man das Dreifache von Zwei, nemlich Sechs: Und nimt man Zwei viermal; ſo hat man das Vierfache von Zwei, nemlich Acht, und ſo weiter, ſowol das Zwei-, als das Drei-, und das Vierfache aber, und ſo weiter, heiſen das **Vielfache**.

§. 37.

Wenn man unterſucht, wie viel eine Gröſe gröſer, oder kleiner iſt, als wie eine andere: So ſagt man, daß man Gröſen mit einander vergliche.

Unterſucht man zum Beiſpiel, um wie viel Sieben gröſer, oder kleiner iſt, als wie Fünf: So vergleicht man dieſe Gröſen.

§. 38.

Die Gröſen, welche man mit einander vergleichen will, müſſen Gröſen von einerlei Art ſein.

Beweis.

Wenn man Gröſen mit einander vergleichen ſoll: So muß man angeben, um wie viel die eine gröſer, oder kleiner iſt, als wie die andere (§. 37.). Es muß alſo ein Teil der einen Gröſe, der andern Gröſe ganz genommen gleich ſein (§. 32.), und iener Teil vor dieſe ganze Gröſe geſezt werden können (§. 18), folgzich iſt auch die leztere Gröſe als ein Teil von der erſtern Gröſe zu betrachten. Da nun eine iede Gröſ-Gröſe aus Dingen von einerlei Art beſtehet (§. 15.): So folgt auch, daß die Gröſen, welche mit einander verglichen werden ſollen, aus Dingen von einerlei Art beſtehen müſſen. Sieben Spanier und fünf Europäer kan man alſo, als Spanier und Europäer, nicht mit einander vergleichen, eben ſo kan man keine vier Centner Silbererz mit drei Centner Eiſenſtein vergleichen.

§. 39.

Wenn eine iede von zwei Gröſen einer dritten gleich iſt: So ſind dieſe zwei Gröſen einander ſelbſt gleich.

Beweis.

Beweis.

Wenn eine iede von zwei Gröſen einer dritten gleich iſt; So kan eine iede von den zwei Gröſen vor die dritte geſezt werden (§. 25.), und daher ſind auch die zwei Gröſen, die einer dritten gleich ſind, ſich ſelbſt gleich. Wenn zum Beiſpiel die Gröſe A=C, und auch B=C iſt: So kan eine iede von den zwei Gröſen A und B vor die dritte C geſezt werden, und daher iſt bei der erſteren, wenn man vor C die Gröſe B ſezt, A=B, bei der andern aber, wenn man vor C die Gröſe A ſezt, B=A. Iſt ferner Fünf=Eins, Eins, Eins, Eins und Eins, und Drei und zwei=Eins, Eins, Eins, Eins und Eins: So iſt auch Fünf=Drei und Zwei.

§. 40.

Die Gröſe, welche gröſer iſt, als eine von zwei gleichen Gröſen, die iſt auch gröſer, als die andere von dieſen gleichen Gröſen.

Beweis.

Wenn eine Gröſe gröſer iſt, als eine von zwei gleichen Gröſen: So iſt ein Teil von iener Gröſe dieſer Gröſe gleich (§. 32.), von den zwei gleichen Gröſen aber kan eine vor die andere geſezt werden (§. 25.), und daher iſt auch eine Gröſe, die gröſer iſt, als eine von zwei gleichen Gröſen, gröſer, als die andere von dieſen Gröſen. Wenn zum Beiſpiel A > B, und B=C iſt; So kan vor B die Gröſe C

geſezt werden, und alsdann iſt auch A > C: Oder wenn Fünf > Drei, und Drei = Zwei und Eins iſt: So kan Zwei und Eins vor Drei geſezt werden, und daher iſt auch Fünf > Zwei und Eins.

§. 41.

Die Gröſe, welche kleiner iſt, als eine von zwei gleichen Gröſen, die iſt auch kleiner, als die andere von dieſen gleichen Gröſen.

Beweis.

Iſt eine Gröſe kleiner, als eine von zwei gleichen Gröſen; So iſt iene Gröſe einem Teil von dieſer Gröſe gleich (§. 32.). Nun kan aber von den zwei gleichen Gröſen eine vor die andere geſezt werden (§. 25.), und daher iſt eine Gröſe, die kleiner iſt, als eine von zwei gleichen Gröſen, auch kleiner, als die andere von dieſen gleichen Gröſen. Geſezt es ſey A < B und B = C; So kan vor B die Gröſe C geſezt werden, und alsdann iſt auch A < C: Oder wenn Fünf < Sieben, und Sieben = Vier und Drei iſt: So kan Vier und Drei vor Sieben geſezt werden, und daher iſt auch Fünf < als Vier und Drei.

§. 42.

Wenn eine jede von zwei Gröſen von einer dritten das Zweifache, das Dreifache, und das Vierfache iſt, und ſo weiter: So ſind auch dieſe Gröſen ſich ſelbſt gleich (§. 21. und 36.).

Beweis.

Beweis.

Wenn eine iede von zwei Gröſen von einer dritten das Zweifache, Dreifache, und Vierfache iſt, und ſo weiter: So iſt eine iede von dieſen Gröſen, dem Zweifachen, Dreifachen, und Vierfachen von einer dritten Gröſe gleich. Es ſind alſo zwei Zahlen einer dritten gleich (§. 39.), und daher ſind auch zwei Gröſen, wovon eine iede das Zweifache, Dreifache, und Vierfache einer dritten Gröſe iſt, und ſo weiter, ſich ſelbſt gleich. Iſt zum Beiſpiel A das Zweifache von C, und auch B das Zweifache von C: So iſt A dem Zweifachen von C, und auch B dem Zweifachen von C, und alſo beide Gröſen A und B einer dritten C gleich, und derohalben iſt auch A = B: Oder wenn Sechs das Zweifache von Drei, und Vier und Zwei auch das Zweifache von Drei iſt; So iſt Sechs dem Zweifachen von Drei, und auch Vier und Zwei dem Zweifachen von Drei gleich, und alſo ſind Fünf, und Vier und Drei einer dritten Gröſe und dem Zweifachen von Drei gleich, und daher iſt auch Sechs, Vier und Zwei gleich.

§. 43.

Das Zwei- Drei- und Vierfache, und ſo weiter, von einer von zwei gleichen Gröſen, iſt auch das Zwei- Drei- und Vierfache von der andern von dieſen Gröſen (§. 21. und 36.).

Beweis.

Wenn eine Gröſe das Zwei- Drei- und Vierfache, und ſo weitere von einer von zwei gleichen Gröſen iſt; So kan man die eine von dieſen gleichen Gröſen vor die andere ſezzen (§. 25.): Und wenn dieſes geſchiehet; ſo iſt auch alsbald klar, daß das Zwei- Drei- und Vierfache, und ſo weitere, der einen von zwei gleichen Gröſen auch das Zwei- Drei- und Vierfache, und ſo weitere von der andern von dieſen zwei gleichen Gröſen ſei. Wenn zum Exempel A das Zweifache von B iſt, und B = C; So iſt auch, wenn man vor B die Gröſe C ſezt, A das Zweifache von C: Oder wenn Neun das Dreifache von Drei iſt, und Drei iſt gleich Zwei und Eins, und man ſezt Zwei und Eins vor Drei; So iſt auch Neun das Dreifache von Zwei und Eins.

§. 44.

Wenn eine iede von zwei Gröſen die Hälfte, der dritte, der vierte, und ſo weitere Teile von einer dritten Gröſe iſt: So ſind dieſe Gröſen einander ſelbſt gleich.

Beweis.

Wenn eine iede von zwei Gröſen die Hälfte, der dritte, vierte, und ſo weitere Teile von einer dritten Gröſe iſt: So ſind zwei Gröſen der Hälfte, dem dritten, dem vierten, und ſo weiteren Teil einer dritten Gröſe, und alſo zwei Gröſen einer dritten gleich,

und daher ſind auch zwei Gröſen, wovon eine iede die Hälfte, der dritte, der vierte und ſo weitere Teil von einer dritten Gröſe iſt, ſich ſelbſt gleich (§. 39.). Iſt zum Beiſpiel A die Hälfte von C, und es iſt auch B die Hälfte von C; So iſt A dem halben Teil von C, und auch B dem halben Teil von C gleich, und folglich A=B: Oder iſt Sechs die Hälfte von Zwölf, und es iſt auch Vier und Zwei die Hälfte von Zwölf; So iſt auch Sechs, Vier und Zwei gleich.

§. 45.

Ein aliquoter Teil von einer von zwei gleichen Gröſen iſt auch ein aliquoter Teil von der andern von dieſen Gröſen (§. 35.).

Beweis.

Gleiche Gröſen können ihrer Gleichheit ohngeſchadet vor einander geſezt werden (§. 25.). Wenn man daher einen aliquoten Teil von einer von zwei gleichen Gröſen annimt, und ſezt vor dieſe Gröſe die andere von den gleichen Gröſen: So iſt auch der aliquote Teil der einen gleichen Gröſe, der aliquote Teil von der andern von dieſen gleichen Gröſen. Wenn zum Beiſpiel p ein aliquoter Teil von A iſt, und A=B; So kan B vor A geſezt werden, und daher iſt auch p der aliquote Teil von B: Oder wenn Zwei ein aliquoter Teil von Acht iſt, und Acht iſt Fünf und Drei gleich; So kan Fünf und Drei vor Acht geſezt werden, und es iſt alſo auch Zwei ein aliquoter Teil von Fünf und Drei.

§. 46.

Ein aliquanter Teil von einer von zwei gleichen Gröſen iſt auch ein aliquanter Teil von der andern von dieſen gleichen Gröſen (§. 35.).

Beweis.

Der Beweis iſt, wenn man Statt aliquoten aliquanten Teil ſezt, der vorhergehende. Iſt alſo p ein aliquanter Teil von A, und A=B; So kan B vor A geſezt werden, und daher iſt auch p der aliquante Teil von B: Oder iſt Drei der aliquante Teil von Acht, und Acht, Fünf und Drei gleich; So kan Fünf und Drei vor Acht geſezt werden, und es iſt alſo auch Drei der aliquante Teil von Fünf und Drei.

Das zweite Kapitel
von den
verſchiedenen Arten aus beſtimten und bekanten Gröſen unbekante durch den Gebrauch der Zeichen zu finden.

§. 47.

In der Rechenkunſt ſoll man aus beſtimten und bekanten Gröſen andere unbekante durch den Gebrauch beſtimter Zeichen erfinden (§. 9.): Und daher müſſen wir auch in dieſem Kapitel vorerſt von dem Gebrauch der Zeichen bei Erfindung der Gröſen, und dann von

der

der Erfindung der Gröſe aus beſtimten und bekanten Gröſen durch den Gebrauch der Zeichen ſelbſt handeln.

§. 48.

Wir wollen dieſe zwei Stükke in zwei Titteln vortragen, und uns aller nur möglichen Deutlichkeit bedienen.

Der erſte Tittel
von dem
Gebrauch der Zeichen bei Erfindung der Gröſen.

§. 49.

Ein iedes ſinliches Ding, welches den Gedanken von einem andern Ding in uns erwekt, nent man ein Zeichen. Das Zeichen der Gleichheit, nemlich =, iſt alſo ein ſolches ſinliches Ding, welches, ſobald man es erblikket, den Gedanken in uns erregt, daß zwei Dinge einander gleich ſind, eben ſo bringt auch das Zeichen der Aehnlichkeit, nemlich ∽, in uns den Gedanken hervor, daß zwei Dinge einander ähnlich ſind.

§. 50.

Ein Zeichen, welches nicht aus andern zuſammengeſezt iſt, nent man ein einfaches, ein Zeichen hingegen, welches aus andern zuſammen geſezt worden, ein zuſam-

ſammen geſeztes Zeichen. Die eben gedachten Zeichen ſind alſo einfache Zeichen. Das Zeichen der Congruenz hingegen, nemlich ≌, iſt ein aus dem Zeichen der Aehnlichkeit, und der Gleichheit zuſammen geſeztes Zeichen, und es erwekt bei uns den Gedanken, daß zwei Dinge einander ähnlich, und auch gleich ſind.

§. 51.

In der Rechenkunſt ſoll man Gröſen erfinden (§. 7. und 8.), die Gröſen aber beſtehen aus vielen zuſammen gefaſten Einheiten von einerlei Art (§. 15. und 16.), und daher muß man, wenn man eine Gröſe erfinden ſoll, die Anzahl ihrer Einheiten erfinden. Man muß alſo in der Rechenkunſt vorerſt wiſſen, wie man die Einheiten der Dinge zuſammen zählen, und dadurch die eigentliche Anzahl dieſer Dinge beſtimmen ſoll. Wenn man aber ſo viele Einheiten von einerlei Art, als iezt Punkten auf einander folgen, nemlich . . . . zuſammengezählet hat: So fängt man wieder von vorn an zu zählen, und bemerkt nur, wie oft man dieſe Anzahl von Einheiten gezählet hat.

§. 52.

Damit man die Anzahl der Einheiten, die man auf dieſe Art gezählet hat, genau von einander unterſcheiden könne: So gibt man einer ieden Anzahl einen

einen gewiſſen Namen, und nennet eine Einheit Eins, Eins und eine Einheit Zwei, Zwei und eine Einheit Drei, Drei und eine Einheit Vier, Vier und eine Einheit Fünf, Fünf und eine Einheit Sechs, Sechs und eine Einheit Sieben, Sieben und eine Einheit Acht, Acht und eine Einheit Neun, und Neun und eine Einheit Zehn. Man zählet alſo nur bis auf Zehn, und es ſind dieſes die Namen, die man den Anzahlen der Einheiten gibt, ehe man wieder anfängt von vorn zu zählen.

§. 53.

Um nun auch genau unterſcheiden zu können, wie oft man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51. und 52.) noch eine Einheit zu Zehn, und wie oft man auch Zehn gezählet hat: So nent man Zehn und Eins Eilf, Zehn und Zwei Zwölf, Zehn und Drei Dreizehn, Zehn und Vier Vierzehn, Zehn und Fünf Fünfzehn, Zehn u. Sechs Sechzehn, Zehen u. Sieben Siebenzehn, Zehn und Acht Achtzehn, und Zehn u. Neun Neunzehn, Zweimal Zehn Zwanzig, Zwanzig und Eins Ein und Zwanzig, Zwanzig und Zwei Zwei und Zwanzig, Zwanzig und Drei Drei und Zwanzig, Zwanzig und Vier Vier und Zwanzig, Zwanzig und Fünf Fünf und Zwanzig, Zwanzig und Sechs Sechs u. Zwanzig, Zwanzig u. Sieben Sieben und Zwanzig, Zwanzig u. Acht Acht und Zwanzig,

zig, und Zwanzig und Neun Neun und Zwanzig, dreimal Zehn Dreiſig, Dreiſig u. Eins Ein und Dreiſig, und ſo weiter wie bei Zwanzig, viermal Zehn Vierzig, Vierzig u. Eins Ein und Vierzig u. ſo weiter wie bei Zwanzig, fünfmal Zehn Fünfzig, Fünfzig und Eins Ein und Fünfzig, und ſo weiter, wie bei Zwanzig, ſechsmal zehn Sechzig, Sechzig u. Eins Ein und Sechzig, und ſo weiter wie bei Zwanzig, ſiebenmal Zehn Sebenzig, und Sieben u. Eins Ein u. Siebenzig, und ſo weiter wie bei Zwanzig, achtmal Zehn Achtzig, und Achtzig u. Eins Ein und Achtzig, und ſo weiter wie bei Zwanzig, neunmal Zehn Neunzig, und Neunzig u. Eins Ein und Neunzig, und ſo weiter wie bei Zwanzig, und zehnmal Zehn Hundert.

§. 54.

Jezt bemerket man aber auch das, wie oft man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51.) Hundert gezählt hat mit beſondern Namen, und nennet zweimal Hundert Zweihundert, dreimal Hundert Dreihundert, viermal Hundert Vierhundert, fünfmal Hundert Fünfhundert, ſechsmal Hundert Sechshundert, ſiebenmal Hundert Siebenhundert, achtmal hundert Achthundert, neunmal Hundert Neunhundert, und zehnmal Hundert Tauſend. Die Anzahlen der Einheiten aber, die zwiſchen die Hunderte fallen, die nennet man mit den vorigen Namen,

men (§. 52. und 53.), und hänget ſie den Ein- bis Zehnhunderten, mit dem Wort und an.

§. 55.

Damit man endlich auch genau unterſcheiden könne, wie vielmal man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51.) Tauſend gezählet habe: So nennet man zweimal Tauſend Zweitauſend, dreimal Tauſend Dreitauſend, viermal Tauſend Viertauſend, fünfmal Tauſend Fünftauſend, ſechsmal Tauſend Sechstauſend, ſiebenmal tauſend Siebentauſend, achtmal Tauſend Achttauſend, neunmal Tauſend Neuntauſend, zehnmal Tauſend Zehntauſend, die zwiſchen die Tauſende fallende Anzahlen von Einheiten aber nent man mit den vorigen Namen (§. 52. 53. und 54.), und hängt ſie den Ein- bis Zehntauſenden mit dem Wort und an.

§. 56.

Um auch genau zu unterſcheiden, wie oft man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51.) Zehntauſend gezählet habe: So gibt man dieſen Anzahlen wieder andere Namen und nent zweimal Zehntauſend, Zwanzigtauſend, und ſo bekomt man, wenn man ſtets bemerkt, wie oft man Zehntauſend gezählt hat, Dreiſigtauſend, Vierzigtauſend, Fünfzigtauſend, Sechzigtauſend, Siebenzigtauſend,

Achtzig-

Achtzigtauſend, Neunzigtauſend und Hundert-tauſend, die zwiſchen die Zehnertauſende fallende Anzahlen von Einheiten aber nent man mit den vorigen Namen (§. 52. 53. 54. und 55.), und hängt ſie den Zehn- bis Hunderttauſenden durch das Wort und an.

§. 57.

Damit man auch genau unterſcheiden könne, wie oft man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51.) Hunderttauſend gezählt habe: So nent man zweimal hunderttauſend Zweihunderttauſend, und ſo bekomt man, wenn man ſtets bemerkt, wie oft man hunderttauſend gezählt hat, Dreihunderttauſend, Vierhunderttauſend, Fünfhunderttauſend, Sechshunderttauſend, Siebenhunderttauſend, Achthunderttauſend, Neunhunderttauſend, und Zehnhunderttauſend, oder Tauſendmaltauſend, die zwiſchen die Hunderttauſend fallende Anzahlen von Einheiten aber nent man mit den vorigen Namen, (§. 52. 53. 54. 55. und 56.), und hängt ſie den Einhundert- bis Zehnmalhunderttauſenden durch das Wort und an.

§. 58.

Um endlich genau zu unterſcheiden, wie oft man ſtets in der Ordnung von Eins bis auf Zehn (§. 51.) Tauſendmaltauſend (§. 57.), gezählt hat: So nennet

man,

man, um die groſe Namen zu vermeiden, tauſend-maltauſend, eine Million, tauſendmaltauſend Millionen, oder eine Millionmalmillionen eine Billion, tauſendmaltauſend Billionen, oder eine Millionmalbillionen eine Trillion, tauſendmaltauſend Trillionen, oder eine Millionmaltrillionen ein Quadrillion, und ſo weiter, die zwiſchen eine Million und Billionen, die Billionen und Trillionen, die Trillionen und Quadrillionen, und ſo weiter fallende Anzahlen von Einheiten aber nent man mit den vorigen Namen (§. 52. 53. 54. 55. 56. und 57.), und hängt dieſe den Billionen, Trillionen und Quadrillionen, durch das Wort und an, und dieſes ſind alle die Namen, wodurch man die Anzahlen der Einheiten in dem zehnfachen Wachsthum unterſcheidet.

§. 59.

Ehe man rechnen können, hat man die Vielheit der Dinge an den zehn Fingern gezählet, und daher iſt es auch wahrſcheinlicher Weiſe gekommen, daß man nur bis auf Zehn zählet, und alsdann wieder von vorn anfängt, wenn man Zehn gezählet hat, aber bemerkt, wie oft Zehn gezählet worden. Es iſt dieſe Art zu zählen nicht notwendig, und man kan auch bis auf Zwei, Vier, Fünf, Zwölf, Vier und Zwanzig, und eine iede andere Anzahl von Einheiten zählen, ehe man wieder von vorn anfängt; die meiſten Völ-

ker zählen inzwiſchen darnach, und daher würde es auch eine ſehr groſe Verwirrung geben, wenn man eine andere Art zu zählen einführen wolte. Durch den langen Gebrauch iſt alſo dieſe Art zu zählen faſt notwendig geworden.

§. 60.

Eine iede Anzahl von Einheiten von einerlei Art nent man ſchlechtweg eine Zahl (§. 15.). Dieſe Zahl nun begreift entweder überhaupt Einheiten von einerlei Art in ſich, oder ſie faſſet ſolche Einheiten in ſich, die eine beſtimte Art ausmachen. Jene heiſt eine **ungenante**, dieſe aber eine **genante Zahl**. Damit man die Teile einer Gröſe genauer beſtimmen könne: So teilt man die Einheit von den genanten Zahlen in eine gewiſſe Anzahl kleinere Dinge, und ſo wieder eine Einheit von dieſen kleineren Dingen in eine gewiſſe Anzahl von noch kleineren Dingen. Die Dinge nun, die Teile von einer gröſeren Art ſind, die nent man **Dinge von der kleineren**, die gröſere aber **Dinge von der gröſeren Art**. Fünf, Acht, Zehn und Zwanzig bedeuten alſo überhaupt Einheiten von einerlei Art, und daher ſind ſie ungenante Zahlen, vier Gulden, ſechs Weispfennige, und ſieben Heller hingegen zeigen Einheiten von einer beſtimten Art an, und darum ſind dieſe genante Zahlen, es ſind aber die Heller in Rükſicht auf die Weispfennige, und die Weispfennige in Rükſicht

auf

auf die Gulden Dinge von der kleineren, die Gulden hingegen in Rükſicht auf die Weispfennige, und die Weispfennige in Rükſicht auf die Heller Dinge von der gröſeren Art.

§. 61.

Wenn man bei den verſchiedenen Arten zu rechnen die Nahmen der Zahlen beibehalten wolte (§. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. und 60.): So würde man ſich einer unbeſchreiblich groſen Weitläuftigkeit, und unzählig vielen Verwirrungen ausſezzen, eben darum aber hat man gewiſſe Zeichen angenommen (§. 49. und 50.), wodurch man eine iede Zahl ausdrukt. Sie beſtehen aus indianiſchen Buchſtaben, und ſind vor die Zahlen von Eins bis auf Zehn (§. 52.) folgende:

1	bedeutet	Eins
2	= = =	Zwei
3	= = =	Drei
4	= = =	Vier
5	= = =	Fünf
6	= = =	Sechs
7	= = =	Sieben
8	= = =	Acht
9	= = =	Neun.

Man nent dieſe Zeichen Ziffern, auch Zahlen, da man ſie dann vor die Zahl ſelbſt nimt.

§. 62.

Damit man nun auch durch die Menge von Zeichen in keine Weitläuftigkeit und Verwirrung verfallen könne: So bemerkt man alle Zahlen, die auf Neun folgen (§. 53. 54. 55. 56. 57. und 58.), durch eben dieſe Zeichen, man gibt ihnen aber die Bedeutung von den Zahlen, die ſie ausdrukken ſollen, aus der Stelle, worinnen ſie neben einander ſtehen. Man läſſet ſie nemlich von der rechten nach der linken Hand zu in der erſten Stelle Einer, in der andern Zehner, und in der dritten Hunderte bedeuten, und zwar ſo viel Einer, Zehner, und Hunderte, als das Zeichen an und vor ſich Einheiten ausdrukt, die Stelle aber, worinnen keine Zahlen anzutreffen ſind, die füllet man, damit iedes Zeichen in die Stelle ſeiner Bedeutung komt, mit einem Ringe, oder einer Null, nemlich 0 aus, und bedient ſich alſo zu gröſeren Zahlen als 9, zuſammengeſezter Zeichen (§. 50.). Man kan alſo vorerſt die Zahlen von Eins bis Einhundert (§. 52. und 53.) mit den Zeichen von 1 bis 9 und dem Zeichen 0 dergeſtalt ausdrukken:

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

§. 63.

Wenn man dieſe Zeichen, ſo, wie ſie von vornher auf einander folgen, dem Zeichen von Einhundert, nemlich 100 von der rechten nach der linken Hand zu anhängt, und die leeren Stellen mit Nullen ergänzet: So bekomt man auch die zuſammengeſezte Zeichen von Ein- bis Zweihundert (§. 54.), und die ſind dieſe:

101	111	121	131	141	151	161	171	181	191
102	112	122	132	142	152	162	172	182	192
103	113	123	133	143	153	163	173	183	193
104	114	124	134	144	154	164	174	184	194
105	115	125	135	145	155	165	175	185	195
106	116	126	136	146	156	166	176	186	196
107	117	127	137	147	157	167	177	187	197
108	118	128	138	148	158	168	178	188	198
109	119	129	139	149	159	169	179	189	199
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200

Wenn man nun auf eben die Art bei Zweihundert, und ſo bei einem jeden Hundert bis zu Eintauſend verfährt: So bekomt man alle zuſammengeſezte Zeichen von 100 bis 999.

§. 64.

Weil man mit den angegebenen einfachen Zeichen in dieſen drei Stellen von der rechten nach der linken Hand zu noch nicht alle Zahlen bezeichnen kan (§. 54. 55. 56. 57. 58. und 60.): So nehme man von der rechten nach der linken Hand zu, um auch hier neue Zeichen zu vermeiden, wieder drei Stellen zu einer neuen Klaſſe an, und gebe dieſer den gemeinſchaftlichen Namen der Tauſende, doch laſſe man in einer jeden Klaſſe die erſte Stelle Einer, die andere Zehner, und die dritte Hunderte von dieſem gemeinſchaftlichen Namen bedeuten: So bekomt man die zuſammengeſezte Zeichen von den Zahlen Eintauſend bis Neunhundert und Neun und Neunzig Tauſend (§. 54. 55. 56. und 57.). Weil man dieſe Zeichen findet, wenn man die im 63. §. angegebenen Zeichen der erſten Klaſſe, auch in dieſer der zweiten Klaſſe von der rechten nach der linken Hand zu, und zwar ſo, wie ſie in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgen, nach einander anhängt, die leeren Stellen aber durch Nullen ergänzet: So wollen wir dieſelbe, um alle unnötige Weitläuftigkeiten zu übergehen, nicht hieher ſezzen.

§. 65.

Damit man endlich keine neue Zeichen vor die Millionen, Tauſendmillionen, Billionen, Tauſendbillionen, Trillionen, Tauſendtrillionen, Quadrillionen und ſo weiter nötig habe (§. 58.): So nehme man von der rechten nach der linken Hand noch eine Klaſſe von drei Stellen zu den Millionen, noch eine zu den Tauſendmillionen, wieder eine zu den Billionen, noch eine zu den Tauſendbillionen, wieder eine zu den Trillionen, noch eine zu den Tauſendtrillionen, und wieder eine zu den Quadrillionen, und noch eine zu den Tauſendquadrillionen, und ſo weiter an, und laſſe in ieder Klaſſe die erſte Stelle Einer, die andere Zehner, und die dritte Hunderte von dem gemeinſchaftlichen Namen dieſer Klaſſen gelten: So erhält man die zuſammengeſezten Zeichen von den Zahlen Neunhundert Neun und Neunzig Tauſend, bis zu den Tauſendquadrillionen, und ſo weiter. Auch hier werden dieſe Zeichen erfunden, wenn man die im 63. §. angegebene Zeichen der erſten Klaſſen, ſo, wie ſie in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, ſtets in der neu angenommenen Klaſſe von der rechten nach der linken Hand zu nach einander anhängt, und die leeren Stellen mit Nullen ergänzet.

§. 66.

Damit man ſich das, was wir §. 61. 62. 63. 64. und 65. vorgetragen haben, deſto deutlicher vorſtellen,

und die Sache auf einmal überſehen könne: So wollen wir eine Tafel hierher ſezzen, woraus man die Bedeutung einer ieden Ziffer von einer in einer Reihe neben einander geſchriebenen Zahl überſehen kan, wenn man die Tafel B in Gedanken zur linken Hand an die Tafel A anhängt. S. beiliegende Tabelle mit dem Zeichen ⊙. Nunmehr wollen wir zeigen, wie man eine iede mit Ziffern geſchriebene Zahl ausſprechen ſoll.

§. 67.

Wenn man eine iede mit Ziffern geſchriebene Zahl, und alſo das zuſammengeſezte Zeichen einer Zahl durch Worte ausſprechen, folglich von einem ieden einfachen Zeichen die Bedeutung, oder den Namen angeben ſoll, der ihm der Stelle nach, worinnen es ſtehet, beigelegt werden muß: So verfahre man nach dieſen Regeln:

1) Weil ſtets drei Stellen zu einer Klaſſe, und einem gemeinſchaftlichen Namen gehören (§. 66.): So teile man die geſchriebene Zahl (§. 60.) von der rechten nach der linken Hand zu in Klaſſen, und zwar ſo, daß ſtets drei Ziffern, oder drei einfache Zeichen in eine ſolche Klaſſe kommen. Damit man aber dieſe Klaſſen deutlich von einander unterſcheiden könne: So ſondere man eine iede von der andern durch ein kleines Strichlein ab, ſo, daß das Strichlein ſtets

zwiſchen

eite 40. §. 66. bei dem Zeichen ⊙.

laſſe der gemein- liche Namen Tauſende			Erſte Klaſſe der gemein- ſchaftliche Namen Einfache		
	Zweite Stelle	Erſte Stelle	Dritte Stelle	Zweite Stelle	Erſte Stelle
e	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer

e Klaſſe der ge- aftliche Namen rillionen			Sechſte Klaſſe der gemein- ſchaftliche Namen Tauſend Billionen		
	Zweite Stelle	Erſte Stelle	Dritte Stelle	Zweite Stelle	Erſte Stelle
e	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer

zwiſchen die erſte in der nächſtfolgenden, und die dritte Ziffer in der vorhergehenden Klaſſe von der rechten nach der linken Hand zu zu ſtehen komt.

2) Um die Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, und ſo weiter genau und deutlich von einander zu unterſcheiden; So mache man von der rechten nach der linken Hand zu über die erſte Ziffer in der dritten Klaſſe einen Punkt, oder ein Strichlein, über die erſte Ziffer in der fünften Klaſſe zwei Strichlein, über die erſte Ziffer in der ſiebenden Klaſſe drei Strichlein, über die erſte Ziffer in der neunten Klaſſe vier Strichlein, und ſo ſtets fort über die erſte Ziffer in der nächſtfolgenden zweiten Klaſſe von der rechten nach der linken Hand zu ein Strichlein mehr: So bedeutet ein Punkt, oder ein Strichlein über der Ziffer Millionen, zwei Strichlein Billionen, drei Strichlein Trillionen, und vier Strichlein Quadrillionen, und ſo weiter, die Klaſſen hingegen, worinnen unten zur rechten Hand allein ein Strichlein iſt, bedeuten Tauſende, und zwar von dem Namen der nächſtvorhergehenden Klaſſe von der rechten nach der linken Hand zu; es bedeuten nemlich die Ziffern in der vierten Klaſſe Tauſendmillionen, in der ſechſten Klaſſe Tauſendbillionen, in der achten Klaſſe Tauſendtrillionen, in der zehnten Klaſſe Tauſendquadrillionen, und ſo weiter (§. 66.). Wenn nun

3) eine mit Ziffern geſchriebene Zahl auf dieſe Art

 bezeich-

bezeichnet iſt: So ſpreche man die erſte Ziffer in einer Klaſſe von der linken nach der rechten Hand zu durch Hunderte, die zweite durch Zehner, und die dritte durch Einer aus, und bemerke, ob über, oder nur allein unter den Einern Strichlein ſtehen. Wenn ienes iſt; So ſpreche man dieſe Strichlein durch die ihnen in der vorigen Regel zugeeignete Bedeutung aus: Wenn hingegen dieſes iſt; So ſpreche man die Zahlen in dieſer Klaſſe blos durch Tauſend aus, und ſezze erſt in der lezten Ziffer der nächſtfolgenden Klaſſe von der linken nach der rechten Hand zu die folgenden Quadrillionen, Trillionen, Billionen, und Millionen dazu, wenn eine von dieſen auf eine ſolche Klaſſe folgt, damit man dieſe Namen nicht doppelt ausſpreche (§. 66.). Wenn man zum Beiſpiel die Zahl

$$45, 30\overset{''''}{0}, 712, 00\overset{'''}{8}, 893, 50\overset{''}{7}, 025, 20\overset{'}{0}, 876, 435$$

nach der erſten und zweiten Regel bezeichnet hat; So ſpreche man dieſelbe nach der dritten Regel alſo aus: Fünf und Vierzigtauſend und Dreihundert Quadrillionen, Siebenhundert und Zwölftauſend und Acht Trillionen, Achthundert u. Drei und Neunzigtauſend und Fünfhundert und Sieben Billionen, Fünf und Zwanzigtauſend und Zweihundert Millionen, Achthundert Sechs und Siebenzigtauſend und Vierhundert und Fünf und Dreiſig.

Beweis.

Beweis.

Der Beweis iſt aus der Tafel des 66. §. ganz klar.

§. 68.

Aus dem, was wir bisher geſagt haben, låſt ſich auch leicht begreifen, wie man eine iede Zahl, die geſagt wird, geſchwind ſchreiben kan. Denn wenn man die Zahl, welche geſagt wird, von der linken nach der rechten Hand zu nach und nach durch ihre Ziffern hinſchreibt, und, wenn Tauſend geſagt wird, hinter die bis dahin niedergeſchriebenen Ziffern unten einen Strichen, wenn hingegen Quadrillionen, Trillionen, Billionen, oder Millionen ausgeſprochen werden, hinter die zulezt geſchriebenen Ziffern unten ein Strichlein, oben darůber aber das Zeichen der Quadrillion, Trillion, Billion, oder Million machet: So bekomt man auch die ganze Zahl, die vorgeſagt wird, in Ziffern, wenn man nur die bei dem Ausſagen der Zahl ausgelaſſenen Klaſſen ſowol, als die ausgelaſſenen Hunderte, Zehner, und Einer in einer Klaſſe mit Nullen ergånzet. Soll man zum Beiſpiel Dreitauſend Vierhundert und Zwei Millionen und Dreihundert und Fůnf niederſchreiben: So ſchreibt man erſt Dreitauſend, nemlich die Ziffer 3, und macht dahinter unten einen Strichen, iezt ſchreibt man Vierhundert, nemlich die Ziffer 4, in die Stelle der Hunderte in der folgenden Klaſſe von der linken

nach

nach der rechten Hand zu, vor die fehlende Zehner macht man eine Nulle, und iezt ſchreibt man zwei Millionen, man ſchreibt nemlich die Ziffer 2, und macht darhinter unten hin einen Strichen, eben ſo aber auch obenhin einen Strichen, in der fehlenden Klaſſe der Tauſende aber fült man die Stelle der Hunderte, der Zehner, und der Einer mit Nullen aus. Nunmehr ſchreibt man Dreihundert, nemlich die Ziffer 3, die Stelle der fehlenden Zehner fült man mit einer Null aus, und endlich ſchreibt man Fünf, nemlich die Ziffer 5, ſo bekomt man die ausgeſprochene Zahl in Ziffern, und alſo 3, 402′, 000, 305. Wenn bei dem Niederſchreiben einer Zahl bei den Tauſenden, den Millionen, den Tauſendmillionen, den Billionen, und ſo weiter gar keine Zahlen weiter ausgeſprochen werden: So muß man ſo viele Nulle, oder ſo viele Klaſſen anhängen, bis die Ziffer, welche die ausgeſprochene Zahl ausdrukt, in die Stelle zu ſtehen komt, worinnen ſie die ausgeſprochene Zahl bedeutet. Fünftauſend ſchreibt man demnach alſo: 5,000: Sieben Millionen 7′,000, 000: Fünf und Vierzigtauſend Millionen 45, 000′, 000, 000: Drei Billionen 3″, 000, 000′, 000, 000, Acht Trillionen 8‴, 000, 000″, 000, 000′, 000, 000,: Zwei Quadrillionen 2⁗, 000, 000‴, 000, 000″, 000, 000′, 000, 000.

Der

Der zweette Tittel
von der
Erfindung der Gröſen aus beſtimten und bekanten Gröſen durch den Gebrauch der Zeichen.

§. 69.

Wenn man die beſtimten und bekanten Gröſen, woraus man andere unbekante durch den Gebrauch der Zeichen erfinden ſoll (§. 47.), etwas genauer betrachtet: So ſiehet man ein, daß dieſe Gröſen entweder mit andern in einer Verknüpfung ſtehen, oder dieſes iſt nicht, und daher wollen wir in dieſem Tittel erſtlich von Erfindung der Gröſen handeln, die mit andern in keiner Verknüpfung ſtehen, und dann zweitens von Erfindung der Gröſen, die mit andern verknüpft ſind.

Erſtens
von der
Erfindung der Gröſen aus beſtimten und bekanten Gröſen, die mit andern in keiner Verknüpfung ſtehen.

§. 70.

Die Gröſen, welche mit andern in keiner Verknüpfung ſtehen, ſind ganze Gröſen, Brüche und Potenzen.

zen. Wir wollen ſie in der Folge erklären, und zeigen, wie man bei alle dieſen Gröſen aus bekanten unbekante finden ſoll.

A.

Von Erfindung der Gröſen aus bekanten ganzen Gröſen, oder den vier Rechnungsarten.

§. 71.

Eine iede Gröſe beſtehet aus vielen Einheiten von einerlei Art (§. 15. 16. und 17.). Es kan alſo überhaupt mit der Gröſe weiter keine Veränderung vorgenommen werden, als daß man ſie vermehret, oder vermindert, das iſt, entweder verſchiedene Einheiten von ihrer Art hinzu, oder einige davon thut.

§. 72.

Wenn man eine Gröſe vermehret (§. 15.): So ſezt man entweder kleinere, und gröſere Gröſen von ihrer Art hinzu, oder man ſezt eine Gröſe etlichemal zu ſich ſelbſt. Aus dem erſten erwächſt der Begrif von der Addition, aus dem andern aber der Begrif von der Multiplication der Gröſen.

§. 73.

Wenn man eine Gröſe vermindert: So nimt man eine Gröſe entweder nach und nach von einer andern

andern weg, oder man nimt eine Gröſe ſo vielmal von einer andern weg, als man kan. Aus dem erſtern entſtehet der Begrif von der Subtraction, aus dem andern aber von der Diviſion der Gröſen. Wir wollen dieſe Begriffe von der Addition, der Subtraction, der Multiplication, und der Diviſion genauer bilden.

§. 74.

Wenn man aus bekanten Gröſen durch das Zuſammenzählen der Einheiten eine Gröſe findet, welche denen bekanten zuſammen genommen gleich iſt: So nent man dieſe Art zu rechnen die Addition (§. 72.). Es kommen dabei zweierlei Arten von Gröſen vor, die bekanten, und die unbekante, die man findet: Jene heiſen die ſummirende Gröſen, dieſe aber die Summe, oder das Aggregat.

§. 75.

Man gebraucht um der Kürze willen gar oft ein Zeichen, wodurch man ausdrukt, daß verſchiedene Gröſen zu einander addirt werden ſollen, und dieſes beſtehet in eiuem Kreuz, nemlich +, das man zwiſchen die Gröſen ſezt, die addirt werden ſollen, und durch mehr oder plus ausſpricht. Wenn man alſo anzeigen will, daß die Gröſen A, B und C addirt werden ſollen; So ſchreibt man dieſes alſo: A+B+C, und lieſt es A plus B plus C:

Und

Und wenn man andeuten will, daß 9, 7, 5, und 3 addirt werden ſollen; So ſchreibt man dieſes dergeſtalt 9 ✝ 7 ✝ 5 ✝ 3, und lieſt es 9 plus 7 plus 5 plus 3. Zuweiln ſchreibt man dieſes Kreuz auch alſo +.

§. 76.

Wenn man von zwei bekanten Gröſen die eine von der andern wegnimt, und daraus eine Gröſe findet, welche mit der kleinſten von den bekanten Gröſen zuſammen genommen, der gröſten von den bekanten Gröſen gleich iſt (§. 32.): So heiſt man dieſe Art zu rechnen die Subtraction, oder die Abziehung (§. 73.). Die Gröſe, welche bei der Subtraction übrig bleibt, heiſt der Unterſcheid, der Ueberſchuß, der Reſt, oder die Differenz.

§. 77.

Das Zeichen, wodurch man anzeigt, daß eine Gröſe von der andern abgezogen werden ſoll, iſt ein Querſtrichen, nemlich —, den man zwiſchen beide Gröſen ſezzet, und durch weniger, oder minus ausſpricht. Will man alſo anzeigen, daß die Gröſe B von der Gröſe A abgezogen werden ſoll; So ſchreibt man dieſes ſo: A — B, und lieſt es A minus B: Oder will man andeuten, daß 3 von 5 ſubtrahirt werden ſoll; So ſchreibt man dieſes 5 — 3, und lieſt es 5 minus 3.

§. 78.

Wenn man eine Gröſe etlichemal nimt, oder einigemal, und zwar ſo vielmal, als eine andere Einheiten hat, zu ſich ſelbſt addiret, daraus aber eine unbekante Gröſe findet, in welcher die eine von den bekanten Gröſen ſo oft begriffen iſt, als die andere Einheiten hat (§. 72. und 74.); So nent man dieſe Art zu rechnen die **Multiplication**. Es kommen hierbei drei Gröſen in Betrachtung: die Gröſe, welche man etlichemal nimt, die Gröſe, welche anzeigt, wie oft man eine Gröſe nehmen ſoll, und die unbekante Gröſe, welche man findet. Die erſte heiſt das **Multiplicandum**, die andere der **Multiplicator**, und die dritte das **Factum**, oder das **Product**. Das Multiplicandum und der Multiplicator heiſen auch die **Factores**.

§. 79.

Das Zeichen, wodurch man ausdrukt, daß zwei Gröſen mit einander multiplicirt werden ſollen, iſt ein Punkt, ein Comma, oder ein liegendes Kreuz, nemlich . oder, oder ×, das man zwiſchen die beiden Gröſen ſezt, die man multipliciren ſoll. Wenn man alſo anzeigen will, daß die Gröſe A mit der Gröſe B multiplicirt werden ſoll; So ſchreibt man dieſes alſo: A . B, oder A, B, oder A × B, und lieſt es A multiplicirt mit B. Eben ſo ſchreibt man, wenn 5 mit 3

multiplicirt werden ſoll, 5 . 3, oder 5, 3, oder 5 × 3. Wenn man Buchſtaben mit einander multipliciret; So ſchreibt man dieſe öfters nur neben einander. Soll alſo A mit B multiplicirt werden: So ſchreibt man dieſes dergeſtalt AB. Wenn viele Buchſtaben durch einen multiplicirt werden ſollen. So ſchlieſt man die Buchſtaben, welche das Multiplicandum ausmachen, in zwei Klammern ein, und hängt den Multiplicator mit, oder ohne einen Punkt, ein Comma, oder ein liegendes Kreuz daran. Sollen alſo die Gröſen A + B + C durch D multiplicirt werden; So ſchreibt man dieſes alſo: (A + B + C). D, oder (A + B + C), D, oder (A + B + C) × D, oder (A + B + C) D. Wenn endlich viele Buchſtaben mit vielen Buchſtaben multiplicirt werden ſollen: So ſchlieſt man das Multiplicandum, und den Multiplicator in Klammern ein, und ſchreibt ſie mit, oder ohne einen Punkt, ein Comma, oder ein liegendes Kreuz an einander. Zum Beiſpiel: A + B + C multiplicirt mit D + E ſchreibt man alſo: (A + B + C). (D + E), oder (A + B + C), (D + E), oder (A + B + C) × (D + E), oder (A + B + C) (D + E). Anſtatt der Klammern kan man auch über die Buchſtaben, die man multipliciren ſoll, einen Strichen machen, und das Multiplicandum, und den Multiplicator mit, oder ohne einen Punkt, ein Comma, oder ein liegendes Kreuz an einander

ſchrei-

ſchreiben. A + B + C multiplicirt mit D kan man alſo auch ſo ſchreiben: $\overline{A + B + C}.\,D$, oder $\overline{A + B + C},\,D$, oder $\overline{A + B + C} \times D$, oder $\overline{A + B + C}\,D$, und A + B + C multiplicirt mit D + E ſchreibt man dergeſtalt $\overline{A + B + C}.\,\overline{D + E}$, oder $\overline{A + B + C},\ \overline{D + E}$, oder $\overline{A + B + C} \times \overline{D + E}$, oder $\overline{A + B + C}\ \ \overline{D + E}$.

§. 80.

Wenn man eine Gröſe ſo oft von einer andern abziehet, als man kan, und alſo aus zwei Gröſen eine Gröſe findet, welche anzeigt, wie oft die eine bekante Gröſe in der andern bekanten Gröſe, oder ein gewiſſer Teil in der ganzen Gröſe begriffen iſt (§. 73. und 76.); So nennet man dieſe Art zu rechnen die Diviſion. Bei der Diviſion kommen drei Gröſen vor, die eine, wovon die andere hinweg genommen wird, die andere, welche man hinweg nimt, und die dritte, welche anzeigt, wie oft die andere von der erſten weg genommen worden iſt: Die erſte heiſt der Dividendus, die andere der Diviſor, und die dritte der Quotient, oder der Quotus.

§. 81.

Das Zeichen, wodurch man andeutet, daß zwei Gröſen in einander dividirt werden ſollen, iſt ein

doppelter Punkt, nemlich :, den man zwiſchen beide Gröſen ſezzet, die man dividiren ſoll. Man ſchreibt aber auch die Gröſen nur unter einander, und unterſcheidet ſie mit einem Querſtrichen. Soll alſo A durch B dividirt werden; So ſchreibt man dieſes alſo: A : B, oder $\frac{A}{B}$, und lieſt es A dividirt durch B: Oder ſoll 12 durch 4 dividirt werden; So ſchreibt man dieſes dergeſtalt: 12 : 4, oder $\frac{12}{4}$. Wenn mehrere Gröſen durch einander dividirt werden ſollen; So ſchreibt man ſie entweder, wie vorhin unter einander, und unterſcheidet ſie mit einem Querſtrichen, oder man ſchlieſt ſie in zwei Klammern ein, und ſchreibt zwei Punkten dazwiſchen. Wenn alſo A + B + C durch D dividirt werden ſoll: So ſchreibt man dieſes alſo: $\frac{A+B+C}{D}$, oder (A + B + C) : D: Und wenn A + B + C durch D + E dividirt werden ſoll; So ſchreibt man es ſo: $\frac{A+B+C}{D+E}$, oder (A + B + C) : (D + E).

§. 82.

Die vier Arten zu rechnen, die wir im 74. 76. 78. und 80. §. erklärt haben, nent man die vier Rechnungsarten, oder die vier Species. Man ſezt im gemeinen Leben noch die fünfte Rechnungsart das Zählen, oder das ſogenante Numeriren dazu (§. 51.): Weil

Weil aber hierbei aus bekanten Gröſen keine unbekante gefunden, ſondern nur die Einheiten von einerlei Art zuſammen gezählet werden; So iſt auch das Zählen keine Rechnungsart: und weil die Multiplication im Grund eine wiederholte Addition, die Diviſion aber eine wiederholte Subtraction iſt (§. 78. und 80.); So giebt es auch eigentlich nur zwei Rechnungsarten, nemlich die Addition, und die Subtraction. Wir wollen, ehe wir zeigen, wie man die vier Rechnungsarten ausüben ſoll, vorerſt einige allgemeine Wahrheiten abhandeln.

§. 83.

Es können nur ſolche Gröſen zu einander addirt werden, die Gröſen von einerlei Art ſind.

Beweis.

Die Gröſen, welche zu einander addirt werden ſollen, müſſen zuſammen genommen eine andere Gröſe ausmachen (§. 74.), es beſtehet aber eine iede Gröſe aus vielen Dingen von einerlei Art (§. 15.), und derohalben können auch keine andere Gröſen zu einander addirt werden, als die, weiche Gröſen von einerlei Art ſind.

§. 84.

Die Gröſen, welche von einander ſubtrahirt werden ſollen, müſſen Gröſen von einerlei Art ſein.

Beweis.

Die Gröſe, welche man von einer andern Gröſe abziehet, macht mit der Differenz die Gröſe aus, wovon man die eine abgezogen hat (§. 76.). Sie, die Gröſe, die abgezogen wird, iſt alſo nur ein Teil von der Gröſe, wovon die Abziehung geſchiehet, die Teile aber, welche eine Gröſe ausmachen, ſind Dinge von einerlei Art (§. 15. und 16.), und daher müſſen auch die Gröſen, die von einander ſubtrahirt werden ſollen, Gröſen von einerlei Art ſein.

§. 85.

Wenn man zu gleichen Gröſen gleiche Gröſen addirt: So ſind die Summen, die heraus kommen, einander gleich (§. 21. und 74.).

Beweis.

Wir wollen annehmen, es ſeie 1) die Gröſe A = B (§. 22.), und 2) die Gröſe C = D, C nun ſoll zu A, D aber zu B addirt werden, und alsdann ſoll A + C = B + D ſein (§. 75.). Wir wollen alſo ſehen, ob wir das leztere erweiſen können. A + C = A + C (§. 27.), nun iſt aber A = B (N. 1.), und daher iſt auch A + C = B + C (§. 25.), es iſt aber auch ferner C = D (N. 2.), und daher iſt auch A + C = B + D (§. 25.).

§. 86.

Wenn man zu ungleichen Gröſen gleiche Gröſen addirt; So ſind die Summen, die heraus kommen, ungleich (§. 21. und 74.).

Beweis.

Wir nehmen an, es ſeie die Gröſe $A > B$ (§. 33.), und die Gröſe $C = D$ (§. 22.), C aber ſoll zu A, und D zu B addirt werden, und daher ſoll $A + C > B + D$ ſein (§. 75.). Den Beweis führen wir hierbei ſo: Wenn A gröſer iſt, als wie B; So enthält die Gröſe A die Gröſe B ganz, und es bleibt von A noch ein Teil übrig, den wir p nennen wollen (§. 32.). Es iſt alſo $A = B + p$. Addirt man nun zu der Gröſe A die Gröſe C, zu $B + p$ aber die Gröſe D; So iſt $A + C = B + p + D$ (§. 85.). Es iſt dieſemnach $B + p + D > B + D$, weil die Gröſe $B + p + D$ die Gröſe $B + D$ ganz in ſich faſt, und noch der Teil p übrig bleibt (§. 32.), nun iſt aber $A + C = B + p + D$, und daher iſt auch $A + C > B + D$ (§. 25.).

§. 87.

Wenn man von gleichen Gröſen gleiche Gröſen abziehet; So bleiben gleiche Unterſcheide übrig (§. 21. und 76.).

Beweis.

Es ſei 1) die Gröſe $A = B$ (§. 22), und 2) die Gröſe $C = D$. Wenn nun C von A, und D von B abge-

abgezogen wird; So ſoll A—C=B—D ſein (§. 77.). Wir beweiſen dieſes alſo: A—C=A—C (§. 27.), es iſt aber A=B (N. 1.), und daher iſt A—C=B—C (§. 25.), nun iſt ferner C=D (N. 2.), und daher iſt auch A—C=B—D (§. 25.).

§. 88.

Wenn man von ungleichen Gröſen gleiche Gröſen abziehet; So ſind die Unterſcheide, die übrig bleiben, ungleich (§. 21. und 76.).

Beweis.

Wir wollen annehmen, es ſeie A>B (§. 33.), und die Gröſe C=D (§. 22.), die Gröſe C nun ſoll von A, die Gröſe D aber von B abgezogen werden, und daher A—C>B—D ſein (§. 77.). Der Beweis iſt dieſer: Wenn A gröſer iſt, als B: So enthält A die Gröſe B ganz in ſich, und es bleibt noch ein Teil übrig, welcher p heiſen ſoll (§. 32.). Dieſemnach iſt A=B+p. Wenn man iezt von A die Gröſe C, und von B+p die Gröſe D abziehet; So iſt A—C=B+p—D (§. 87.). Es iſt alſo B+p—D>B—D, weil der Gröſe B—D der Teil p fehlt (§. 32.), nun iſt aber A—C=B+p—D, und daher iſt auch A—C>B—D (§. 25.).

§. 89.

Wenn gleiche Gröſen mit gleichen Gröſen

multi=

multiplicirt werden; So ſind die Producte, die heraus kommen, einander gleich (§. 21. und 78.).

Beweis.

Es ſeie 1) A=B (§. 22.), und 2) C=D (§. 22.), und C werde in A, die Gröſe D aber in B multiplicirt; So iſt AC=BD (§. 79.), und dieſes beweiſen wir alſo: AC=AC (§. 27.), es iſt aber A=B (N. 1.), und darum iſt auch AC=BC (§. 25.), nun iſt aber auch C=D (N. 2.), und daher iſt auch AC=BD (§. 25.).

§. 90.

Wenn ungleiche Gröſen mit gleichen Gröſen multiplicirt werden; So ſind die Producte, welche heraus kommen, ungleich (§. 21. und 78.).

Beweis.

Wir nehmen an, es ſeye A>B (§. 33.), und C=D (§. 22.), die Gröſe A aber ſoll mit C, und die Gröſe B mit D multiplicirt werden, und alsdann AC>BD ſein (§. 79.). Wir beweiſen dieſes ſo: Iſt A gröſer als B; ſo faſt A die Gröſe B ganz in ſich, und es bleibt noch ein Teil übrig, den wir p nennen wollen (§. 32.). Es iſt alſo A=B ∔ p (§. 75.): Multiplicirt man nun A mit C, und B ∔ p mit D; So iſt AC=(B ∔ p) D (§. 79. und 89.) Dieſem nach iſt (B ∔ p) D>BD, weil der Gröſe B der Teil p fehlt (§. 32.), nun iſt aber (B ∔ p) D=AC, und daher iſt auch AC>BD (§. 25.).

§. 91.

Wenn man gleiche Gröſen durch gleiche Gröſen dividirt; So ſind die Quotienten, die heraus kommen, einander gleich (§. 21. und 80.).

Beweis.

Es ſeie 1) A=B (§. 22.), und 2) C=D, und es werde A durch C, und B durch D dividirt; So ben wir zu erweiſen, daß A:C=B:D (§. 81.), und dieſes geſchiehet alſo: A:C=A:C (§. 27.), nun iſt aber A=B (N. 1.), und daher iſt auch A:C=B:C (§. 25.), es iſt aber auch ferner C=D (N. 2.), und derohalben iſt A:C=B:D.

§. 92.

Wenn ungleiche Gröſen durch gleiche dividirt werden; So ſind die Quotienten, welche heraus kommen, ungleich (§. 21. und 80.).

Beweis.

Wir nehmen an, es ſeie A>B (§. 33.), und C=D (§. 22.), und A werde durch C, die Gröſe B aber durch D dividirt; So haben wir zu erweiſen, daß A:C>B:D (§. 81.). Unſer Beweis iſt dieſer: Wenn A gröſer iſt, als wie B: So iſt in A die Gröſe B ganz begriffen, und es bleibt noch ein Teil übrig, den wir p nennen wollen (§. 32.). Demnach iſt A=B+p (§. 75.). Dividirt man nun A mit C, und B+p mit D; So iſt A:C=(B+p):D (§. 91.).

Es

Es iſt alſo $(B \div p) : D > B : D$, weil der Gröſe B der Teil p fehlt (§. 32.), nun iſt aber $(B \div p) : D = A : C$, und daher iſt auch $A : C > B : D$ (§. 25.). Jezt wollen wir zeigen, wie man die vier Rechnungsarten ausüben ſoll.

§. 93.

Ungenante Zahlen zu addiren (§. 60. und 74.).

Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Ziffern von den Zahlen, die man addiren ſoll (§. 61.), weil ſich keine Gröſen addiren laſſen, die nicht aus Gröſen von einerlei Art beſtehen (§. 83.), dergeſtalt unter einander, daß die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner, die Hunderte unter die Hunderte, die Tauſende unter die Tauſende, und ſo weiter, und alſo Ziffern von einerlei Namen unter einander, und ſo zu ſtehen kommen, wie es die §. 66. gegebene Tafel erfordert.

2) Unter die ſolchergeſtalt unter einander geſchriebenen Zahlen mache man einen Querſtrichen, damit man die Zahl, die gefunden werden ſoll, von den gegebenen unterſcheiden, und alſo alle Verwirrung vermeiden könne.

3) Man zähle von der rechten nach der linken Hand zu in der erſten Reihe, die über einander ſtehenden Einheiten zuſammen, und ſchreibe die Zahl, welche ſie ausmachen, durch eine von den neun Ziffern unter

dieſe Reihe und unter den Strich (§. 61.). Wenn es nun bei dieſem Zuſammenzählen der Einheiten in dieſer Reihe geſchiehet, daß dieſe Einheiten mehr, als wie Neun ausmachen: So bemerke man, wie oft man Zehn gezählt hat, und ſchreibe nur die Zahl, die über ſo vielmal Zehn gezählet worden, und nur Einer ausmachet, durch die eben gedachten Ziffern unter dieſe Reihe, weil man nur bis auf Zehn zählet, und die Zehner ſchon zu der folgenden Reihe gehören (§. 51. 52. 53. und 66.).

4) So oft nun, als man in der erſten Reihe Zehn gezählet hat, ſo oft zähle man zu der zweiten Reihe eine Einheit, und zähle auch in dieſer Reihe die Einheiten zuſammen, aber auch hier bemerke man, wie oft man Zehn gezählet hat, weil zehen Zehner ſchon Hunderte machen, und zur folgenden Reihe gehören (§. 53. und 66.), die Zahl nun, welche über ſo vielmal Zehn gezählet worden, und nur Zehner ausmachet, ſchreibe man unter dieſe Reihe, ſo oft aber als man Zehn in dieſer Reihe gezählet hat, ſo oft zähle man auch eine Einheit zur folgenden Reihe. So nun verfahre man

5) durch alle Reihen, und ſchreibe bei der lezten Reihe alle Zehner von dieſer Reihe nach der linken Hand zu in die Summe. Wenn es bei dieſem Zuſammenzählen der Reihen geſchiehet, daß in einer Reihe nur Nulle, oder über eine gewiſſe Zahl Zehner gar keine

Einer

Einer befindlich ſind; So ſezze man unter den Strich, und unter dieſe Reihe eine Null, damit die folgenden Ziffern ihre Stellen, und die Bedeutung behalten, die ſie haben ſollen (§. 62. 63. 64. 65. und 66.).

Beweis.

Wenn man nach den gegebenen Regeln verfähret, und alle einzelne Zahlen von einer Art zuſammen zählet; So enthält die gefundene Zahl alle Einer, alle Zehner, alle Hunderte, alle Tauſende, und ſo weiter von den ſummirenden Zahlen. Die Summe, und die ſummirenden Zahlen enthalten alſo einerlei Anzahl von Einheiten, und derohalben ſind ſie einander gleich (§. 21.): Findet man aber aus bekanten Gröſen eine Gröſe, die den gegebenen zuſammen genommen gleich iſt; So addirt man (§. 74.), und derohalben werden auch durch die gegebenen Regeln ungenante Zahlen addiret. Wenn man alſo die folgenden Zahlen addiren ſoll

58905
89002
19101

So iſt die Summe 167008

Hierbei nun zähle man von der rechten nach der linken Hand zu in der erſten Reihe alſo: 1 und 2 iſt 3 und 5 macht 8, und dieſe 8 ſchreibe man unter dieſe Reihe unter den Strichen, in die zweite Reihe ſchreibe man eine Null, bei der dritten Reihe ſage man 1

und 9 macht Zehn, und alſo hat man einen Zehner, eine Null ſezze man daher unter dieſe Reihe, einen Zehner, oder Eins hingegen zähle man zur vierten Reihe, und ſage bei dieſer 1 und 9 macht 10, und 9 macht 19, und 8 macht 27, und alſo hat man zwey Zehner und Sieben, Sieben nun ſchreibe man unter dieſe Reihe, zwei Zehner, oder Zwei aber zähle man zur fünften Reihe, und ſage 2 und 1 macht 3, und 8 macht 11 und 5 macht 16, hiervon nun ſchreibe man 6 unter die fünfte Reihe, 1 aber weiter nach der linken Hand zu, und ſo bekomt man die Summe von 58, 905, von 89, 002, und von 19, 101, welche 167, 008 ausmacht.

§. 94.

Wenn man eine Probe, oder einen Verſuch machen will, ob in einem vorgehabten Fall richtig gerechnet worden; So addire man eine Zahl, die man nach Gefallen annehmen kan, zu den ſummirenden Zahlen, eben die Zahl aber addire man auch zu der Summe: Wenn nun in beiden Fällen die Summen, die heraus kommen, einander gleich ſind; So iſt auch richtig gerechnet worden. Denn da die zu ſummirende Zahlen zuſammen genommen der Summe gleich ſind (§. 74.); So hat man zu zwei gleichen Zahlen gleiches addirt, und darum müſſen auch, wenn richtig gerechnet worden, in beiden Fällen einerlei

Sum-

Summen heraus kommen (§. 85.). Wenn man zum Beiſpiel addirt

die Zahl	56905
und	9876
So iſt die Summe	66781

Addirt man nun zu den ſummirenden Zahlen	56905
und	9876
die Zahl	532
So iſt die Summe	67313

Und addirt man zu der erſten Summe	66781
eben die Zahl	532
So iſt auch hierbei die Summe	67313

und alſo richtig gerechnet worden.

§. 95.

Man kan auch darburch einen Verſuch machen, ob man richtig gerechnet hat, wenn man die zu ſummirenden Zahlen einmal von unten hinauf, und das anderemal von oben herunter zuſammen zählet.

§. 96.

Genante Zahlen zu addiren (§. 60. und 74.).

Aufloͤſung.

1) Weil ſich keine Groͤſen addiren laſſen, die nicht aus Groͤſen von einerlei Art beſtehen (§. 83.); So

ſezze

ſezze man ſtets die Ziffern, welche Zahlen von Dingen von einerlei Art bedeuten (§. 60.), unter einander, und zwar ſo, daß bei einer ieden Art Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, und ſo weiter zu ſtehen kommen, unter dieſe Ziffern aber mache man einen Querſtrichen.

2) Die Ziffern, welche Zahlen von einerlei Art bedeuten, zähle man auf eben die Art, wie bei den ungenanten Zahlen zuſammen (§. 93. N. 3.). Weil aber

3) in genanten Zahlen eine gewiſſe Anzahl von den Dingen in der kleineren Art eine Einheit in den Dingen von der gröſeren Art ausmachen (§. 60.): So nehme man in den zuſammen gezählten Dingen von der kleinern Art ſtets ſo viele Einheiten weg, als wie viel derer eine Einheit in den Dingen von der gröſern Art ausmachen, ſo oft aber als man eine ſolche Anzahl von Einheiten weggenommen hat, ſo oft auch zähle man eine Einheit zu den Dingen in der folgenden gröſeren Art, und ſezze nur den Ueberſchuß über ſo viele Anzahlen von Einheiten in der kleineren Art, in den Ort der Dinge von der kleinern Art. Wenn hingegen nichts übrig bleibt: So mache man in den Ort der kleineren Dinge unter den Querſtrichen, nur zwei kleine Strichlein, damit man anzeige, daß keine Dinge von der kleinern Art übrig bleiben.

Wenn

Wenn man alſo addiren ſoll

	Gulden		Weispf.		Heller
	292	—	20	—	7
	373	—	20	—	8
	245	—	29	—	1
So iſt die Summe:	912	—	11	—	„

und hierbei verfahre man alſo. Man ſage nemlich bei den Hellern 1 und 8 macht 9, und 7 macht 16: Weil nun 8 Heller einen Weispfennig ausmachen; So zähle man zwei Weispfennige zu der folgenden Art, und zähle nunmehr die Weispfennige zuſammen, die 71 ausmachen: Weil nun auch 30 Weispfennige einen Gulden machen, und ſechzig zweimal dreiſig macht; So zähle man zwei zu den Gulden, die Zahl Eilf aber, welche über 60 in 71 enthalten iſt, ſchreibe man unter die Weispfennige, und addire zulezt die Gulden, wie ungenante Zahlen (§. 93.); So bekomt man 912 Gulden und 11 Weispfennige.

Wir wollen noch ein anderes Exempel vor uns nehmen, zuvor aber bemerken, daß ein Lachter, welches in unſern Gegenden ſieben frankfurter, oder ſieben hanauer Schuh lang iſt, in 8 Teile, die Achtel heiſen, ein Achtel aber in zehn Teile geteilet iſt, die Zolle genent werden. Wenn man dieſemnach addiren ſoll

Lachter		Achtel		Zoll
5	—	7	—	9
12	—	5	—	4
13	—	2	—	3
1	—	1	—	5
15	—	6	—	1
So iſt die Summe: 48	—	7	—	2.

Die Probe, ob man recht gerechnet habe, macht man wie bei ungenanten Zahlen (§. 94. und 95.).

§. 97.

Ungenante Zahlen von einander zu ſubtrahiren (§. 60. und 76.).

Aufloſung.

1) Weil ſich keine Gröſen von einander ſubtrahiren laſſen, die nicht aus Gröſen von einerlei Art beſtehen (§. 84.): So ſchreibe man die kleinere Zahl dergeſtalt unter die gröſere, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte, und ſo weiter, und alſo Ziffern von einerlei Namen unter einander, und ſo zu ſtehen kommen, wie es die §. 66. gegebene Tafel erfordert, unter dieſe Zahlen aber mache man einen Querſtrichen, um die zu findende Zahl von den gegebenen zu unterſcheiden.

2) Man nehme nach und nach von der rechten nach der linken Hand zu die Einer, Zehner, Hunderte, und ſo weitere Zahlen der kleineren Zahl von den

Einern, Zehnern, Hunderten, und ſo weiteren Zahlen der gröſeren Zahl weg, man ſezze aber bei einer ieden Zahl, die Zahl, welche übrig bleibt, unter den gemachten Querſtrichen, in die ihr zugehörige Stelle: Und wenn bei einer Zahl, wovon die untere weggenommen worden, nichts übrig bleibt, oder in der Zahl, die man abziehen ſoll, eine Null befindlich, oder in einer Stelle am Ende der abzuziehenden Zahl von der oberen Ziffer nichts mehr abzuziehen iſt; So ſezze man im erſten Fall in dieſe Stelle unter den Strichen eine Null, damit die Ziffern ihre Bedeutung behalten (§. 66.), im andern und dritten aber ſchreibe man die Ziffern, wovon nichts abzuziehen iſt, unter den Strichen in die ihnen zugehörige Stellen.

3) Geſchiehet es hierbei, daß eine gröſere Zahl von einer kleineren weggenommen werden ſoll: So nehme man aus der nach der linken Hand folgenden Stelle eine Einheit weg, und ſezze ſolche zu der Zahl in der vorhergehenden Stelle, wovon man abziehen ſoll, man zähle nemlich, weil man ſtets nur bis auf Zehn zählet, und eine Zehn in der vorhergehenden Stelle von der rechten nach der linken Hand zu in der nächſtfolgenden eine Einheit ausmachet, zu der Stelle, wovon man abziehen ſoll (§. 51. 52. und 66.) Zehn, und ziehe alsdann die Zahl ab, die vorher zu gros ware, über die Zahl aber, wovon man eine Einheit weggenommen hat, mache man einen Punkt,

um anzudeuten, daß ſie um Eins vermindert worden iſt, und man nun von einer Zahl abziehen muß, die Eins weniger iſt. Trägt es ſich auch

4) zu, daß in der Zahl, wovon man eine andere abziehen ſoll, in ein, oder etlichen Stellen Nulle befindlich ſind; So gehe man bei dieſer Zahl ſo weit gegen die linke Hand fort, bis man eine Zahl antrift, von dieſer nun, worüber man einen Punkt macht, nehme man Eins zu der erſt folgenden Nulle nach der rechten, ſo hat man in dieſer Stelle Zehn (N. 3.), von dieſen Zehn nehme man, wenn mehrere Nulle da ſind, wieder Eins weg zu der folgenden Stelle nach der rechten Hand zu, ſo hat man in dieſer Stelle auch Zehn, die erſt vorhergehende aber um Eins vermindert, und alſo in dieſer nur noch Neun, auf dieſe Art nun gehe man ſo lang von der linken nach der rechten Hand zu fort, bis man an die Ziffer komt, wovon man abziehen ſoll, und iezt ziehe man wieder wie zuvor ab.

Beweis.

Wenn man nach den angegebenen Regeln ſubtrahirt: So enthält die gefundene Zahl den Ueberſchuß von allen Einern, Zehnern, Hunderten und ſo weiteren Ziffern, welcher über die bekante kleinere in der bekanten gröſeren Zahl begriffen iſt. Man kan alſo die gefundene, und die bekante kleinere Zahl als die Teile von der bekanten gröſeren Zahl, folglich die-

ſe als das Ganze von ienen Zahlen, dieſe Zahlen aber als die Teile anſehen. Nun ſind aber die Teile zuſammen genommen dem Ganzen gleich (§. 30), und daher ſind auch die gefundene Zahl, und die bekante kleinere Zahl der bekanten gröſeren Zahl gleich, findet man aber aus zwei bekanten Gröſen eine Gröſe, die mit der kleinſten von den bekanten Gröſen zuſammen genommen der gröſten von den bekanten gleich iſt; So ſagt man, daßman ſubtrahire (§. 76.), und derohalben wird auch durch die gegebenen Regeln eine Zahl von der andern abgezogen.

Soll man dieſemnach die folgende Zahlen von einander abziehen

$$\begin{array}{r} 502040300056 \\ 31750231247 \\ \hline \end{array}$$

So iſt die Differenz: 470290068809,

und hierbei verfährt man alſo: Weil 7 von 6 nicht abgezogen werden kan; So nimt man Eins von 5, und bemerkt dieſes mit einem Punkt, ſo hat man 16, alsbald aber nimt man 7 von 16 ab, und ſchreibt den Ueberſchuß 9 unter den Strichen, und in die Stelle, worinnen man abgezogen hat. Jezt nimt man vier von vier weg, weil bei 5 eins genommen worden: Und weil nichts übrig bleibt; So ſchreibt man eine Null in dieſe Stelle. Da 2 von 0 nicht abgezogen werden kan; So gehet man bis zu 3 fort,

und nimt hiervon Eins, das man mit einem Punkt bemerkt: So hat man nach der 4 Regel in den Stellen aller Nulle bis zu der, wovon man abziehen ſoll, lauter Neune, in dieſer aber Zehn, weil nichts davon weggenommen worden. Nunmehr nimt man 2 von 10 weg, und ſchreibt 8 unter den Strichen, ferner nimt man 1 von 9 weg, und ſezzet wieder 8 unter den Strichen, auch nimt man 3 von 9 weg, und ſchreibet 6 unter den Strichen. Weil nun von 3 Eins weggenommen worden, 2 von 2 weggenommen, nichts übrig läſt: So ſchreibet man ferner eine Null, und auch da, wo Null von Null weggenommen werden ſoll, eine Null unter den Strichen. Da ſich 5 von 4 nicht abziehen läſt; So nimt man von 2, das man mit einem Punkt bemerkt Eins zu Null nach der rechten Hand zu: So hat man hier Zehn, von dieſen Zehn aber nimt man Eins zu 4, ſo hat man bei Null noch 9, bei 4 aber Vierzehn, man ziehet alſo iezt 5 von 14 ab, und ſchreibet 9 in die Differenz, man nimt ferner 7 von 9 weg, und ſchreibet 2 in die Differenz, iezt nimt man aber auch, weil von 2 Eins weggenommen worden, 1 von 1 weg, und ſchreibet 0 in die Differenz. Da ſich nun auch 3 von Null nicht abziehen läſt: So nimt man Eins von Fünf, und bemerket dieſes mit einem Punkt, ſo hat man bei Null 10, hiervon alſo nimt man 3 weg, und ſezzet 7 in die Differenz, endlich ſchreibet man 4 in den Reſt, weil von 5 nichts abgezogen werden ſoll,

von

von 5 aber ſchon Eins zu Null in der vorhergehenden Stelle genommen worden.

§. 98.

Da die kleinſte von den bekanten Zahlen, und der Unterſcheid zuſammen genommen der gröſten von den bekanten Zahlen gleich ſein muß (§. 76.): So kan man auch leicht eine Probe anſtellen, ob richtig gerechnet worden, wenn man die kleinſte von den bekanten Zahlen, und die Differenz zuſammen addiret, und darauf merket, ob ihre Summe der gröſten von den bekanten Zahlen gleich iſt. Iſt dieſes; So iſt iſt richtig gerechnet worden: Wo nicht; So hat man gefehlet.

Wenn man zum Beiſpiel

von der Zahl	82030057
die Zahl abziehet	21510263
So iſt die Differenz:	60519794
Addirt man nun die kleinſte	
bekante Zahl	21510263
und die Differenz	60519794
So iſt die Summe:	82030057,

und alſo, da dieſe Summe der gröſten bekanten Zahl gleich iſt, richtig gerechnet worden.

Hieraus iſt auch zugleich klar, daß die Addition dasienige zuſammenſezt, was die Subtraction auf-

gelöſt hat, und daß die Subtraction dasienige aufſöſet, was die Addition zuſammen ſezzet.

§. 99.

Genante Zahlen von einander zu ſubtrahiren (§. 60. und 76.).

Auflöſung.

1) Man ſchreibe die Zahlen von einerlei Art unter einander, weil ſich keine Gröſen von einander abziehen laſſen, die nicht aus Gröſen von einerlei Art beſtehen (§. 84.), und mache unter ſie einen Querſtrichen.

2) Die Ziffern, welche Dinge von einerlei Art bedeuten, ziehe man von der rechten nach der linken Hand zu eben ſo von einander ab, wie bei ungenanten Zahlen (§. 97.): Und wenn es hierbei geſchiehet, daß die Zahlen von einer kleinern Art, die man abziehen will, gröſer ſind, als die, wovon man ſie abziehen ſoll, oder über den abzuziehenden Zahlen von einer Art gar keine Zahlen von dieſer Art ſtehen; So nehme man eine Einheit aus den von der rechten nach der linken Hand zuerſt folgenden Dingen von der gröſern Art, und bemerke dieſes mit einem Punkt, ſo viele Einheiten in der kleinern Art aber dieſe Einheit von der gröſern Art ausmacht, ſo viele Einheiten zähle man auch zu den Dingen von der kleinern Art, worinnen man abziehen ſoll, und verrichte alsdann

die

die Subtraction, wie gewöhnlich. Geſchiehet es auch

3) bei den Dingen von einer kleinern Art, die man von einer kleinern Zahl in ihrer Art, oder von nichts in dieſer Art abziehen ſoll, daß in den nächſt-folgenden Dingen von der gröſeren Art von der rechten nach der linken Hand zu keine Zahlen ſind: So gehe man ſo weit gegen die linke Hand fort, bis man Zahlen von einer gröſern Art antrift, von dieſer nun nehme man eine Einheit weg, das man mit einem Punkt bemerkt, und zähle ſo viele Einheiten in die zuerſt nach der rechten Hand zu folgende Dinge von einer kleinern Art, worinnen keine Zahlen ſind, als Dinge von dieſer Art in der gröſern eine Einheit ausmachen, von dieſen Einheiten aber nehme man wieder eine Einheit weg, das man eben wol mit einem Punkt bemerkt, zu den wieder nach der rechten Hand zu folgenden Dingen von einer kleinern Art, aber auch zu dieſen Dingen zähle man ſo viele Einheiten als Einheiten in dieſer kleinern Art in der zuerſt gröſern ein Ganzes ausmachen, und ſo gehe man ſtets fort, bis man zu den kleinern Dingen komt, wovon man abziehen ſoll, und verrichte alsdann die Subtraction, wie gewöhnlich, da aber, wo bei den kleinern Dingen nichts übrig bleibt, da mache man in ihre Stelle zwei kleine Querſtrichen.

Soll man zum Beiſpiel

	Gulden		Weispf.		Heller
von	25	—	16	—	5
abziehen	21	—	18	—	4
So iſt der Unterſcheid:	3	—	28	—	1,

und hierbei rechnet man alſo: Man ſagt nemlich 4 von 5 bleibt 1 Heller, dieſen ſchreibt man in die Stelle der Heller. Weil ſich aber 18 von 16 Weispfennigen nicht abziehen laſſen: So nimt man von 5 Gulden Eins, und zählet, weil 1 Gulden 30 Weispfennige macht, zu 16 noch 30 Weispfennige, ſo bekomt man 46 Weispfennige, von dieſen nun ziehet man, wie gewöhnlich, 18 Weispfennige ab, ſo bleiben 28 Weispfennige übrig, und dieſe ſchreibet man unter den Strich, und unter die Weispfennige. Endlich ziehet man, wie gewöhnlich, 21 Gulden von 24 Gulden ab, weil ſchon Eins von den Gulden weggenommen worden: So bekomt man 3 Gulden, die man in die Differenz ſchreibet, und alſo die ganze Differenz 3 Gulden 28 Weispfennige 1 Heller.

Wir wollen die angegebenen Regeln durch noch einige andere Exempel erläutern.

Soll man

	Lachter		Achtel		Zoll
von	18	—		—	6 (§. 96.)
abziehen	13	—	5	—	7
So iſt die Differenz:	4	—	2	—	9.

Oder

Oder ſoll man

	Lachter		Achtel		Zoll	
von	25	—	3		—	(§. 96.)
abziehen	2	—	1		5	
So iſt die Differenz:	23	—	1		5.	

Oder ſoll man

	Lachter		Achtel		Zoll	
von	203	—	/	—	/	(§. 96.)
abziehen	95	—	6	—	9	
So iſt der Unterſcheid:	107	—	1	—	1.	

Ferner ſoll man

	Lachter		Achtel		Zoll	
von	328	—	/	—	/	(§. 96.).
abziehen	215	—	7	—	8	
So iſt der Unterſcheid:	112	—	/	—	2.	

Die Probe, ob man richtig gerechnet habe, macht man wie bei den ungenanten Zahlen (§. 98.), man addirt nemlich die kleinſte Zahl und den Reſt, und ſiehet, ob ihre Summe der gröſeren gegebenen Zahl gleich iſt (§. 96.).

§. 100.

Wenn man multipliciret: So ſoll man eine Zahl etliche mal zu ſich ſelbſt addiren, und daraus eine Zahl finden, in welcher die eine von den bekanten

Zahlen

Zahlen ſo oft begriffen iſt, als die andere Einheiten hat (§. 78.). Man muß alſo bei den einfachen Ziffern (§. 61.) geſchwind wiſſen, wie viel die Summe, oder das Product ausmacht, wenn man eine Ziffer ſo oft nimt, als die andere Einheiten hat. Wir wollen in dieſer Abſicht die nachfolgende Aufgabe auflöſen, ehe wir zeigen, wie man multipliciren ſoll.

§. 101.

Das Einmaleins, oder ein Täfelgen zu finden, worinnen alle Producte enthalten ſind, die heraus kommen, wenn man die einfache Zeichen von 1 bis 9 in einander multipliciret.

Auflöſung.

1) Man teile eine jede Seite eines auf allen Seiten gleich groſen Vierecks in neun gleiche Teile, und ziehe durch alle Teilungspunkten bis zu den gerad gegen über ſtehenden gerade Linien, und teile alſo das Viereck in lauter kleine Gefache ab.

2) Man ſchreibe in die oberſte von der linken nach der rechten Hand zu gerade fortgehende Reihe die Ziffern von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung (§. 61.).

3) Man addire zu 1 die Ziffer 1: So bekomt man das zweifache, nemlich 2, und dieſes ſchreibe man in das erſte Gefach unter 1. Man addire zu 2 wieder 1: So bekomt man das dreifache, nemlich

3, und

3, und dieſes ſchreibe man in das Gefach unter 2. So nun fahre man in dieſer Reihe, indem man ſtets 1 zu dem vielfachen addiret, bis auf das Neunfache fort, ſo bekomt man das Vier- Fünf- Sechs- Sieben- Acht- und Neunfache (§. 36.). Wenn man nun

4) auf eben die Art bei den Ziffern, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und 9 verfähret: So bekomt man das verlangte Einmaleins, worinnen ſich ein jedes Produkt aus zwei Ziffern zweimal unter dem Gefache des einen, und neben dem Gefache des andern Factors befindet (§. 78.). So iſt zum Beiſpiel das Produkt 8 unter dem Gefache des Factors 4 der obern Reihe, und neben dem Gefache des Factors 2, in der Seitenreihe, eben ſo befindet ſich aber auch 8 unter dem Gefache des Factors 2 der obern Reihe, und neben dem Gefache des Factors 4 in der Seitenreihe. Unſer Täfelgen iſt alſo dieſen Regeln nach folgendes.

Facto-

Factores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Factores (left side) — Facta (right side)

Man nent dieſes Täfelgen von dem Pytagoras den pytagoriſchen Rechentiſch.

§. 102.

Eine ungenante Zahl mit einer andern ungenanten Zahl zu multipliciren (§. 60. und 78.).

Auflöſung.

1) Weil die Multiplication eine wiederhohlte Addition iſt (§. 82.), und ſich keine Gröſen zu einander addiren laſſen, die nicht aus Gröſen von einerlei Art beſtehen (§. 83.): So ſchreibe man den Multiplicator dergeſtalt unter das Multiplicandum (§. 78.), daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, und ſo die weiteren Ziffern von einerlei Namen unter einander zu ſtehen kommen, unter dieſe Zahlen aber mache man einen Querſtrichen.

2) Unter

2) Unter dieſen Strichen ſchreibe man von der rechten nach der linken Hand zu durch Hůlfe des Einmaleins (§. 101.) vor erſt alle Produkte aus der erſten Ziffer des Multiplicators in eine iede Ziffer des Multiplicandi, doch ſo, daß man die Zehner von einem Produkte, weil man ſtets nur bis auf Zehn zählet (§. 51. 52. 53. und 66.), zu dem zuerſt folgenden Produkt zählet. So wie man

3) mit der erſten Ziffer des Multiplicators verfahren hat: So gehe man auch bei den folgenden zu Werk, man ſchreibe aber das neue Produkt unter das vorhergehende, und zwar fange man es in der Stelle von der rechten nach der linken Hand zu zu ſchreiben an, wo die Ziffer des Multiplicators ſtehet, mit welcher man iezt multiplicirt, damit dieſes Produkt in die ihm zugehörige Stelle zu ſtehen komt, und alſo ſeine wahre Bedeutung erhält (§. 66.). So

4) nun růkke man ein iedes Produkt um eine Stelle weiter fort, und weil eine Null im Multiplicando, die zwiſchen zwei Ziffern ſtehet, nicht vervielfältiget; So ſezze man davor in dem Produkt eine Nulle in ihre Stelle. Wenn hingegen eine, oder mehrere Nullen in dem Multiplicator zwiſchen zwei Ziffern ſtehen: So gehe man bis zu einer andern Ziffer des Multiplicators nach der linken Hand zu fort, und růkke die erſte Ziffer von dem Produkt

das

das man iezt bekomt, unter dieſe Ziffer. Wenn endlich hinten

5) an dem Multiplicando, oder dem Multiplicator, oder an beiden zugleich Nulle ſtehen: So hänge man im erſten Fall ſo viele Nulle an das Produkt, als das Multiplicandum, oder der Multiplicator hat, im andern aber ſchreibe man hinten an das Produkt alle die Nulle, die dem Multiplicando, und dem Multiplicator anhängen. Endlich

6) addire man die durch die 2 und 3 Regel gefundenen einzelnen Producte zuſammen (§. 93.): So iſt die Summe das Produkt von den in einander zu multiplicirenden Zahlen.

Beweis.

Wenn man nach den gegebenen Regeln zu Werke gehet: So nimt, oder addirt man eine iede Ziffer des Multiplicandi, oder der einen bekanten Zahl, ſo oft, als iede Ziffer des Multiplicators, oder der andern bekanten Zahl Einheiten in ſich begreift, und daher iſt die eine bekante Zahl ſo oft in der gefundenen enthalten, als die andere Einheiten hat, findet man aber aus bekanten Gröſen, eine Gröſe, in welcher die eine ſo oft begriffen iſt, als die andere Einheiten hat, ſo ſagt man, daß man multiplicire (§. 78.), und daher werden auch durch die angegebenen Regeln zwei Zahlen in einander multiplicirt.

Wenn

Wenn man alſo die folgenden Zahlen multipliciren ſoll:

5326
35
26630
15978

So iſt das Product 186410.

Hierbei nun rechnet man von der erſten Zahl des Multiplicators, nach der linken Hand zu dergeſtalt, man ſagt nemlich 5 mal 6 macht 30, und ſezt eine Null unter die Zahl 6 des Multiplicandi, 3 Zehner aber zählet man zum folgenden Product, und ſagt 2 mal 5 macht 10, und die vorige 3 dazu macht 13, 3 nun ſchreibt man unter 2, 1 Zehner aber zählt man wieder zum folgenden Product, und ſagt 3 mal 5 macht 15, und 1 dazu macht 16, 6 ſchreibt man daher unter 3, und zählt einen Zehner zu dem wieder folgenden Product, endlich ſagt man 5 mal 5 macht 25 und 1 dazu macht 26, von dieſem Product nun ſchreibt man 6 unter 5, 2 aber weiter nach der linken Hand zu. Bei der zweiten Zahl des Multiplicators ſagt man nunmehr 3 mal 6 iſt 18, und ſchreibt 8 unter die Zahl 3 des erſten Products, 1 Zehner, oder Eins aber zählt man zu dem folgenden Product, und ſagt 2 mal 3 iſt 6, und 1 dazu iſt 7, dieſe 7 nun ſchreibt man unter die 6 des

erſten Products, man ſagt ferner 3 mal 3 macht 9, und ſchreibt die 9 wieder um eine Stelle weiter fort, zuletzt ſagt man 3 mal 5 macht 15, und ſchreibt 5 unter die 2 des erſten Products, 1 aber ſchreibt man um eine Stelle weiter fort nach der linken Hand. Endlich addirt man die einzelnen Producte von den Ziffern des Multiplicators in die Ziffern des Multiplicandi, und alſo 26,630, und 15,978, aber ſo, wie ſie über einander ſtehen, wie gewöhnlich, zuſammen: So bekomt man das ganze Product 186, 410. Um der vierten und fünften Regel willen wollen wir noch einige Exempel anhängen.

Wenn im Multiplicando Nulle ſind

50604
12
101208
50604
607248

Wenn im Multiplicator Nulle ſind

5634
302
11268
16902
1701468

Wenn

Wenn am Multiplicando Nulle hängen

6700
3
20100

Wenn am Multiplicator Nulle hängen

875
200
175000

Wenn am Multiplicando, und dem Multiplicator Nulle hängen

3500
30
105000

§. 103.

Weil man das Multiplicandum ſo oft nimt, als der Multiplicator Einheiten hat (§. 78.), und die Multiplication eine wiederholte Addition iſt (§. 82.): So iſt es auch einerlei, ob man das Multiplicandum ſo vielmal nimt, als der Multiplicator Einheiten hat, oder ob man das Multiplicandum ſo oft zu ſich ſelbſt addirt, als eben dieſer Multiplicator Einheiten in ſich faſt. Man kan daher auch dadurch eine Probe machen, ob man recht gerechnet habe, wenn man das Multiplicandum ſo

oft einzeln ſchreibt, als der Multiplicator Einheiten hat, und zu dieſen Zahlen ſowol, als zu ihrer Summe eine dritte Zahl addiret: Kommen nun hierbei einerlei Summen heraus; So iſt auch recht gerechnet worden.

Wenn man zum Beiſpiel die Zahl	8425
multiplicirt mit	3
So iſt das Product	25275
Und wenn man die Zahl	8425
dreimal addirt	8425
	8425
So iſt die Summe ebenwol	25275
Addirt man nun	8425
zu	8425
	8425
die Zahl	36
So iſt die Summe	25311
Und wenn man zu	25275
ebenfals addirt	36

So iſt auch hier die Summe: 25311, und alſo richtig gerechnet worden. Dieſe Probe iſt inzwiſchen ſehr weitläuftig, und daher iſt es beſſer gethan, wenn man die geſchehene Multiplication nur wiederholt.

§. 104.

Genante Zahlen zu multipliciren (§. 60. und 78.).

Auf=

Auflöſung.

Wenn man genante Zahlen multipliciren ſoll: So ſoll man dieſe Zahl etlichemal, und ſo vielmal nehmen, als eine andere ungenante Zahl Einheiten hat. Es beſtehet alſo die ganze Auflöſung darinnen, daß man von der rechten nach der linken Hand zu alle Multiplicanda, welche aus Dingen von einerlei Art beſtehen, wie gewöhnlich durch den Multiplicator multiplicirt, in dem Product bei den Dingen von der kleinern Art aber ſo oft die Anzahl von Einheiten, die in der gröſeren Art eine Einheit ausmachen, wegläſt, als man kan, und nur den Ueberſchuß über ſo viele Einheiten in dieſes Product ſchreibt, in dem Fall aber zwei kleine Strichen in die Stelle der Dinge von einerlei Art ſezt, wenn kein Ueberſchuß da iſt, ſo oft hingegen eine Einheit zu dem Produkt der folgenden gröſeren Dinge zählet, als man die Anzahl der Einheiten von den Dingen der kleinern Art, die in der gröſeren ein Ganzes ausmachen, in dem Product der kleinern Dinge weggelaſſen hat.

Wenn man zum Beiſpiel

	Gulden		Weispf.		Heller
	34	—	7	—	5
multipliciren ſoll mit					5
So iſt das Product	171	—	8	—	1

Hierbei nun rechnet man dergeſtalt. Man ſagt 5 mal 5 iſt 25, es machen aber 8 Heller einen Weispfennig aus, und daher ſind in 25 Hellern 3 Weispfennig und 1 Heller, 1 Heller ſchreibt man alſo unter die Heller, 3 Weispfennige aber zählt man zu den Weispfennigen, und rechnet nunmehr ſo, 5 mal 7 iſt 35, und 3 macht 38, weil aber 30 Weispfennige 1 Gulden machen, ſo rechnet man 1 Gulden zu den Gulden, und ſchreibt nur den Ueberſchuß der über 30 in 38 enthalten iſt, und alſo 8 unter die Weispfennige, endlich multiplicirt man bei den Gulden, wie gewöhnlich, und ſezt den 1 Gulden, welcher bei denen Weispfennigen heraus gekommen iſt, gleich bei dem erſten Product zu.

Wir wollen noch einige Beiſpiele beibringen. Soll man multipliciren

	Lachter		Achtel		Zoll
	5	—	6	—	6 (§. 96.)
mit					5
So iſt das Product	29	—	1	—	;

Oder ſoll man multipliciren

	Lachter		Achtel		Zoll
	3	—	;	—	6 (§. 96.)
mit					4
So iſt das Product	12	—	2	—	4

Die

Die Probe macht man wie bei ungenanten Zahlen (§. 103.), indem man nur die Multiplication wiederholt.

Wenn man wiſſen will, wie viel eine genante Zahl von gröſeren und kleineren Dingen in den Dingen von der kleinſten Art ausmachet: So multiplicirt man von der linken nach der rechten Hand zu die gröſeren Dinge ſtets mit der Anzahl der nächſt folgenden kleinern Dinge, die in den gröſeren ein Ganzes ausmachen, und ſezt zu dieſem Product die vorhandenen Dinge von dieſer kleinern Art. Soll man zum Beiſpiel 5 Lachter 6 Achtel und 6 Zoll in Zolle verwandeln; So geſchiehet gieſes alſo:

Lachter	Achtel	Zoll
5	6	6
8 Achtel —		
40	46	460
6	10 Zolle	6
46	460	646 Zoll

Wenn man alſo eine genante Zahl von Dingen in der gröſeren und kleineren Art mit einer ungenanten Zahl multipliciren ſoll: So kan man auch alſo verfahren. Man verwandelt nemlich die genante Zahl in Dinge von der kleinſten Art, und multiplicirt alsdann dieſe mit der ungenanten Zahl, in

dieſem Fall aber enthält das Product lauter Dinge von der kleinſten Art, die man durch die Diviſion, wovon wir §. 108. handeln, wieder zu Dingen von der gröſeren und der kleineren Art machen muß. Dieſe, die leztere Multiplication iſt weitläuftig, wir haben ſie inzwiſchen doch mit anführen wollen.

§. 105.

Eine ungenante Zahl durch eine kleinere ungenante Zahl zu dividiren (§. 60. und 80.).

Erſter Fall, wenn der Diviſor nur aus einer Ziffer, oder einem Zeichen beſtehet (§. 50. und 61.).

Erſte Auflöſung.

Wenn man über ſich dividiren ſoll.

1) Man ſezze den Diviſor unter die erſte Zahl des Dividendi zur linken Hand, worinn er ſich teilen läſt.

2) Man ſuche in dem Einmaleins (§. 101.) denienigen Factor auf, welcher in den Diviſor multiplicirt, der über ihm ſtehenden Zahl ganz, oder beinahe gleich iſt, und ſezze dieſen Factor hinter den an dem Dividendo gerade herunter gemachten Strichen, ſo hat man einen Teil von dem Quotienten.

3) Aus dem Einmaleins nehme man das Product, welches entſtehet, wenn man den ſo eben gefundenen Teil des Quotienten in deu Diviſor multiplicirt (§. 102.), dieſes Produkt aber, das man

ſich vorſtellet, als wenn es unter dem Diviſor ſtůnde, und zwar ſo, daß deſſen rechte Ziffer unter den Diviſor, die linke aber unter die folgende Ziffer zu ſtehen komme, ziehe man von den Zahlen, die man dividirt hat, ab (§. 97.), die dividirten Zahlen in dem Diviſor und Dividendo aber ſtreiche man, um alle Verwirrung zu vermeiden, aus, und ſchreibe den Ueberſchuß, wenn was ůbrig bleibt, ůber die ausgeſtrichenen Zahlen, und zwar in die Stellen, worinnen man abgezogen hat (§. 97.). Jezt

4) ſchreibe man den Diviſor um eine Stelle weiter nach der rechten Hand zu fort, und alſo unter die zuerſt folgende Ziffer, alsdann aber verfahre man mit dem ůbrig gebliebenen Reſt, wenn was ůbrig geblieben iſt, und der Zahl des Dividendi, worunter der Diviſor geſezt worden, eben ſo, wie bei der zweiten und dritten Regel gewieſen worden. Wenn man nun

5) den Diviſor ſtets um eine Stelle weiter, und ſo lange fort ſchreibt, bis man alle Zahlen des Dividendi dividirt hat: So bekomt man den ganzen Quotienten, und eine Zahl, welche anzeigt, wie oft die eine bekante Zahl in der andern bekanten Zahl begriffen iſt. Geſchiehet es inzwiſchen hierbei,

6) daß ſich der Diviſor nicht in die ůber ihm ſtehende Zahl teilen låſt, oder zwiſchen zwei Ziffern des Dividendi eine, oder etliche Nulle, und davor

keine Ziffern mehr ſtehen; So muß man den Diviſor ſo lang um eine Stelle von der linken nach der rechten Hand zu fortrükken, bis man unter eine Ziffer des Dividendi komt, worinnen er ſich teilen läſt, ſo oft aber, damit iede Ziffer des Quotienten in die ihr zugehörige Stelle komt, eine Null in den Quotienten ſezzen, als man den Diviſor um eine Stelle fortgerükt hat: Und wenn in dem Dividendo nach der rechten Hand zu, nachdem man den Diviſor ein und etliche mal in den Dividendum genommen hat, und nichts übrig geblieben iſt, lauter Nulle befindlich ſind; So rukke man zwar denſelben ſo oft fort, als noch Nulle in dem Dividendo befindlich ſind, ſo oft aber ſezze man auch eine Null in den Quotienten, als man den Diviſor fortgerukt hat, damit die Ziffern des Quotienten, welche anzeigen, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt, ihre rechte Stellen erhalten (§. 66.), und dieſemnach darf man in dieſem Fall nur ſo viele Nulle an den Quotient anhängen, als Nulle am Ende des Dividendi befindlich ſind. Trägt es ſich endlich

7) zu, daß ſich der Diviſor in die lezte Ziffer des Dividendi nicht ganz teilen läſt, und alſo ein Reſt übrig bleibt: So hänge man dieſen Reſt mit dem Diviſor durch das Zeichen der Diviſion, an den Quotienten (§. 81.), man ſezze nemlich die Ziffer des Dividendi, die ſich nicht teilen läſt, und übrig bleibt,

bleibt, über einen kleinen Querſtrichen hinter den Quotienten, unter dieſen Strichen aber den Diviſor.

Andere Auflöſung.

Wenn man unter ſich dividiren will.

1) Man ſezze den Diviſor unter die erſte Zahl des Dividendi zur linken Hand, worinnen er ſich teilen läſt.

2) Man ſuche in dem Einmaleins (§. 101.) denjenigen Factor auf, der in den Diviſor multiplicirt, der über ihm ſtehenden Zahl ganz, oder beinahe gleich iſt, und ſezze dieſen Factor hinter den Dividendum in die Stelle des Quotienten, ſo hat man einen Teil von dem Quotienten.

3) Unter den Diviſor mache man einen Querſtrichen, und ſezze unter denſelben das Product aus dem Quotienten in den Diviſor, aber dergeſtalt, daß ſtets die rechte Zahl des Products unter den Diviſor, und die linke unter die folgende Ziffer zur linken Hand zu ſtehen komt.

4) Man mache unter dieſes Product abermal einen Querſtrichen, und ziehe daſſelbe von den über ihm ſtehenden Zahlen des Dividendi ab, den Ueberſchuß aber ſchreibe man unter dieſen Strichen.

5) Auch unter den Reſt mache man einen Querſtrichen, und ſezze darunter in eben die Stellen den

Reſt, neben dieſen aber die zuerſt folgende Zahl des Dividendi.

6) Unter die rechte Zahl dieſes Reſtes, und der herunter geführten Zahl ſezze man nunmehr den Diviſor, und verfahre eben ſo, wie bei der 2. 3. und 4. Regel.

7) Wenn man nun ſo bei allen Zahlen des Dividendi verfährt, und dabei im vorkommenden Fall die ſechſte und ſiebende Regel der erſten Auflöſung in Acht nimt: So bekomt man den ganzen Quotienten, welcher anzeigt, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt.

Zweiter Fall, wenn der Diviſor aus mehr, als wie einer Ziffer, und alſo aus einem zuſammengeſezten Zeichen beſtehet (§. 50. und 61.).

Erſte Auflöſung.

Wenn man über ſich dividiren ſoll.

1) Man ſezze die erſte Zahl des Diviſors von der linken nach der rechten Hand zu genommen, unter die erſte Zahl des Dividendi zur linken Hand, worinnen ſie ſich teilen läſt, und ſchreibe die folgenden Zeichen des Diviſors, wie ſie auf einander folgen, unter die folgenden Zahlen des Dividendi, hinter den Dividendum aber mache man einen gerade herunter gehenden Strichen, damit man den Quotienten von dem Dividendo unterſcheide.

2) Man

2) Man ſuche in dem Einmaleins diejenige Zahl auf, welche mit der erſten Zahl des Diviſors multiplicirt, der über ihm ſtehenden Zahl beinahe gleich iſt, die Zahl ſelbſt aber ſezze man in die Stelle des Quotienten.

3) Man multiplicire hierauf alle Ziffern des Diviſors mit dem gefundenen Quotienten, und ſtelle ſich vor, als ſeie dieſes Product unter den Diviſor geſchrieben (§. 102.), dieſes Product aber ziehe man von den über ihm ſtehenden Zahlen des Dividendi von der linken nach der rechten Hand zu ab (§. 97.), und ſtreiche die Zahlen im Diviſor und Dividendo aus, über ſie aber ſezze man den Reſt, wenn was übrig bleibt. Wann es nun bei der Multiplication des Quotienten in den Diviſor geſchiehet, daß das Produkt gröſer iſt, als die Zahlen des Dividendi, wovon es abgezogen werden ſoll: So nehme man die erſte Zahl zur linken Hand in dem Diviſor wenigere mal, doch ſo, daß die Zahl, welche übrig bleibt, wenn man das Product aus dem Quotienten in den Diviſor von den dividirten Zahlen im Dividendo abziehet, nicht gröſer, oder eben ſo gros iſt, als der Diviſor. Nunmehr

4) ſchreibe man den Diviſor mit alle ſeinen Zahlen um eine Stelle weiter nach der rechten Hand zu unter dem Dividendo fort, und verfahre mit dem übrig gebliebenen Reſt, wenn was übrig geblieben

iſt,

iſt, und den Zahlen des Dividendi, worunter der Diviſor geſezt worden, eben ſo, wie bei der 2 und 3 Regel gewieſen worden. Wenn man nun hiermit

5) ſo lang fortfähret, bis die lezte Zahl des Diviſors unter die lezte Zahl des Dividendi zu ſtehen komt, und dabei im vorkommenden Fall die ſechſte und ſiebende Regel der erſten Auflöſung des erſten Falls beobachtet: So bekomt man den ganzen Quotienten, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt.

Andere Auflöſung.

Wenn man unter ſich dividiren will.

1) Man verfahre eben ſo, wie wir bei der erſten und zweiten Regel der vorhergehenden Auflöſung gewieſen haben. Jezt

2) beobachte man die dritte, vierte, fünfte, ſechſte, und ſiebende Regel von der andern Auflöſung des erſten Falls, und nehme das in acht, was wir bei der ſechſten und ſiebenden Regel der erſten Auflöſung des erſten Falls geſagt haben: So bekomt man den Quotienten, und die Zahl, welche andeutet, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt.

Beweis.

Wenn man in allen den vorhergehenden Auflöſungen von der linken nach der rechten Hand zu ſtets den Factor aufſuchet, welcher in den Diviſor multiplicirt, den über ihm ſtehenden Zahlen ganz, oder

oder beinahe gleich iſt, und das Product von dieſen Zahlen abziehet, den Reſt aber ſtets bemerket: So ziehet man den Diviſor, da man ihn durch die Multiplication in den Quotienten etlichemal genommen, und alſo im Grund etlichemal addirt hat (§. 82.), ſo oft nach und nach von der linken nach der rechten Hand zu ab, als man kan, und bemerkt im Quotienten, wie oft man denſelben abgezogen hat. Man zeigt alſo in dem Quotienten an, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt, wenn man aber eine Gröſe findet, welche anzeigt, wie oft die eine bekante Gröſe in der andern bekanten Gröſe begriffen iſt, ſo dividiret man (§. 80.), und daher wird auch durch die gegebenen Auflöſungen eine Zahl in die andere dividirt.

Wir wollen einige Beiſpiele anführen, um die angegebenen Regeln deſto faßlicher zu machen. Soll man in dem erſten Fall nach der erſten Auflöſung 1722052005 durch 4 dividiren; So ſtehet das Exempel alſo:

1 1 (1	
1722052005	430543001$\frac{1}{4}$
444444444	

Man rechnet aber hierbei dergeſtalt. Man ſchreibt 4 unter 17, und ſucht den Factor 4 in dem Einmaleins auf, der in den Diviſor 4 multiplicirt, der Zahl 17 beinahe gleich iſt, und ſezt 4 in die Stelle des

Quo-

Quotienten, iezt multiplieirt man den Quotienten in den Diviſor, und ziehet das Product 16 von 17 im Dividendo ab, den Diviſor 4, und die Zahl 17 des Dividendi aber ſtreicht man aus, und ſchreibt 1 über 7, nunmehr ſchreibt man 4 unter 2, und ſagt, um ſich kurz auszudrukken, 4 in 12 habe ich 3mal, 3 nun ſezzet man in die Stelle des Quotienten, und multipliciret 3 in 4, das Product 12 aber, welches heraus komt, ziehet man von 12 im Dividendo ab, und ſtreichet den Diviſor 4, und die Zahl 12 des Dividendi aus. Man ſchreibt ferner 4 unter 2, und ſezt eine Null in den Quotienten, weil 4 in 2 ſich nicht teilen läſt, den Diviſor 4 aber ſtreicht man aus, ferner ſezt man 4 unter 0, und ſagt, 4 in 20 habe ich 5mal, 5 nun ſezt man in den Quotienten, und ziehet das Product aus dem Diviſor 4 in den Quotienten 5 von 20 ab, und ſtreicht im Dividendo 20 aus. Man ſezt abermal 4 unter 5, und ſagt 4 in 5 habe ich 1mal, 1 nun ſchreibt man in den Quotienten, und ziehet das Product aus dem Quotienten 1 in den Diviſor 4 von der Zahl 5 des Dividendi ab, ſtreicht den Diviſor 4 und 5 im Dividendo aus, und ſezt 1 über 5. Man ſchreibt ferner 4 unter 2, und ſagt 4 in 12 habe ich 3mal, und ſchreibt 3 in den Quotienten, das Product aus 3 in 4 aber ziehet man von 12 im Dividendo ab, und ſtreicht den Diviſor 4 und 12 im Dividendo aus. Nunmehr rükt man 4 unter

unter 0, und ſchreibt eine Null in den Quotienten, den Diviſor 4 und 0 im Quotienten aber ſtreicht man aus, man rukt abermal den Diviſor 4 unter 0, und verfährt wie bei der vorgehenden Nulle. Endlich rukt man 4 unter 5, und ſagt 4 in 5 habe ich einmal, 1 nun ſezt man in den Quotienten, das Product aus dem Quotienten 1 in den Diviſor 4 ziehet man von 5 im Dividendo ab, und ſtreicht den Diviſor, und dieſe 5 aus, 1 aber ſezt man über 5, dieſe 1 nun, die übrig bleibet, ſchreibt man über einen kleinen Querſtrichen an den Quotienten, darunter aber den Diviſor: So bekomt man den ganzen Quotienten.

Ein noch anderes Exempel, wenn man 56034000 durch 3 dividiren ſoll, iſt dieſes.

2222	
56034000	18678000
33333333	

Soll man nach der andern Auflöſung des erſten Falls 662 durch 5 dividiren: So geſchiehet dieſes alſo.

Bayerische Staatsbibliothek München

Der Dividendus	662	$132\frac{2}{5}$	der
der Diviſor	5		Quotient
Das Factum aus dem Quotienten in den Diviſor	5		
der Reſt	1		
der folgende Teil	16		
der Diviſor	5		
Das Factum aus dem Quotienten in den Deviſor	15		
der Reſt	1		
der folgende Teil	12		
der Diviſor	5		
Das Factum aus dem Quotienten in den Diviſor	10		
der Reſt	2		

Hierbei nun verfährt man dergeſtalt. Man ſezt den Diviſor 5 unter die erſte Zahl 6 des Dividendi von der linken nach der rechten Hand zu, und ſagt 5 in 6 habe ich 1mal, 1 nun ſezt man in den Quotienten, das Product 5 aber aus dem Quotienten in den Diviſor unter einen Querſtrichen, und unter 6, iezt ziehet man dieſes Product von 6 zur linken Hand im Dividendo ab, und ſchreibt den Reſt wieder unter einen Querſtrichen, unter einen andern Querſtrichen aber dieſen Reſt, und die folgende Zahl 6 des Dividendi, ſo hat man 16, und den folgenden zu dividi-

renden

renden Teil, unter 6 nun, die rechte Zahl dieſes folgenden Teils, ſchreibt man den Diviſor, und ſagt 5 in 16 habe ich 3mal, 3 nun ſchreibt man in den Quotienten, das Product 15 aus dem Quotienten 3 in den Diviſor 5 aber unter einen Querſtrichen, und ziehet dieſes von den oberen 16 im Dividendo ab, den Reſt 1 aber ſchreibt man wieder unter einen Querſtrichen, und eben dieſen Reſt, und die folgende Zahl 2 des Dividendi unter einen andern Querſtrichen, unter die rechte Zahl 2 dieſes folgenden Teils ſezt man wieder den Diviſor 5, und ſagt 5 in 12 habe ich 2mal, 2 nun ſezt man in den Quotienten, das Product 10 aus dem Quotienten 2 in den Diviſor 5 aber unter einen andern Querſtrichen, und ziehet daſſelbe von 12 ab, ſo bleibt endlich 2 übrig, worinnen ſich 5 nicht mehr teilen läſt, und es iſt alſo der Quotient $132\frac{2}{5}$. Ein anderes Exempel iſt dieſes, wenn man 6500 durch 5 dividiren ſoll.

Dividendus	6500 | 1300	Quo-
Diviſor	5 | | |	tient
Das Factum aus dem Quotienten in den Diviſor	5 | | |	
der Reſt	1 | | |	
der folgende Teil	15 | |	
der Diviſor	5 | |	
Das Factum aus dem Diviſor in den Quotienten	15 | |	
der Reſt	| |	
der folgende Teil	0 |	
der Diviſor	5 |	
Das Factum aus dem Quotienten in den Diviſor	0 |	
der Reſt	0 |	
der folgende Teil	0	
der Diviſor	5	
Das Factum aus dem Quotienten in den Diviſor	0	
der Reſt	0	

Wenn man nach der erſten Auflöſung des zweiten Falls 7550 durch 302 dividiren ſoll: So rechnet man alſo.

```
 x x
7550 | 25
3022 |
  30 |
```

Man

Man ſchreibet nemlich die erſte Zahl 3 des Diviſors von der linken nach der rechten Hand zu unter die Zahl 7 des Dividendi, und die folgende Zahlen des Diviſors unter die folgenden Zahlen des Dividendi, und ſagt 3 in 7 habe ich 2mal, 2 nun ſezzet man in den Quotienten, und ziehet das Product aus dem Quotienten 2 in den Diviſorem 302 von der linken nach der rechten Hand zu ab, man ſagt nemlich 2mal 3 macht 6, 6 nun ziehet man von 7 ab, ſtreichet die Zahl 3 des Diviſors, und die Zahl 7 des Dividendi aus, und ſchreibet 1 über 7, eben ſo ſagt man 5mal 0 iſt 0, und ſtreichet 0 im Diviſor aus, endlich aber ſagt man 2mal 2 iſt 4, und ziehet 4 von 5 im Dividendo ab, die Zahl 2 des Diviſors aber, und 5 im Dividendo ſtreichet man aus, und ſezzet den Reſt 1 über 5, ſo bleiben 155 übrig. Jezt rukket man den Diviſor um eine Stelle weiter fort, und ſagt 3 in die 15 habe ich 5mal, 5 nun ſezzet man in den Quotienten, und ziehet das Product aus dem Quotienten in den Diviſor von dem Dividendo von der linken nach der rechten Hand zu ab, man ſagt nemlich 3mal 5 iſt 15, 15 nun ziehet man von 15 im Dividendo ab, und ſtreichet die Zahl 3 des Diviſors, und die Zahlen 15 des Dividendi aus, ſo bleibt nichts übrig, ferner ſagt man 5mal 0 iſt 0, und ſtreicht im Diviſor 0 aus, endlich aber ſagt man 2mal 5 iſt 10, und ziehet das Product 10

von 10 in dem Dividendo ab, 2 im Diviſor und 10 im Dividendo aber ſtreicht man aus, ſo bleibt nichts übrig, und der Quotient iſt 25.

Ein anderes Exempel iſt, wenn 2400 durch 12 dividirt werden ſoll, dieſes.

2̸4̸0̸0̸	200
1̸2̸2̸2̸	
1̸1̸	

Soll man endlich nach der andern Auflöſung des zweiten Falls 3280 durch 205 dividiren: So unterſchreibt man den Diviſor, wie in der erſten Regel der erſten Auflöſung des zweiten Falls gemeldet worden, einen ieden Teil des Quotienten aber ſucht man ſo auf, wie wir in der zweiten Regel dieſer Auflöſung gewieſen haben, und verfährt übrigens im Rechnen eben ſo, wie in dem Exempel über die andere Auflöſung des erſten Falls gezeigt worden. Wir wollen alſo nur das Exempel hierher ſezzen, und es nicht ſo, wie die vorhergehenden, erläutern.

Divi-

Dividendus 3280 | 16 Quotient
Diviſor 205 |

Das Factum aus dem Quotienten
in den Diviſor 205 |

der Reſt 123 |

der folgende Teil 1230
der Diviſor 205

Das Factum aus dem Quotienten
in den Diviſor 1230

der Reſt : : : :

Ein noch anderes Exempel beſtehet, wenn 4500 durch 15 dividiret werden ſoll, in folgendem.

Dividendus 4500 | 300 Quo-
Diviſor 15 | | tient

Das Factum aus dem Quotienten
in den Diviſor 45 | |

der Reſt | |

der folgende Teil 0 |
der Diviſor 15 |

Das Factum aus dem Quotienten
in den Diviſor 0 |

der Reſt 0 |

der folgende Teil 0
der Diviſor 15

Das Factum aus dem Quotienten
in den Diviſor 0

der Reſt 0

Die Diviſion, welche unter ſich geſchiehet, iſt zwar etwas weitläuftiger, als die, wobei man über ſich dividiret, ſie iſt inzwiſchen bequemer, als wie die lez-tere, weil man den begangenen Fehler leichter finden, und einſehen kan.

§. 106.

Weil der Quotient anzeigt, wie oft der Diviſor in dem Dividendo enthalten iſt (§. 80.), und alſo ſo vielmal Eins in dem Quotienten iſt, als der Diviſor in dem Dividendo ſtekt: So muß auch der Diviſor ſo oft genommen, als der Quotient Einheiten hat, dem Dividendo gleich ſein. Wenn man daher den Diviſor ſo oft addirt, als der Quotient Einheiten hat, oder, weil die Multiplication eine wiederholte Addition iſt (§. 78. und 82.), den Diviſorem in den Quotienten multiplicirt (§. 102.): So muß auch der Dividendus herauskommen. Will man daher eine Probe machen, ob man recht gerechnet hat; So multiplicire man den Diviſor mit dem Quotienten, und addire dazu den Reſt, wenn einer übrig geblieben iſt, komt nun der Dividendus heraus, ſo iſt recht gerechnet: Wo aber nicht; ſo iſt gefehlt.

Dividirt man zum Beiſpiel 3256 durch 20: So iſt der Quotient $162\frac{16}{20}$, und das Exempel ſtehet alſo.

1 1	
3256	$162\frac{16}{20}$
2000	
22	

Mul-

Multiplicirt man nun	
den Quotient	162
mit dem Diviſor	20
So iſt das Product	3240
Und addirt man dazu den Reſt	16
So iſt die Summe	3256,

und alſo recht gerechnet.

§. 107.

Hieraus iſt auch zugleich klar, daß die Multiplication, wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt, wieder zuſammenſezt, was die Diviſion aufgelöſt hat, und daß, weil ſtets der eine Factor, ſo oft in dem Product enthalten iſt, als der andere Einheiten hat, die Diviſion wieder auflöſt, was die Multiplication zuſammengeſezt hat, wenn man nur den einen Factor in das Product dividiret (§. 78. und 80.).

§. 108.

Genante Zahlen zu dividiren (§. 60. und 80.).

Aufloſung.

Wenn man genante Zahlen dividiren ſoll; So ſoll man dieſelbe in ſo viele Teile teilen, als eine andere ungenante Zahl Einheiten hat, oder ſie durch eine ungenante Zahl dividiren. Hierbei nun verfahre man alſo:

1) Man dividire die Zahlen von der linken nach der rechten Hand zu, wie gewöhnlich, durch den Diviſor (§. 105.), den Quotienten aber ſchreibe man unter einen Querſtrichen, doch unter die Zahl, worinnen man dividirt hat: Und wenn es dabei geſchiehet, daß ein Reſt übrig bleibt; So verwandele man dieſen Reſt in Dinge von der nächſtfolgenden kleineren Art, man multiplicire nemlich denſelben mit ſo vielen Einheiten von der nächſtfolgenden kleineren Art als derſelben in der vorhergehenden gröſeren Art eine Einheit ausmachen, dieſes Produkt aber addire man in Gedanken zu den folgenden Dingen von der kleineren Art, und dividire dieſe alsdenn, wie gewöhnlich, (§. 105.). So nun

2) verfahre man bei allen Dingen von einerlei Art, und wenn es ſich zuträgt, daß ſich eine gröſere Art durch den Diviſor nicht dividiren läſt: So verwandele man ſie in Dinge von der kleineren Art, wenn noch mehrere Dinge von einer Art folgen, den Reſt aber ſchreibe man zulezt an den Quotienten der kleinſten Art, unter dieſen aber mache man einen kleinen Querſtrichen, und ſezze darunter den Diviſor. Soll man zum Exempel 20 Gulden 6 Weispfennige und 5 Heller durch 4 dividiren: So iſt das Exempel dieſes.

Gulden

	Gulden		Weispf.		Heller
Dividendus	20	—	6	—	5
Diviſor	4	—	4	—	4
Quotient	5	—	1	—	$5\frac{1}{4}$.

Und hierbei rechnet man alſo. Man ſagt bei den Gulden 4 in 20 habe ich 5mal, und ſchreibt 5 unter den Strichen, und unter die Gulden, ferner ſagt man bei den Weispfennigen 4 in 6 habe ich 1mal, und ſezt 1 unter den Strichen, und unter die Weispfennige, das Produkt 4 aus dem Quotienten 1 in den Diviſor 4 aber ziehet man in Gedanken von 6 ab, ſo bleibt 2 übrig. Weil nun 2 Weispfennige übrig bleiben, und 8 Heller einen Weispfennig machen: So multiplicirt man 2 mit 8, und addirt 16 in Gedanken zu 5 Heller, ſo bekomt man 21 Heller, nun ſagt man 4 in 21 habe ich 5mal, ſchreibt 5 unter den Strichen, und unter die Heller, das Produkt 20 aus dem Quotient 5 in den Diviſor 4 aber ziehet man in Gedanken von 21 ab, und ſchreibt den Reſt 1 an 5 Heller, man macht aber darunter einen kleinen Strichen, und ſezt unter dieſen den Diviſor 4. Wir wollen noch einige Exempel hierher ſezzen:

	Lachter		Achtel		Zoll
Soll der Dividendus dividirt werden	3	-	:	-	5 (§.96).
durch den Diviſor	4	-	4	-	4
So iſt der Quotient	:	-	6	-	$1\frac{1}{4}$.

Oder:

Oder:	Lachter		Achtel		Zoll
Soll der Dividendus	8	–	5	–	2 (§.96).
dividirt werden					
durch den Diviſor	8	–	8	–	8
So iſt der Quotient	1	–	ſ	–	6$\frac{4}{8}$

Oder:	Lachter		Achtel		Zoll
Soll der Dividendus	4	–	ſ	–	ſ (§.96).
dividirt werden					
durch den Diviſor	3	–	3	–	3
So iſt der Quotient	1	–	2	–	6$\frac{2}{3}$

Die Probe, ob man recht gerechnet habe, macht man, wie bei genanten Zahlen (§. 106.), man multiplicirt nemlich den Quotienten mit dem Diviſor (§. 104.), komt nun in dem Product der Dividendus heraus, ſo iſt recht gerechnet.

Wenn man wiſſen will, wie viele Dinge von der gröſeren Art eine in kleineren Dingen gegebene Zahl ausmacht; So dividirt man dieſe Zahl durch die Anzahl der kleineren Dinge, die in der gröſeren ein Ganzes ausmachen: So zeigt der Quotient die Anzahl der gröſeren Dinge, und der Reſt, wenn einer übrig bleibt, die kleinere Dinge, die über die gröſere in dieſer Zahl enthalten ſind. Dieſe Diviſion kan man nun ſo lange fortſezzen, als noch Dinge von der gröſeren Art in dem Quotienten herauskommen. Will man zum Exempel von 692 Zollen wiſſen, wie viele Dinge in der gröſeren

Art

Art dieſelbe ausmachen: So geſchiehet dieſes dergeſtalt

Zolle	Achtel	Lachter
69 (2	(5	8.
100	69	
1	8	

Es machen alſo 692 Zoll 8 Lachter, 5 Achtel und 2 Zoll.

Wenn man dieſemnach eine genante Zahl von gröſeren und kleineren Dingen in gewiſſe, und in ſo viele Teile teilen ſoll, als eine ungenante Zahl Einheiten hat: So kan man den Quotienten auch dadurch bekommen, wenn man die genante Zahlen in die Dinge von der kleinſten Art verwandelt (§.104.), und alsdann dieſe mit dem Diviſor dividirt, bei dem Quotient hernach aber, wie wir ſo eben gezeigt haben, unterſucht, wie viele Dinge von einer ieden Art dieſer Quotient ausmacht. Soll man zum Beiſpiel 8 Lachter, 5 Achtel und 2 Zoll durch 8 dividiren: So iſt die Rechnung dieſe:

```
Lachter  Achtel  Zoll
   8       5       2
   8
 ---------------------
  64      69
   5      10
 ----    ----
  69     690
           2
         ----
         692
```

Zolle

Zolle	Zolle	Achtel	Lachter
~~8~~(4			
~~692~~	8(6$\frac{4}{8}$	8	1
88	~~10~~	8	

und alſo iſt der Quotient, oder der 8te Teil von 692 Zollen 1 Lachter 6$\frac{4}{8}$ Zoll.

Dieſe Diviſion iſt weitläuftig, inzwiſchen haben wir ſie doch mit anführen wollen.

Wir haben die vier Rechnungsarten etwas weitläuftig abgehandelt, und dieſes haben wir um deswillen gethan, weil dieſelbe bei allen Rechnungen vorkommen, und ſich viele Bergleute, wenn ſie auch etwas rechnen können, doch nicht in allen Fällen zu helfen wiſſen.

B.

Von den Brüchen.

§. 109.

Die Brüche, worinnen man zu rechnen gewohnt iſt, teilen ſich in drei Arten, und ſie beſtehen in gemeinen **Brüchen**, die in dem gemeinen Leben vorkommen, und in zehnteilichen und ſechszigteilichen **Brüchen**, die beſonders in der Mathematik gebraucht werden. Wir wollen ſie nach einander vortragen.

A.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 110.

Ein, oder etliche Teile von den gleichen Teilen, worinnen ein Ganzes geteilt iſt, nent man einen

Bruch.

Bruch. Wenn man zum Exempel einen Gulden in 4 gleiche Teile teilet, und es ſind dieſer Teile 3 an einer Gröſe: So machen dieſe 3 Teile von den 4 Teilen, worinn der Gulden geteilet iſt, einen Bruch aus.

§. 111.

Es kommen alſo bei einem ieden Bruch zwei Gröſen vor, vorerſt die Zahl, welche anzeigt, in wie viele gleiche Teile das Ganze geteilt iſt, und dann zweitens die Zahl, welche andeutet, wie viele von dieſen Teilen den Bruch ausmachen. Die erſte heiſt der Nenner, die andere aber der Zähler des Bruchs. Jener iſt alſo der bloſe Namen des Bruchs, indem er anzeigt, in wie viele gleiche Teile das Ganze geteilet iſt, dieſer hingegen zählet die Vielheit dieſer Teile, die den Bruch ausmachen. Iſt zum Exempel der Gulden in 4 gleiche Teile geteilet, und es machen davon 3 Teile einen Bruch aus: So iſt 4 der Nenner, und 3 der Zähler.

§. 112.

Damit man die Brüche von andern Zahlen genau unterſcheiden könne: So ſchreibt man den Zähler und den Nenner beiſammen, und zwar, obenhin den Zähler, untenhin aber den Nenner, und unterſcheidet beide, wie bei der Diviſion (§. 81.), mit einem kleinen Querſtrichen. Iſt demnach der

Zähler

Zähler eines Bruchs 3, der Nenner aber 4: So ſchreibt man dieſen Bruch alſo $\frac{3}{4}$.

§. 113.

Wenn man bei den Brüchen auf die Gröſe der Zähler ſiehet, die ſie gegen ihre Nenner haben: So ſind dieſe Zähler entweder kleiner, als wie die Nenner, oder ſie ſind eben ſo gros, und gröſer, als wie die Nenner (§. 32.). Einen Bruch von der erſten Art nent man einen eigentlichen, einen Bruch von der andern Art aber einen uneigentlichen, oder einen **Baſtardbruch**, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{20}$ ſind alſo eigentliche, $\frac{5}{5}$ und $\frac{6}{6}$, oder $\frac{4}{3}$ und $\frac{21}{6}$ hingegen uneigentliche Brüche.

§. 114.

Man begreift hieraus leicht, daß ein Bruch klein iſt, wenn der Nenner den Zähler vielmal in ſich faſt, und daß er gros iſt, wenn dieſes nicht iſt.

§. 115.

Ein eigentlicher Bruch, der kleiner iſt, als wie das Ganze, begreift alſo nur ein, oder etliche Teile, und alſo ein Stük von dem Ganzen, ein uneigentlicher Bruch hingegen alle Teile des Ganzen ein- oder etliche mal, und ein oder etliche mal, und noch einige Teile, oder ein Stük von dem Ganzen darüber in ſich.

§. 116.

Wenn man daher einen uneigentlichen Bruch, der alle Teile des Ganzen ein- oder etlichemal in ſich faſt, durch ſeinen Nenner dividirt (§. 105.); So bekomt man im Quotienten Ganze: Und wenn man einen uneigentlichen Bruch, der alle Teile des Ganzen ein- oder etlichemal, und noch einige Teile von dem Ganzen darüber enthält, durch ſeinen Nenner dividirt; So bekomt man im Quotienten das Ganze ein- oder etlichemal, und einige Teile von dem Ganzen, die über die Ganze im Zähler begriffen ſind, welche Teile dann einen wahren Bruch ausmachen (§. 105.), eine ſolche Zahl aber nent man eine gebrochene, oder eine vermiſchte Zahl. Dividirt man zum Beiſpiel den uneigentlichen Bruch $\frac{12}{3}$ durch ſeinen Nenner 3; So bekomt man 4: Und dividirt man den uneigentlichen Bruch $\frac{15}{4}$ durch ſeinen Nenner 4; So bekomt man 3, und es bleiben noch $\frac{3}{4}$ übrig. Man hat alſo $3\frac{3}{4}$, und dieſe Zahl iſt eine gebrochene Zahl.

§. 117.

Man kan alſo bei einem uneigentlichen Bruch durch die Diviſion des Nenners in den Zähler gar bald wiſſen, wie viele Ganze in demſelben enthalten ſind: Und wenn man eine gebrochene Zahl wieder in einen uneigentlichen Bruch verwandeln will; So

hat man weiter nichts nötig, als daß man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt, und das Product zu dem Zähler des Bruchs addirt, dieſe Summe aber alsdann Bruchsweiſe über den Nenner ſezzet (§. 107.). Es iſt alſo die gebrochene Zahl

$$3\tfrac{3}{4} = 3.\tfrac{4}{4} + 3 = \tfrac{12}{4} + 3 = \tfrac{15}{4}.$$

§. 118.

Wenn bei zwei Brüchen der Nenner des einen ſeinen Zähler ſo oft in ſich begreift, als der Nenner des andern ſeinen Zähler in ſich faſt: So nent man dieſe Brüche gleiche Brüche. So ſind zum Beiſpiel die Brüche $\frac{1}{2}$, und $\frac{4}{8}$ gleiche Brüche, und es iſt hieraus klar, daß ein und eben derſelbe Bruch auf vielerlei Art geſchrieben werden kan (§. 21.).

§. 119.

Wenn man den Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber nicht verändert: So wird der Bruch um die Anzahl der Einheiten der ganzen Zahl vergröſert (§. 32.).

Beweis.

Multiplicirt man den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl, und verändert den Nenner nicht: So

So nimt man den Zähler ſo vielmal mehr, als die Anzahl der Einheiten der ganzen Zahl ausmacht, und eben darum wird auch der Bruch, wenn man den Zähler durch eine ganze Zahl multiplicirt, den Nenner aber nicht verändert, um ſo vielmal gröſer, als die ganze Zahl Einheiten hat (§. 114.). Wenn man alſo von dem Bruch $\frac{5}{6}$ den Zähler 5 mit 4 multiplicirt, und den Nenner unverändert läſt: So iſt $\frac{5 \cdot 4}{6} = \frac{20}{6}$, und alſo der Bruch $\frac{5}{6}$ um vier vergröſert.

§. 120.

Soll man alſo einen Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciren: So multiplicirt man nur den Zähler mit dieſer Zahl, und läſt den Nenner unverändert. Soll man zum Exempel $\frac{2}{3}$ mit 6 multipliciren: So iſt $\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$ (§. 117.).

§. 121.

Wenn man den Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl multiplicirt, und den Zähler nicht verändert: So iſt der Bruch um die Anzahl der Einheiten der ganzen Zahl kleiner (§. 32.).

Beweis.

Wenn man den Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Zähler aber nicht verändert:

ändert: So teilet man bei dem Nenner die Einheit in ſo vielmal ſo viele Teile mehr, als die Anzahl der Einheiten der ganzen Zahl ausmacht, von dieſen Teilen aber nimt man, da man den Zähler unverändert läſt, nicht mehrere, als wie vorher, und eben darum wird auch der Bruch, wenn man den Nenner deſſelben durch eine ganze Zahl multiplicirt, den Zähler aber nicht verändert, um ſo viel mal verkleinert, als die ganze Zahl Einheiten hat.

Multiplicirt man alſo von dem Bruch $\frac{3}{4}$ den Nenner 4 mit 5, und läſt den Zähler unverändert! So iſt $\frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$, und alſo der Bruch $\frac{3}{4}$ um fünf verkleinert.

§: 122.

Wenn man alſo einen Bruch mit einer ganzen Zahl dividiren ſoll: So multiplicirt man nur den Nenner mit dieſer Zahl, und läſt den Zähler unverändert. Soll man zum Exempel $\frac{2}{3}$ durch 4 dividiren: So iſt $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{2}{12}$.

§. 123.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch eine ganze Zahl, und den Nenner dieſes Bruches durch eben dieſe Zahl multipliciret: So bleibt die Gröſe des Bruchs ungeändert, und die Producte des Zählers und des Nenners machen einen

nen neuen Bruch aus, der dem, den man multiplicirt hat, gleich iſt (§. 118.).

Beweis.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt; So vergröſert man den Bruch um ſo vielmal, als die ganze Zahl Einheiten hat (§. 119.): Und wenn man den Nenner dieſes Bruchs mit eben der Zahl multiplicirt; So verkleinert man ihn wieder um ſo vielmal, als eben dieſe Zahl Einheiten hat (§. 121.), um ſo viel alſo, als der Bruch vergröſert wird, um ſo viel wird er auch wieder verkleinert. Da nun hierdurch ſeine Gröſe nicht geändert, und er nur mit andern Ziffern geſchrieben wird: So iſt auch der Bruch, welcher heraus komt, wenn man den Zähler, und den Nenner eines Bruchs durch einerlei Zahl multiplicirt, dem multiplicirten Bruch gleich (§. 118.).

Multiplicirt man zum Exempel den Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{3}{4}$ durch 5: So iſt $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

§. 124.

Dividirt man den Zähler eines Bruches mit einer ganzen Zahl, und verändert den Nenner nicht: So wird der Bruch, welcher heraus komt, um ſo vielmal kleiner, als dieſe Zahl Einheiten hat, und er iſt mit dieſer Zahl dividirt.

Beweis.

Wenn man den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, den Nenner aber unverändert läſt: So nimt man nur ſo viele Teile von dem Zähler, als wie oft die ganze Zahl in dem Zähler enthalten iſt (§. 80.), und alſo wird er um ſo viel kleiner, als die ganze Zahl Einheiten hat (§. 114.), und er iſt daher durch dieſe Zahl dividirt.

Dividirt man zum Exempel den Zähler 4 des Bruchs $\frac{4}{8}$ durch 2, uud läſt den Nenner ohnverändert: So iſt $\frac{4:2}{8} = \frac{2}{8}$, und alſo $\frac{4}{8}$ um zwei verkleinert.

§. 125.

Dividirt man den Nenner eines Bruchs durch eine Zahl, und verändert den Zähler nicht: So wird der Bruch um ſo viel gröſer, als dieſe Zahl Einheiten hat, und er iſt mit dieſer Zahl multiplicirt.

Beweis.

Wenn man den Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt, den Zähler aber nicht verändert: So teilt man die Einheit nur in ſo viel gleiche Teile, als wie oft die ganze Zahl in dem Nenner enthalten iſt, und daher wird der Bruch um ſo viel gröſer, als die ganze Zahl Einheiten hat (§. 114.), und alſo multiplicirt man den Bruch durch dieſe Zahl.

Dividirt

Dividirt man zum Beiſpiel den Nenner 8 des Bruchs $\frac{2}{8}$ durch 2, und läſt den Zähler unverändert: So iſt $\frac{2}{8:2} = \frac{2}{4}$, und der Bruch $\frac{2}{8}$ mit 2 multiplicirt.

§. 126.

Wenn man den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl, und den Nenner dieſes Bruchs durch eben dieſe Zahl dividirt: So bleibt die Gröſe des Bruchs ohngeändert, und die Quotienten des Zählers und des Nenners machen einen neuen Bruch aus, welcher dem, welchen man dividirt hat, gleich iſt (§. 118.).

Beweis.

Wenn man den Zähler eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt; So verkleinert man denſelben ſo vielmal, als die ganze Zahl Einheiten hat (§. 124.): Und wenn man den Nenner des Bruchs durch eben dieſe Zahl dividirt; So vergröſert man ihn wieder um ſo vielmal, als eben dieſe Zahl Einheiten hat (§. 125.), um ſo vielmal man alſo den Bruch verkleinert hat, um ſo vielmal vergröſert man auch denſelben wieder. Weil nun ſeine Gröſe hierdurch nicht geändert, und er nur mit andern Ziffern geſchrieben wird: So iſt der Bruch, welcher herauskomt, wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs durch einerlei Zahl dividirt, dem dividirten Bruch gleich (§. 118.).

Dividirt man zum Exempel den Zähler 5 und den Nenner 15 des Bruchs $\frac{5}{15}$ durch 5: So iſt $\frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{5} = \frac{5}{15}$.

§. 127.

Wenn man anſtatt eines gegebenen Bruchs einen andern findet, deſſen Zähler und Nenner mit ſo kleinen Ziffern geſchrieben wird, als es möglich iſt, jenem aber doch in der Gröſe gleich iſt (§. 118.): So ſagt man, daß man einen **Bruch aufhebe**.

§. 128.

Einen Bruch aufzuheben (§. 127.).

Auflöſung.

Man dividire ſowol den Zähler, als wie den Nenner des Bruchs durch die gröſte Zahl, die ſich in beide teilen läſt: So iſt der erſte Quotient der Zähler, der andere aber der Nenner des neuen Bruchs und das verlangte geſchehen (§. 126.).

Wenn man zum Exempel $\frac{6}{24}$ durch 6 divìdiret: So iſt $\frac{6:6}{24:6} = \frac{1}{4} = \frac{6}{24}$.

§. 129.

Wenn bei verſchiedenen Brüchen die Einheit in gleich viele Teile geteilet worden, und ſie alſo einerlei Nenner haben: So ſagt man, daß die **Brüche einerlei Namen, oder einerlei Benennung haben** (§. 111.).

§. 130.

§. 130.

Weil ſich keine Dinge mit einander vergleichen laſſen, die nicht aus Dingen von einerlei Art beſtehen (§. 38.): So folgt auch, daß man mit denen Brüchen keine Rechnung anſtellen könne, die nicht zuvor unter einerlei Benennung gebracht worden.

§. 131.

Brüche unter einerlei Benennung zu bringen (§. 129.).

Erſter Fall.

Wann nur zwei Brüche unter einerlei Benennung zu bringen ſind.

Auflöſung.

Man multiplicire ſowol den Zähler, als wie den Nenner eines ieden Bruchs durch den Nenner des andern; So bekomt man bei einem ieden Bruch einen neuen Bruch, welcher dem vorigen gleich iſt (§.123.): Und weil bei einem ieden Bruch die beiden Nenner der Brüche, und alſo einerlei Zahlen in einander multiplicirt worden; So erhält man auch einerlei Producte, und alſo einerlei Nenner, und folglich ſind die beiden Brüche unter einerlei Benennung gebracht.

Soll man zum Exempel die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ ter einerlei Benennung bringen: So iſt $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$, und $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

Zweetter Fall.

Wenn mehrere Brüche unter einerlei Benennung gebracht werden ſollen.

Auflöſung.

Man multiplicire den Zähler und den Nenner eines ieden Bruchs durch das Product aus den Nennern der übrigen Brüche: So bekomt man bei einem ieden Bruch einen neuen Bruch, welcher dem Bruch gleich iſt, den man multiplicirt hat (§. 123.), es ſind dabei aber auch alle Nenner gleich, weil bei den Nennern ſtets einerlei Zahlen in einander multiplicirt worden, und folglich ſind die Brüche unter einerlei Benennung gebracht.

Wenn man alſo die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter einerlei Benennung bringen ſoll: So iſt $\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{70}{105}$, und $\frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{84}{105}$, und $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{36}{105}$.

§. 132.

Wenn man dieſemnach den gemeinſchaftlichen Nenner einmal gefunden hat: So hat man, da bei den Nennern ſtets einerlei Zahlen in einander multiplicirt werden, nur nötig, daß man den Zähler eines ieden Bruchs durch die Nenner der übrigen Brüche multiplicirt, da man dann den Zähler zu dem gemeinſchaftlichen Nenner dieſes Bruchs bekomt. Man kan dieſe Brüche, um ſie um deſto

leichter zu überſehen, unter einander ſezzen, und alsdann kommen ſie alſo zu ſtehen.

$$\frac{2}{3} = \frac{2\cdot5\cdot7}{3\cdot5\cdot7} = \frac{70}{105}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4\cdot3\cdot7}{5\cdot3\cdot7} = \frac{84}{105}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{2\cdot3\cdot5}{7\cdot3\cdot5} = \frac{30}{105}$$

§. 133.

Will man den Zähler eines Bruchs nicht durch alle Nenner der übrigen Brüche beſonders multipliciren: So multiplicirt man erſt alle Nenner in einander, um den gemeinſchaftlichen zu bekommen, alsdann aber dividirt man den Nenner des Bruchs, wovon man den Zähler zu dem gemeinſchaftlichen Nenner finden will, in dieſen gemeinſchaftlichen Nenner: So hat man in dem Quotienten das Product aus allen Nennern der übrigen Brüche (§. 107.), dieſen Quotienten nun multiplicirt man in den Zähler des Bruchs, deſſen Nenner man in den gemeinſchaftlichen dividirt hat: So hat man den Zähler von dieſem Bruch zu dem gemeinſchaftlichen Nenner. Auch hierbei kan man die Brüche unter einander ſezzen, und dieſes geſchiehet dergeſtalt.

Gemeinſchaftlicher Neñer	Brüche	Quotient	Zähler
3. 4. 7. = 105	$\frac{2}{3}$	$\frac{105}{3} = 35$	35. 2 = 70
	$\frac{4}{5}$	$\frac{105}{5} = 21$	21. 4 = 84
	$\frac{2}{7}$	$\frac{105}{7} = 15$	15. 2 = 30

Dieſe

Dieſe Brüche kan man auch noch kürzer, und wie im gemeinen Leben gewöhnlich iſt, unter einander ſchreiben, und dieſes geſchiehet ſo.

Gemeinſchaftlicher Nenner 105	Quotient	Zähler
$\frac{2}{3}$	35	70
$\frac{4}{5}$	21	84
$\frac{2}{7}$	15	30

§. 134.

Brüche zu addiren (§. 74. und 110.).

Auflöſung.

1) Weil ſich keine Gröſen addiren laſſen, die nicht aus Dingen von einerlei Art beſtehen, und einerlei Namen haben (§. 83. und 130.): So bringe man die Brüche unter einerlei Benennung (§. 131.).

2) Da nun die Nenner nur die Namen ſind (§. 111.): So addire man die Zähler zuſammen (§. 93.), und ſchreibe unter ihre Summen den gemeinſchaftlichen Nenner, ſo hat man die Summe der Brüche. Wenn nun

3) der Zähler gröſer iſt, als wie der Nenner, ſo dividire man dieſen in ienen: So bekomt man die Summe in einer Ganzen, oder gebrochenen Zahl (§. 116. und 117.).

Exempel.

	(120			
Soll man addiren die Brüche	$\frac{3}{4}$	30	—	90
	$\frac{2}{5}$	24	—	48
	$\frac{4}{6}$	20	—	80

So iſt die Summe $\frac{218}{120} = 1\frac{98:2}{120:2} = 1\frac{49}{60}$ (§. 128.).

§. 135.

§. 135.

Wenn man ganze Zahlen, gebrochene Zahlen (§. 116.), und Brüche addiren ſoll: So addiret man die Brüche, wie zuvor, dazu aber die ganze Zahlen.

Exempel.

60			
3			
$2\frac{1}{4}$	15	—	15
$3\frac{2}{3}$	20	—	40
$\frac{3}{5}$	12	—	36

Summe $8 + \frac{91}{60} = 8 + 1\frac{31}{60} = 9\frac{31}{60}$.

§. 136.

Brüche von Brüchen zu ſubtrahiren (§. 76. und 110.).

Auflöſung.

1) Wenn die Brüche verſchiedene Nenner haben: So bringe man ſie unter einerlei Benennung (§. 131.), weil ſich keine Gröſen ſubtrahiren laſſen, die nicht aus Dingen von einerlei Art beſtehen (§. 83. und 130.). Jezt

2) ziehe man den Zähler des einen Bruchs von dem Zähler des andern Bruchs ab (§. 97.), und ſezze unter den Reſt den gemeinſchaftlichen Nenner: So iſt das verlangte geſchehen.

Exem-

Exempel.

	12			
Soll man von	$\frac{3}{4}$	3	——	9
abziehen	$\frac{2}{3}$	4	——	8
So iſt der Reſt				$\frac{1}{12}$.

§. 137.

Soll man einen Bruch von einer ganzen Zahl abziehen: So nehme man eine Einheit von der ganzen Zahl, und teile ſie in ſo viele Teile als der Nenner des Bruchs Einheiten hat, unter dieſe aber ſezze man den Nenner, nunmehr ziehe man den abzuziehenden Bruch von dieſem Bruch, wie zuvor, ab, und ſezze davor die ganze Zahl weniger Eins.

Exempel.

Soll von	8	=	$7\frac{8}{8}$
abgezogen werden			$\frac{3}{8}$
So iſt der Reſt			$7\frac{5}{8}$.

§. 138.

Wenn man Brüche von gebrochenen Zahlen abziehen ſoll: So bringe man die Brüche unter einerlei Benennung, und ziehe, wie gewöhnlich, ab, vor den Reſt aber ſezze man die ganze Zahl. Wenn es aber geſchiehet, daß der Bruch an der gebrochenen Zahl, wovon abgezogen werden ſoll, kleiner iſt, als der Bruch, welchen man abziehen will: So nehme man eine Einheit von der ganzen Zahl, und mache ſie zu einem ſolchen Bruch, der den Nenner der

gebro-

gebrochenen Zahl zu ſeinem Nenner hat (§. 137.), dieſen Bruch nun, und den, wovon abgezogen werden ſoll, addire man (§. 134.), und verrichte alsdann die Subtraction (§. 136.), zu dem Reſt aber ſezze man die ganze Zahl weniger Eins.

Exempel.

	8	
Soll von	$8\frac{1}{4} = 7\frac{5}{4}$	2 – 10
abgezogen werden	$\frac{1}{2}$	4 – 4
So iſt der Reſt	$7\frac{6:2}{8:2} = 7\frac{3}{4}$.	

§. 139.

Sollen gebrochene Zahlen von gebrochenen abgezogen werden; So ziehet man Brüche von Brüchen und ganze von ganzen Zahlen ab (§. 138.): Und wenn der abzuziehende Bruch gröſer iſt, als der, wovon man abziehen ſoll; So nimt man, wie zuvor, Eins von dem Ganzen, verwandelt daſſelbe in einen Bruch, und ſezt es zu dem Bruch, wovon man abziehen ſoll.

Exempel.

	(12	
Soll von	$6\frac{1}{4} = 5\frac{5}{4}$	3 – 15
abgezogen werden	$3\frac{1}{3}$	4 – 4
So iſt der Reſt	$2\frac{11}{12}$	

§. 140.

Soll man gebrochene Zahlen von ganzen Zahlen abziehen: So nimt man eine Einheit von dem Ganzen,

zen, und bringt dieſe auf einen Bruch, welcher den Nenner des abzuziehenden Bruchs zu ſeinem Nenner hat (§. 137.), alsdann aber ſubtrahirt man die Brüche, und auch die Ganze: So bekomt man den Reſt.

Exempel.

Soll von	$5 = 4\frac{6}{6}$
abgezogen werden	$3\frac{1}{6}$
So iſt der Reſt	$1\frac{5}{6}$

§. 141.

Wenn man endlich ganze Zahlen von gebrochenen abziehen ſoll: So ſubtrahirt man die Ganze, und ſezt zu dem Reſt den Bruch, weil von dieſem nichts weggenommen wird.

Exempel.

Soll von	$9\frac{1}{5}$
abgezogen werden	3
So iſt der Reſt	$6\frac{1}{5}$

§. 142.

Einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren (§. 78. und 110.).

Aufloſung.

Man multiplicire den Zähler des einen Bruchs mit dem Zähler des andern, und den Nenner des einen Bruchs mit dem Nenner des andern Bruchs: So entſtehet aus dem erſteren der Zähler, aus dem andern aber der Nenner des Products.

Beweis.

Beweis.

Wenn man einen Bruch mit einem andern multipliciren ſoll: So ſoll man dieſen Bruch nur ſo vielmal nehmen, als der andere Teile von dem in gewiſſe Teile geteilten Ganzen hat. Man ſoll alſo von dem Bruch, den man multipliciren ſoll, ein ſolches Stůk nehmen, als der andere Bruch anzeigt, womit man multiplicirt. Dieſemnach muß man den erſten in ſo viele Teile teilen, als der Nenner des andern Bruchs Einheiten hat, von dieſen Teilen aber ſo viele nehmen, als der Zähler des andern Einheiten in ſich faſt. Nun geſchiehet aber das erſtere, wenn man die Nenner in einander multiplicirt (§. 121.), und das lezte, wenn man die Zähler in einander multiplicirt (§. 119.), und derohalben bekomt man auch das Product von zwei Brůchen, wenn man ihre Zähler, und auch ihre Nenner in einander multiplicirt.

Exempel.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$$

§. 143.

Es iſt aus dem, was gelehret worden, zugleich klar, daß bei den eigentlichen Brůchen das Product ſtets kleiner ſei, als ein ieder Factor, und daher bei der Multiplication der Brůche ſtets weniger herauskommen můſſe.

§. 144.

Soll man eine ganze Zahl mit einem Bruch multipliciren: So verwandelt man die ganze Zahl in einen uneigentlichen Bruch, man ſezt nemlich bruchsweiſe eine Einheit darunter, und verfährt wie (§. 142.), den Nenner des Products aber dividirt man in den Zähler (§. 113. und 117.).

Exempel.

$$8 = \frac{8}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}.$$

§. 145.

Soll man gebrochene Zahlen mit Brüchen multipliciren: So verwandele man die gebrochene Zahl in einen uneigentlichen Bruch (§. 117.), man multiplicire Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner, und dividire den Nenner des Products in ſeinen Zähler (§. 117.).

Exempel.

$$3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{6} = 2\frac{2:2}{6:2} = 2\frac{1}{3}$$ (§. 128.).

§. 146.

Wenn man gebrochene Zahlen mit Ganzen multipliciren ſoll: So verwandele man die erſte in einen uneigentlichen Bruch (§. 117.), und ſezze auch die andere auf einen Bruch (§. 144.), alsdann aber multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, und dividire den Nenner des Products in ſeinen Zähler (§. 117.).

Exem-

Exempel.

$7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$, und $3 = \frac{3}{1}$, und $\frac{15}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$.

§. 147.

Sollen endlich gebrochene Zahlen mit gebrochenen multiplicirt werden: So verwandelt man beide in uneigentliche Brüche (§. 117.) und verfährt wie vorher.

Exempel.

$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ und $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ und $\frac{11}{2} \cdot \frac{13}{4} = \frac{143}{8} = 17\frac{7}{8}$.

§. 148.

Einen Bruch durch einen andern zu dividiren (§. 80. und 110.).

Aufloͤſung.

Man kehre den Diviſor um, man ſezze nemlich obenhin den Nenner, und untenhin den Zaͤhler, und multiplicire alsdann Zaͤhler mit Zaͤhler, und Nenner mit Nenner: So iſt das erſte Product der Zaͤhler, das andere aber der Nenner des Quotienten.

Beweis.

Wenn man einen Bruch in den andern dividiren ſoll: So muß man die Zahl angeben, welche anzeigt, wie oft der eine Bruch in dem andern enthalten iſt (§. 80.). Bringt man daher die Bruͤche unter einerlei Benennung; So muß, weil die Nenner nur die Namen ſind (§. 111.), der eine Bruch ſo oft in dem andern begriffen ſein, als der Zaͤhler des

J 2 einen

einen Bruchs in dem Zähler des andern Bruchs enthalten iſt: Wenn man aber zwei Brüche unter einerlei Benennung bringt; So erwächſt der Zähler des einen Bruchs, wenn man den Zähler durch den Nenner des andern Bruchs multiplicirt, und der Zähler des andern Bruchs, wenn man ſeinen Zähler durch den Nenner des erſten Bruchs multiplicirt (§. 131.), man bekomt aber, da es nur auf die in einander zu dividirenden Zähler von einerlei Nenner ankomt, eben die Zähler, die in einander dividirt werden ſollen, und den Quotient ausmachen, wenn man den Diviſor umwendet, und die Brüche mit einander multiplicirt, und daher wird auch durch die gegebene Auflöſung ein Bruch in den andern dividirt.

Exempel.

Soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt werden: So ſchreibe man ſtatt $\frac{4}{5}$ den Bruch $\frac{5}{4}$, und multiplicire dieſe Brüche: So iſt $\frac{2}{3} . \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$, und $\frac{10}{12}$ iſt der Quotient.

Man kan dieſemnach auch nur in das Kreuz mit des Diviſors Nenner in den Zähler des Dividendi, und mit des Dividendi Nenner in des Diviſors Zähler multipliciren: So gibt das erſte Product der Zähler, das andere aber der Nenner des Quotienten.

Exempel.

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{15}{16}$$

§. 149.

§. 149.

Wenn man Brüche durch ganze Zahlen, oder ganze Zahlen durch Brüche dividiren ſoll: So bringe man die ganzen Zahlen in einen Bruch (§. 144.)' und verfahre alsdann, wie mit Brüchen (§. 148.).

1 Exempel.

$$\frac{3}{4} : 4 = \frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{3}{16}$$

2 Exempel.

$$8 : \frac{2}{3} = \frac{8}{1} : \frac{2}{3} = \frac{8}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{2} = 12.$$

§. 150.

Soll man gebrochene Zahlen durch Brüche, oder Brüche durch gebrochene Zahlen dividiren: So verwandele man die gebrochene Zahl in einen uneigentlichen Bruch (§. 117.), und verfahre wie bei den Brüchen (§. 148.).

1 Exempel.

$$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3},\ \frac{11}{3} : \frac{3}{4} = \frac{11}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{44}{9} = 4\frac{8}{9}.$$

2 Exempel.

$$\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{11}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{2} = \frac{6}{44}.$$

§. 151.

Wenn man gebrochene Zahlen durch ganze Zahlen, oder umgewendet ganze Zahlen durch gebrochene

dividiren ſoll: So bringe man die gebrochenen Zahlen in einen uneigentlichen Bruch (§. 117.), die Ganze aber ſezze man auf einen Bruch (§. 144.), und verfahre, wie bei den Brüchen (§. 148.).

1 Exempel.

$5\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$ und $7=\frac{7}{1}$, und $\frac{11}{2}:\frac{7}{1}=\frac{11}{2}\times\frac{7}{1}=\frac{11}{14}$.

2 Exempel.

$9=\frac{9}{1}$ und $5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$, und $\frac{9}{1}:\frac{21}{4}=\frac{9}{1}\times\frac{21}{4}=\frac{36}{21}=1\frac{15}{21}=1\frac{15:3}{21:3}=1\frac{5}{7}$ (§. 128.).

§. 152.

Soll man endlich gebrochene Zahlen durch gebrochene dividiren: So bringe man beide auf einen uneigentlichen Bruch (§. 117.), und verfahre, wie bei den Brüchen (§. 148.).

Exempel.

$3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$, und $4\frac{2}{5}=\frac{22}{5}$, und $\frac{11}{3}:\frac{22}{5}=\frac{11}{3}\times=\frac{22}{5}=\frac{55}{66}$.

§. 153.

Zuweilen iſt es nötig, daß man weis, wie viele Einheiten ein Bruch von genanten gröſeren Zahlen in den Dingen von der kleineren Art ausmachet (§. 60.). Da nun in einem ſolchen Fall iede Einheit in dem Zähler, als die Vielheit der kleinen Dinge betrachtet

tet werden kan, die in der gröſern Art ein Ganzes ausmachen, dieſe Dinge in dem Zähler aber durch des Bruchs Nenner dividirt ſind: So darf man auch nur den Zähler des Bruchs mit der Anzahl der kleinern Dinge, die in dieſer gröſern ein Ganzes ausmachen, multipliciren, und das Product durch den Nenner des Bruchs dividiren, ſo hat man das Verlangte.

So iſt zum Exempel $\frac{3}{7}$ Gulden $= \frac{3 \cdot 30}{7} = \frac{90}{7} = 12\frac{6}{7}$ Weispfennige, und $\frac{6}{7}$ Weispf. $= \frac{6 \cdot 8}{7} = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}$ Heller. Eben ſo ſind $\frac{5}{9}$ Lachter $= \frac{5 \cdot 8}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ Achtel, und $\frac{4}{9}$ Achtel $= \frac{4 \cdot 10}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ Zoll (§. 96.).

B.

Von den zehnteilichen Brüchen.

§. 154.

Wenn man die Einheit von einer ganzen Zahl durch die Multiplication mit 10 in 10 gleiche Teile, einen ſolchen Teil wieder in 10, und alſo die Einheit des Ganzen in 100 gleiche Teile, einen von dieſen Teilen wieder in 10, und alſo die Einheit des Ganzen in 1000 gleiche Teile, ein von dieſen Teilen abermal in 10, und alſo die Einheit des Ganzen in 10000 gleiche Teile, und ſo weiter teilet, von dieſen Teilen aber einen, oder etliche nimt: So bekomt man lau-

ter Brüche, die zum Nenner eine Einheit, und ein, oder etliche Nulle haben, einen ſolchen Bruch aber nennet man einen zehnteilichen Bruch, oder ein Decimalbruch. Die Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{5}{10000}$ und $\frac{8}{100000}$ ſind alſo Decimalbrüche.

§. 155.

Weil alſo von dieſen Brüchen der erſte nach den ganzen Zahlen 10, der andere 100, der dritte 1000, der vierte 10000, und ſo weiter, zu ſeinem Nenner hat: So kan man auch den Nenner eines Decimalbruchs aus der Stelle des Zählers erkennen, wenn man nur bemerkt, wie weit die ganzen Zahlen gehen. Dieſemnach hat der erſte Bruch, der von der linken nach der rechten Hand zu auf die ganzen Zahlen folgt, 10, der zweite 100, der dritte 1000, der vierte 10000, der fünfte 100000, und ſo weiter zu ſeinem Nenner, und es ſind in dem erſten eine, in dem zweiten zwei, in dem dritten drei, in dem vierten vier, und in dem fünften fünf Nulle, und ſo weiter, dieſe aber zeigen an, wie oft die Einheit mit 10 multiplicirt worden iſt. Es kommen alſo in der erſten Stelle nach den ganzen Zahlen von der linken nach der rechten Hand zu die Zähler der Zehnteile, in der zweiten die Zähler der Hundertteile, in der dritten die Zähler der Tauſendteile, und ſo weiter zu ſtehen.

§. 156.

§. 156.

Man kan alſo die Decimalbrüche als ganze Zahlen ſchreiben, und die Nenner weglaſſen, wenn man nur zwiſchen die ganzen Zahlen, und die Zähler der Brüche einen Punct, oder einen Strichen macht, oder aber über den Zähler des kleinſten und lezten Bruchs eine römiſche Ziffer ſchreibet, welche die Zahl der Nullen des Nenners, oder die Zahl der Stelle andeutet, worinnen dieſer Zähler gedacht werden muß, dieſe Ziffer aber nent man die Kennziffer. Wenn man alſo 35 Ganze, und die Brüche $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{6}{1000}$, $\frac{5}{10000}$ und $\frac{9}{100000}$ als ganze Zahlen ſchreiben ſoll; So ſchreibt man dieſe Dinge alſo: 35.34659, oder 35,34659, oder $353465\overset{v}{9}$, und dieſes ſind die ſonſt ſo genanten Decimalzahlen. Um dieſe Zahlen um deſto beſſer überſehen zu können: So macht man bei der lezten Bezeichnung über eine iede Zahl ihre Kennziffer, über die Einer der ganzen Zahlen aber eine o, um dadurch den Anfang der ganzen Zahlen anzuzeigen. Die vorigen Decimalzahlen bezeichnet man demnach ſo: $3\overset{o}{5}\ \overset{I}{3}\overset{II}{4}\ \overset{III}{6}\ \overset{IIII}{5}\ \overset{v}{9}$. Geſchiehet es hierbei, daß von der linken nach der rechten Hand zu zwiſchen den Ganzen, und der lezten Decimalzahl in einer Stelle kein Bruch, und alſo kein Zähler, oder keine Decimalzahl befindlich iſt: So füllet man, damit ieden Zähler, oder iede Decimalzahl in die ihr zugehörige

Stelle komme (§. 154.), dieſe Stelle mit einer Null aus. Soll man demnach 5 ganze Zahlen $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{1000}$ und $\frac{5}{100000}$ als Decimalzahlen ſchreiben; So geſchiehet dieſes dergeſtalt: $\overset{0}{5}\ \overset{I}{2}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{6}\ \overset{IIII}{0}\ \overset{V}{5}$: Und wenn bei den Decimalzahlen keine Ganze ſind, und man will ſich der Kennziffern nicht bedienen; So ſezt man in die Stelle der Ganzen eine Null, $\frac{4}{100}$ und $\frac{6}{10000}$ ſchreibt man demnach ſo: 0.0406.

§. 157.

Aus dem vorhergehenden iſt klar, daß man eine iede Zahl gar leicht in eine gewiſſe Decimalzahl verwandeln kan, wenn man nur ſo viele Nulle an ſie anhängt, als die Zahl der Kennziffer von der Decimalzahl erfordert, in die man die Zahl verwandeln ſoll. Soll man zum Beiſpiel 6 in eine Decimalzahl verwandeln, welche die Kennziffer ||| hat, und 1000 Teile ausdrükt; So hänge man drei Nulle an 6, ſo iſt $6\overset{I}{0}\overset{II}{0}\overset{III}{0}$ die verlangte Decimalzahl: Und wenn man die Nulle wieder abſchneidet; So bekomt man die vorige Zahl wieder. Auf dieſe Art kan man auch einen gemeinen Bruch von ganzen Zahlen leicht in einen Decimalbruch, oder in Decimalzahlen verwandeln, wenn man nur dem Zähler ſo viele Nulle anhängt, bis ſich der Nenner des gemeinen Bruchs in dieſe mit Nullen vermehrte Zahl dividiren

diren läſt, da man dann im Quotienten die Decimalzahl dieſes Bruchs bekomt, welche die Kennziffern der angehängten Nulle hat. Soll zum Exempel $\frac{3}{4}$ in eine Decimalzahl verwandelt werden, und man hängt 3 zwei Nullen an: So bekömt man $\overset{0\,I\,II}{300}$, dividirt man nun dieſe durch den Nenner 4: So iſt $\overset{0\,I\,II}{300} : 4 = \overset{I\,II}{75}$.

Wenn man alſo einen gemeinen Bruch mit einem Decimalbruch, oder einer Decimalzahl vergleichen will: So hat man nur nötig, daß man ienen in eine Decimalzahl verwandelt.

§. 158.

Decimalzahlen zu addiren (§. 74. und 156.).

Aufloſung.

Man ſchreibe die Decimalzahlen, die einerlei Kennziffern haben, unter einander, und addire ſie, wie gewöhnlich, und wie bei den Zahlen im zehnfachen Wachsthum (§. 93.).

Beweis.

Wenn man Brüche zu einander addiren ſoll: So muß man ſie erſt unter einerlei Benennung bringen (§. 130.). Nun ſind aber die Decimalzahlen Brüche, deren Nenner man aus der Stelle erkennet, worinnen der Zähler ſtehet, (§. 155.), und dieſe Stelle zeigt die Kennziffer an (§. 156.), und derohalben

halben muß man auch die Zahlen unter einander ſchreiben, die einerlei Kennziffer haben, wenn man Decimalzahlen addiren will, und alsdann dieſelbe, wie gewöhnlich, addiren.

Exempel.

		0	I	II	III	IIII	V	VI
Soll man zu	3	5	1	0	3	4	6	7
addiren		2	3	0	0	4	5	2
und		1	3	4	5	0	0	0
		0	I	II	III	IIII	V	VI
So iſt die Summe	3	8	7	4	8	9	1	9.

§. 159.

Decimalzahlen zu ſubtrahiren (§. 76. und 156.)

Aufloͤſung.

Die Decimalzahlen, welche einerlei Kennziffern haben, ſchreibe man unter einander, und ſubtrahire, wie gewöhnlich, und wie bei den Zahlen in dem zehnfachen Wachsthum (§. 93.).

Beweis.

Es iſt der vorige, wenn man nur vor addiren, ſubtrahiren ſezzet.

Exempel.

		0	I	II	III	IIII	V	VI
Soll man von	3	4	1	0	3	5	6	9
abziehen		2	0	3	0	5	6	8
		0	I	II	III	IIII	V	VI
So iſt die Differenz	3	2	0	7	3	0	0	1

§. 160.

Decimalzahlen mit einander zu multipliciren (§. 78. und 156.).

Aufloſung.

Man multiplicire die Factores, wie gewöhnlich (§. 78. und 102.), ihre Kennziffern aber addire man, und ſchreibe die Summe über die letzte Ziffer des Products zur linken Hand, alle Kennziffern unter ihr aber, in der Ordnung, wie ſie abnehmen, über die folgenden Zahlen nach der linken Hand.

Beweis.

Wenn man Brüche in einander multipliciren ſoll: So muß man ihre Zähler, und auch ihre Nenner in einander multipliciren (§. 142.). Nun ſind aber die Decimalzahlen Brüche, und derohalben muß man ihre Zähler, und auch ihre Nenner in einander multipliciren, es haben aber die Nenner der Decimalbrüche, 1 und ſo viel Nulle, als die Kennziffer Einheiten hat (§. 155. und 156.), und derohalben darf man auch nur, wenn man die Nenner in einander multipliciren will, die Kennziffern der Factoren addiren: So iſt dieſe Summe das Product der Nenner, und die Kennziffer des Products.

Exem-

Exempel.

```
      0 I II III IIII
      5 3 4  0   5
                 0  I
                 2  I
    ________________
      5 3 4  0   5
  1 0 6 8 1  0
  __________________
    0 I II III IIII V
  1 1 2  1   5   0  5
```

Soll man eine Decimalzahl mit einer ganzen, oder einer ungenanten Zahl multipliciren: So verfahre man, wie vorher, und bezeichne das Product von der rechten nach der linken Hand zu mit den Kennziffern des Multiplicandi.

Exempel.

```
  0 I II III
  3 2 4  5
         3
  __________
  0 I II III
  9 7 3  5
```

§. 161.

Eine Decimalzahl mit einer andern Decimalzahl zu dividiren (§. 80. und 156.).

Auflöſung.

Man dividire die Zahlen wie gewöhnlich (§. 105.), die Kennziffer des Diviſors ziehe man von der Kennziffer des Dividendi ab, und ſchreibe den Reſt über

die rechte Zahl des Quotienten, die Kennziffern unter ihm aber nach ihrer Ordnung, wie ſie abnehmen, über die folgenden Zahlen nach der linken Hand.

Beweis.

Wenn man die Kennziffern des Multiplicators von der Kennziffer des Products abziehet; So bekomt man die Kennziffer des Multiplicandi (§. 98. und 160.): Nimt man aber das Product zum Dividendo, und den Multiplicator zum Diviſor an, und dividirt dieſen in ienen; So erhält man im Quotienten das Multiplicandum (§. 80. und 107.), und derohalben muß man auch die Kennziffer des Diviſors von der Kennziffer des Dividendi abziehen, und mit dem Reſt den Quotienten bezeichnen, wenn man eine Decimalzahl in die andere dividirt.

Exempel.

```
 o  I  II III IIII  v   o  I
11  2  1  5   0   5 : 2  1

   1
  781
1121808  |  o  I  II  III  IIII
 211111  |  5  3  4    0    5
  2222   |
```

Wenn der Diviſor gröſere Kennziffern hat, als der Dividendus: So vermehre man dieſen mit ſo vielen Nullen, bis ſich der Dividendus in ihn teilen läſt.

Exem-

Exempel.

```
o  | ||   o|| ||   | ||
4: 25  =  400: 25
13
28
400  |  | ||
288  |  16
2
```

Soll man eine Decimalzahl mit einer ganzen, oder einer ungenanten Zahl dividiren: So dividirt man, wie vorhin, und bezeichnet den Quotienten von der rechten nach der linken Hand zu mit den Kennziffern des Dividendi.

Exempel.

```
o | ||
8136: 4

 1
8136  |  o | ||
4444  |  2034
```

§. 162.

Es hat die Rechnung mit den Decimalzahlen in der Geometrie, worinnen eine gewiſſe Länge ein Ganzes macht, das man eine Ruthe nennet, die man in zehn Schuhe, und den Schuh in 10 Zoll, und ſo weiter teilet, einen ſehr groſen Nuzzen. Es kan alſo die Kennziffer o Ruthen, die Kennziffer | Schuhe, und die Kennziffer || Zolle, und ſo weiter bedeuten.

C. Von

C.

Von den ſechzigteilichen Brüchen.

§. 163.

Wenn man die Einheit einer ganzen Zahl, durch die Multiplication mit 60, in 60 gleiche Teile, einen ſolchen Teil wieder in 60, und alſo die Einheit des Ganzen in 3600 gleiche Teile, einen ſolchen Teil aber wieder in 60, und alſo die Einheit des Ganzen in 216000 gleiche Teile, und ſo weiter teilet, und von dieſen Teilen ein, oder etliche nimt: So bekomt man lauter ſolche Brüche, wovon der Nenner eines kleinern Bruchs den Nenner des Bruchs von der nächſt gröſeren Teilung 60 mal in ſich begreift, einen ſolchen Bruch aber nent man einen ſechzigteilichen Bruch, oder einen Sexageſimalbruch.

§. 164.

Da der Nenner des erſten Bruchs nach den ganzen Zahlen eine, der Nenner des zweiten zwei, der Nenner des dritten drei, und der Nenner des vierten Bruchs vier Nulle hat, und alſo die Nulle in dem Nenner zeigen, wie oft die Einheit des Ganzen mit 60 multiplicirt worden iſt: So können auch in der erſten Stelle nach den ganzen Zahlen von der linken nach der rechten Hand, die Zähler derer 60 Teile, in der zweiten die Zähler derer 3600 Teile, und in

der dritten die Zähler derer 216000 Teile ſtehen u. ſ. w., und daher kan man, ſo wie bei den zehnteiligen Brüchen, aus der Stelle des Zählers den Nenner eines Sexageſimalbruchs erkennen (§. 155.).

§. 165.

Man kan alſo, wie bei den zehnteilichen Brüchen, die Sexageſimalbrüche als ganze Zahlen ſchreiben, wenn man nur über die Zähler der Brüche die Kennziffern ſchreibet, welche die Zahl der Nulle des Nenners, oder die Zahl der Stelle andeutet, worinnen der Zähler gedacht werden muß, über die ganze Zahlen hingegen eine Nulle ſezzet (§. 156.). Man bedienet ſich hierzu eben der Kennziffern, die man bei den zehnteiligen Brüchen gebrauchet (§. 156.), und man nent die Ganze, die mit Null bemerkt werden, Grade, oder Stunden, die Brüche, welche 60 zum Nenner haben, und mit | bezeichnet werden, Minuten, die Brüche, welche 3600 zum Nenner haben, und mit || bemerkt werden, Secunden, die Brüche, welche 216000 zum Nenner haben, und mit ||| bezeichnet werden, Tertien, und ſo weiter.

Wenn man alſo 21, $\frac{8}{60}$, $\frac{24}{3600}$, und $\frac{59}{216000}$ ſchreiben ſoll; So ſchreibt man dieſe Gröſen dergeſtalt: $\overset{0}{21}\ \overset{I}{8}\ \overset{II}{24}\ \overset{III}{59}$: Und wenn zwiſchen den ganzen Zahlen, und den Brüchen, oder zwiſchen zweien Brüchen ein, oder etliche Brüche von denen zwiſchen ſie

ſie fallenden Nennern, und alſo ein, oder etliche Zähler, oder ein, oder etliche Zahlen Sexageſimalzahlen zwiſchen dieſen Gröſen fehlen; So fült man dieſe Stellen mit Nullen aus (§. 156.). Man ſchreibt alſo 3, $\frac{15}{60}$ und $\frac{50}{216000}$ alſo: $\overset{0}{3}\ \overset{I}{15}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{50}$. Eben ſo ſchreibt man 5, $\frac{10}{216000}$ dergeſtalt $\overset{0}{5}\ \overset{I}{0}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{10}$.

§. 166.

Sexageſimalbrüche zu addiren, zu ſubtrahiren, zu multipliciren, und zu dividiren (§. 74. 76. 78. 80. und 163.).

Auflöſung.

Weil die Regeln aus dem, was wir bisher vorgetragen haben, von ſelbſt klar ſind: So wollen wir nur die Exempel von dieſen Rechnungsarten hierher ſezzen, damit wir alle Weitläuftigkeit vermeiden mögen.

Die Addition der Sexageſimalbrüche.

$$\begin{array}{rrrr} \overset{0}{30} & \overset{I}{55} & \overset{II}{25} & \overset{III}{36} \\ \overset{0}{2} & \overset{I}{25} & \overset{II}{45} & \overset{III}{29} \\ \hline \overset{0}{33} & \overset{I}{21} & \overset{II}{11} & \overset{III}{5} \end{array}$$

(§. 96. und 158.)

Die Subtraction der Sexageſimalbrüche.

$$33^{0}\ 21^{I}\ 11^{II}\ 5^{III}$$
$$2^{0}\ 25^{I}\ 45^{II}\ 29^{III}$$
$$\overline{30^{0}\ 55^{I}\ 25^{II}\ 36^{IIII}}$$ (§. 99. und 159.)

Die Multiplication der Sexageſimalbrüche.

$$5^{0}\ 13^{I}\ 6^{II}\ 15^{III}$$
$$2^{0}\ 5^{I}\ 12^{II}\ 5^{III}$$
$$\overline{\qquad\qquad 26^{III}\ 5^{IIII}\ 31^{V}\ 15^{VI}}$$
$$1^{I}\ 2^{II}\ 37^{III}\ 15^{IIII}\ 0^{V}$$
$$26^{I}\ 5^{II}\ 31^{III}\ 15^{IIII}$$
$$10^{0}\ 26^{I}\ 12^{II}\ 30^{III}$$
$$\overline{10^{0}\ 5^{I}\ 3|21^{II}\ 4^{III}\ 35|^{IIII}\ 31|^{V}\ 15^{VI}}$$ (§. 104. und 160.).

Die Diviſion der Sexageſimalbrüche.

	Diviſor	Dividendus	Quotient
	o I II III	o I II III IIII v vI	
	25 12 5	10 53 21 4 35 31 15	o I II III
das Factum aus dem Quot. in den Diviſor		o I II III	5 13 6 15
		10 26 0 25	
		I II III	
der Reſt		27 20 39	
		I II III IIII	
der folgende Teil		27 20 39 35	
das Factum aus dem Quot. in den Diviſor		I II III IIII	
		27 7 37 5	
		II III IIII	
der Reſt		13 2 30	
		II III IIII v	
der folgende Teil		13 2 30 31	
das Factum aus dem Quot. in den Diviſor		II III IIII v	
		12 31 12 30	
		III IIII v	
der Reſt		31 18 1	
		III IIII v vI	
der folgende Teil		31 18 1 15	
das Factum aus dem Quot. in den Diviſor		III IIII v vI	
		31 18 1 15	
der Reſt		0 0 0 0	(§. 108. und 161.)

 C. Von

C.

Von Erfindung der Gröſen in den Potenzen.

§. 167.

Ein iedes Product, das entſtehet, wenn man eine Zahl ein, oder etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt, nent man überhaupt eine Poteſtät, eine Potenz, oder eine Dignität von der Zahl, die multiplicirt worden, dieſe Zahl aber die erſte Dignität, die Stamgröſe, oder die Wurzel von der Dignität. Wenn man zum Exempel 4 mit 4 multiplicirt; So iſt das Product 16 eine Potenz: Und wenn man 16 noch einmal mit 4 multiplicirt; So iſt 64 auch eine Potenz, und ſo weiter, 4 aber die Wurzel.

§. 168.

Wenn die Wurzel nur einmal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird: So nent man die Dignität, welche herauskomt, die andere Dignität, wenn ſie zweimal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, die dritte, wenn ſie dreimal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, die vierte, und wenn ſie viermal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, die fünfte Dignität, und ſo weiter. Die andere Dignität nent man insbeſondere das Quadrat, die dritte aber den Würfel, oder den Cubus von der Wurzel, und in dieſem Betracht heiſt die Wurzel von dem Quadrat die Quadratwurzel,

die

die Wurzel von dem Cubo aber die Cubikwurzel. Die vierte Dignität nent man auch das Biquadrat. So iſt zum Exempel 5 . 5 = 25, und dieſe Zahl 25 iſt die andere Dignität, oder das Quadrat von 5, die Zahl 5 aber die Quadratwurzel, 5 . 5 . 5 oder 25 . 5 = 125 iſt die dritte Dignität, oder der Cubus von 5, die Zahl 5 aber die Cubikwurzel, 5 . 5 . 5 . 5 oder 125 . 5 = 625 iſt die vierte Dignität, oder das Biquadrat von der Wurzel 5, und 5 . 5 . 5 . 5 . 5 oder 625 . 5 = 3125 iſt die fünfte Dignität von der Wurzel 5.

§. 169.

Wenn eine Wurzel nur aus einem Teil beſtehet: So nent man ſie eine mononomiſche, oder eine uninomiſche Wurzel, wenn ſie aus zwei Teilen beſtehet, eine binomiſche, und wenn ſie aus mehr, als aus zwei Teilen beſtehet, eine polynomiſche Wurzel. Eine Wurzel, die aus drei Teilen beſtehet, nent man auch wol eine trinomiſche, und eine Wurzel, die aus vier Teilen beſtehet, eine Quadrinomiſche Wurzel, beide aber ſind polynomiſche Wurzeln. Es iſt alſo 5 eine mononomiſche, 16 eine binomiſche, 203 eine trinomiſche, und 2153 eine quadrinomiſche Wurzel, es ſind aber die beiden lezteren zugleich polynomiſche Wurzeln.

§. 170.

Weil ein iedes Ganze in beliebige Teile, und das Ganze, das in drei Teile geteilet worden, auch in zwei Teile geteilet werden kan: So kan auch eine iede polynomiſche Wurzel in eine binomiſche verwandelt werden, wenn man ſie, an ſtatt in drei, nur in zwei Teile teilet. So kan zum Exempel die polynomiſche Wurzel 129 in die binomiſche 120 + 9 verwandelt werden, wenn man 120 als den erſten, und 9 als den andern Teil betrachtet.

§. 171.

Da bei der andern Dignität die Wurzel mit ſich ſelbſt, und alſo einmal, bei der dritten die Wurzel zweimal, bei der vierten die Wurzel dreimal, und bei der fünften die Wurzel viermal mit ſich ſelbſt multiplicirt wird (§. 168.): So hat auch die andere Dignität zwei, die dritte drei, die vierte vier, und die fünfte fünf gleiche Factores, die Anzahl der gleichen Factoren einer Potenz aber heiſt ihr **Grad**. Wenn man daher eine gegebene Zahl zu einer gewiſſen Dignität erheben ſoll, und man will dieſelbe nicht multipliciren: So ſchreibt man oben zur rechten Hand an die Zahl eine Ziffer, die den Grad der Dignität ausdrükt, und der **Exponent** genennet wird. Soll man zum Exempel 25 in das Quadrat erheben; So ſchreibt man dieſes alſo 25^2: Und wenn

wenn man 25 in den Cubum erheben ſoll; So ſchreibt man dieſes dergeſtalt 25^3: Wenn man aber 5 in die vierte Dignität erheben ſoll; So ſchreibt man dieſes ſo 5^4.

§. 172.

Wenn man aus einer Zahl eine andere Zahl findet, welche ein= oder etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt, iener Zahl gleich iſt: So ſagt man, daß man die Wurzel ausziehe, und zwar die Quadratwurzel, wenn dieſes bei dem Quadrat geſchiehet, hingegen aber die Cubikwurzel, wenn man dieſe Wurzel aus dem Cubo ziehet.

§. 173.

Wenn man aus einer Dignität die Wurzel ausziehen ſoll, und man will, oder kan dieſelbe nicht ausziehen: So ſezt man vor die Dignität dieſes Zeichen $\sqrt{\ }$, und ſchreibt darüber den Exponenten der verlangten Wurzel, den man bei der Quadratwurzel weglaſſen kan. Soll man zum Exempel aus 6 die Quadratwurzel, oder aus 27 die Cubikwurzel ausziehen: So ſchreibt man dies alſo $\sqrt[2]{6}$ oder $\sqrt{6}$, und $\sqrt[3]{25}$.

§. 174.

Wenn aus einer Zahl eine verlangte Wurzel genau ausgezogen werden kan: So heiſt ſie eine Rational=, und wenn dieſes nicht iſt, eine Irra=

tionalgröſe, eine ſurde Gröſe, oder eine ſtumme Gröſe. Beſonders heiſt eine Zahl, woraus die Quadratwurzel genau ausgezogen werden kan, ein vollkommenes, und wenn dieſes nicht iſt, ein unvollkommenes Quadrat, eben ſo heiſt aber auch eine Zahl, woraus die Cubikwurzel genau ausgezogen werden kan, eine vollkommene, und wenn dieſes nicht geſchehen kan, eine unvollkommene Cubikzahl (§. 168.). Es iſt alſo 4 ein vollkommenes, und 5 ein unvollkommenes Quadrat, und 27 iſt eine vollkommene, 32 aber eine unvollkommene Cubikzahl.

§. 175.

Aus einer Irrationalgröſe kan alſo die Wurzel nicht genau ausgezogen werden, und man muß zufrieden ſein, wenn man ſie nur beinahe, und eine ſolche Anzahl von Einheiten findet, die von der verlangten Wurzel nicht viel unterſchieden iſt. Dieſes kan in dem zehnfachen Wachsthum der Zahlen (§. 52.) dadurch geſchehen, wenn man ſich die Wurzel von dem Teil der Irrationalgröſe, woraus die Wurzel nicht kan ausgezogen werden, als Zehnteilchen gedenket, und daher die Irrationalgröſe durch die Anhängung ſo vieler Nullen, als erfordert werden, um eine Zahl zu einer gewiſſen Decimalzahl in Decimalzahlen zu machen, in eine Decimalzahl verwandelt (§. 154. 156. und 157.).

§. 176.

Wenn man ſich alſo bei einer unvollkommenen Quadratzahl gedenket, die Wurzel von dem Teil dieſer Quadratzahl, woraus die Wurzel nicht kan ausgezogen werden, habe Zehnteilchen; So enthält das Quadrat von dieſem Teil, da 10. 10 = 100 iſt, Hundertteilchen: Und wenn man ſich vorſtelt, die Wurzel von dieſem Teil des Quadrats enthalte Hundertteilchen; So enthält das Quadrat von dieſem Teil, weil 100. 100 = 10000 iſt, Zehntauſendteilchen, und ſo weiter. Hängt man alſo an eine unvollkommene Quadratzahl nur zwei o an; So iſt dieſe Zahl in eine Decimalzahl verwandelt, die Hundertteilchen hat, und es beſtehet die Wurzel dieſer Zahl in der Stelle der Nulle in Zehnteilchen: Und hängt man noch einmal zwei o, und alſo vier o an; So iſt die Quadratzahl eine Decimalzahl, die Zehntauſendteilchen hat, und die Wurzel dieſer Zahl beſtehet in der Stelle der zweiten zwei Nulle in noch zehnmal kleineren Teilchen, und alſo in Hundertteilchen und ſo weiter. So iſt zum Exempel in 13 das vollkommene Quadrat 9, wovon die Wurzel 3 iſt, und es bleiben noch 4 übrig. Gedenkt man ſich nun, daß von 4 die Quadratwurzel Zehnteile habe, und hängt an 13 zwei o; So wird der Teil 4 in Hundertteile, und ſo in Zehntauſendteile verwandelt, wenn man noch zwei o anhängt, da dann die Wurzel

noch

noch zehnmal kleinere, und alſo Hundertteilchen enthält, und ſo weiter.

§. 177.

Gedenket man ſich ferner bei einer unvollkommenen Cubikzahl, daß die Wurzel von dem Teil dieſer Zahl, woraus die Wurzel nicht kan ausgezogen werden, Zehnteilchen habe; So enthält der Cubus von dieſem Teil, da 10. 10. 10 oder 100. 10 = 1000 iſt, Tauſendteilchen, und wenn man ſich vorſtelt, die Wurzel von dieſem Teil des Cubus enthalte Hundertteilchen, ſo enthält der Cubus von dieſem Teil, weil 100. 100. 100 oder 10000. 100 = 1000000, Einmillionteilchen, und ſo weiter. Wenn man daher an eine unvollkommene Cubikzahl nur drei o anhängt; So iſt dieſe Zahl in eine Decimalzahl verwandelt, die Tauſendteilchen hat, und es beſtehet die Wurzel dieſer Zahl in der Stelle der Nulle in Zehnteilchen: Und hängt man noch einmal drei, und alſo ſechs o an; So iſt die Cubikzahl eine Decimalzahl, die Einmillionteilchen enthält, und die Wurzel dieſer Zahl beſtehet in der Stelle der zweiten drei Nulle in noch zehnmal kleineren, und alſo in Hundertteilchen, und ſo weiter. So iſt zum Exempel in 29 der vollkommene Cubus 27, wovon die Wurzel 3 iſt, und es bleiben noch 2 übrig. Gedenkt man ſich nun, daß von 2 die Cubikwurzel Zehnteile habe, und hängt an

29 drei 0; So wird der Teil 2 in Tauſendteile, und ſo in Einemillionteile verwandelt, wenn man noch drei 0 anhängt, da dann die Wurzel noch zehnmal kleinere, und alſo Hundertteilchen enthält, und ſo weiter.

§. 178.

Damit man ſich bei der Auszièhung der Quadrat- und Cubikwurzel deſto geſchwinder helfen könne: So wollen wir die Quadrat- und Cubikzahlen von den Ziffern von 1 bis auf 10 (§. 61. und 62.) in ein Täfelgen ſezzen, und das iſt dieſes:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Aus dieſem Täfelgen iſt zugleich klar, daß alle vollkommene Quadratzahlen am Ende zur rechten Hand die Ziffern 1, 4, 5, 6, 9, und 0, die unvollkommenen aber 2, 3, 7, und 8 haben.

§. 179.

Das Quadrat von einer binomiſchen Wurzel enthält von der linken nach der rechten Hand

zu, das Quadrat des erſten Teils, das zweifache Product aus dem erſten Teil in den andern Teil, und das Quadrat des andern Teils (§. 169.).

Beweis.

Wir wollen den erſten Teil der binomiſchen Wurzel a, und den andern b nennen; So iſt die Wurzel $a + b$: Wenn man nun dieſe Wurzel mit ſich ſelbſt multipliciret; So zeigt das Product alle einzelne Producte von den in einander multiplicirten Teilen (§. 102.).

Multiplicirt man demnach	$a + b$
mit ſich ſelbſt, und alſo mit	$a + b$
	$ab + b^2$
	$a^2 + ab$
So iſt das Product	$a^2 + 2ab + b^2$ (§. 78. 79. 102. und 171.)

Es enthält alſo das Quadrat der binomiſchen Wurzel $a + b$ von der linken nach der rechten Hand zu, das Quadrat des erſten Teils a, nemlich a^2, das zweifache Product aus dem erſten Teil a in den andern Teil b, newlich $2ab$, und das Quadrat des andern Teils b, nemlich b^2.

Um der mehreren Deutlichkeit willen wollen wir annehmen, es ſei der erſte Teil $a = 10$, und der andere Teil $b = 6$; So iſt die Wurzel $a + b = 10 + 6 = 16$.

Wenn

Wenn man alſo
multiplicirt $16=10+6=a+b$
mit ſich ſelbſt, und
mit $16=10+6=a+b$

$36=6.6=36=b.b=b^2$
$6;=10.6=60=a.b=ab$ } $=120=2ab$
$6;=10.6=60=a.b=ab$ }
$1;;=10.10=100=a.a=a^2$

So iſt das Quadrat $256=100+120+36=a^2+2ab+b^2$
(§. 102.)

Oder iſt $a=70$ und $b=6$: So iſt $a+b=70+6=76$.
Multiplicirt
man alſo $76=70+6=a+b$
mit ſich ſelbſt,
und mit $76=70+6=a+b$

$36=6.6=36=b.b=b^2$
$42;=70.6=420=a.b=ab$ } $=840=2ab$
$42;=70.6=420=a.b=ab$ }
$49;=70.70=4900=a.a=a^2$

So iſt das
Quadrat, $5776=4900+840+36=a^2+2ab+b^2$
(§. 102.).

§. 180.

§. 180.

Dieſemnach endiget ſich das Quadrat des anderen Teils, wenn man die unter einander geſchriebene einzelen Producte betrachtet, in der erſten Stelle zur rechten Hand, das Product aus dem erſten Teil in den andern Teil zweimal genommen in der andern Stelle nach der linken Hand, und das Quadrat des erſten Teils in der dritten Stelle von der rechten nach der linken Hand zu.

§. 181.

Weil eine polynomiſche Wurzel in eine binomiſche verwandelt werden kan (§. 169. und 170.): So kan auch das, was im 179. §. erwieſen worden, von allen polynomiſchen, und alſo von allen Wurzeln behauptet werden, die mehr als zwei Teile haben. Wir wollen dieſes durch ein Exempel erläutern. Es ſei 129 eine polynomiſche Wurzel: So kan dieſe in 120 + 9 geteilt werden. Demnach iſt der erſte Teil, der wieder a heiſen ſoll = 120, und der andere, den wir b nennen wollen, = 9.

Multiplicirt
man alſo $129 = 120 + 9 = a + b$
mit ſich ſelbſt,
und mit $129 = 120 + 9 = a + b$

$$81 = 9 \cdot 9 = 81 = b.b = b^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 108, = 120.9 = 1080 = a.b = ab \\ 108, = 120\ 9 = 1080 = a.b = ab \end{array}\right\} = 2160 = 2ab$$

$$144,, = 120.120 = 14400 = a.a = a^2$$

So iſt das
Quadrat $16641 = 14400 + 2160 + 81 = a^2 + 2ab + b^2$
(§. 102.).

§. 182.

Es endiget ſich alſo, wie bei der binomiſchen Wurzel (§. 180.), das Quadrat des andern Teils in der erſten Stelle zur rechten Hand, das zweifache Product aus dem andern in den erſten Teil in der andern, und das Quadrat des erſten Teils in der dritten Stelle von der rechten nach der linken Hand zu. Ueberlegt man nun, daß die Wurzel des erſten Teils auch in zwei Teile, und in Zehn und Zwei geteilt werden kan: So iſt auch nach der zweiten Stelle von der rechten Hand in der erſten Stelle das Ende von dem Quadrat des kleinern Teils, in der zweiten Stelle das Ende vom zweifachen Product aus dem andern in den erſten Teil, und in der dritten Stelle das Ende von dem Quadrat des erſten Teils (§. 180.). Teilt man dieſemnach eine Quadrat,

zahl von der rechten nach der linken Hand zu dergeſtalt in Klaſſen, daß eine iede zwei Ziffern hat: So iſt in der erſten Klaſſe zur linken Hand das Quadrat des gröſern Teils, und in der zweiten Klaſſe in der erſten Stelle nach der rechten Hand das Ende des zweifachen Products aus dem andern in den erſten Teil, in der zweiten Stelle dieſer Klaſſe aber das Ende von dem Quadrat des kleinern Teils, in dieſen beiden vordern Klaſſen iſt aber auch, wenn man die darin enthaltene beiden Wurzelteile, als einen Teil anſieht, wieder enthalten, das Quadrat dieſes erſten Teils, in der folgenden Klaſſe aber das zweifache Product aus dieſem gröſern in den kleinern Teil, und das Quadrat des kleinern Teils, wovon ſich ienes in der erſten, dieſes aber in der andern, oder der rechten Stelle dieſer Klaſſe endiget. So nun verhält es ſich mit allen Quadratzahlen, und wenn auch ihre Wurzeln noch ſo viele Teile haben, weil eine iede polynomiſche in eine binomiſche Wurzel verwandelt werden kan (§. 170.).

§. 183.

Der Cubus von einer binomiſchen Wurzel enthält von der linken nach der rechten Hand zu den Cubum des erſten Teils, das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil, das dreifache Product aus dem Quadrat

Quadrat des andern Teils in den erſten Teil, und den Cubum des andern Teils (§. 169.).

Beweis.

Der erſte Teil der binomiſchen Wurzel ſoll a, und der andere b heiſen; So iſt die Wurzel $a+b$: Wenn man nun dieſe Wurzel mit ſich ſelbſt multiplicirt; So zeigt das Product alle einzelen Producte von den in einander multiplicirten Teilen (§. 102.).

Multiplicirt man demnach	$a+b$
mit ſich ſelbſt, und mit	$a+b$
	$+ab+b^2$
	$+ab$
	a^2
So iſt das Quadrat	$a^2+2ab+b^2$
Und multiplicirt man dieſes	
wieder mit der Wurzel	$a+b$
	$a^2b+2ab^2+b^3$
	$a^3+2a^2b+ab^2$
So iſt der Cubus	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	(§. 78. 79. 102. und 179.)

Es enthält alſo der Cubus der binomiſchen Wurzel $a+b$, den Cubum des erſten Teils a, nemlich a^3, das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils a^2 in den andern Teil b, nemlich $3a^2b$, das dreifache Product aus dem Quadrat des andern Teils b^2 in den erſten Teil a, nemlich $3ab^2$, und den Cubum des andern Teils b, nemlich b^3.

Wir wollen, um dieſe Wahrheit durch Zahlen zu erläutern, annehmen, es ſei der erſte Teil $a=10$ und der andere Teil $b=9$; So iſt die Wurzel $a+b=10+9=19$.

Multiplicirt man alſo mit ſich ſelbſt, und mit $19=10+9=a+b$

$19=10+9=a+b$

$81=9.9=81=b.b=b^2$

9⸗ $=10.9=90=a.b=ab$ } $=180=2ab$

9⸗ $=10.9=90=a.b=ab$

1⸗⸗ $=10.10=100=a.a=a^2$

So iſt das Quadrat $361=100+180+81=a^2+2ab+b^2$ (§. 102.).

Und multiplicirt man dieſes wieder mit der Wurzel $19=10+9=a+b$

$729=81.9=b^2.b=b^3$

162⸗ $=180.9=1620=2ab.b=2ab^2$ } $=2430=3ab^2$

9⸗⸗ $=100.9=900=a^2.b=a^2b$

81⸗ $=81.10=810=a.b^2=ab^2$ } $=2700=3a^2b$

18⸗⸗ $=180.10=1800=2ab.a=2a^2b$

1⸗⸗⸗ $=100.10=1000=a^2.a=a^3$

So iſt der Cubus $6859=1000+2700+2430+729=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§.102.)

Oder wenn man multiplicirt von der Wurzel $70+6$ das Quadrat $5776=4900+840+36=a^2+2ab+b^2$ (§. 179.) mit der Wurzel $76=70+6=a+b$

$216=36.6=b^2.b=b^3$

504⸗ $=840.6=5040=2ab.b=2ab^2$ } $=7560=3ab^2$

294⸗⸗ $=4900.6=29400=a^2.b=a^2b$

252⸗ $=70.36=2520=a.b^2=ab^2$ } $=88200=3a^2b$

588⸗⸗ $=840.70=58800=2ab.a=2a^2b$

343⸗⸗⸗ $=4900.70=343000=a^2.a=a^3$

So iſt der Cubus $438976=343000+88200+7560+216=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§. 102.)

§. 184

§. 184.

Es endiget ſich dieſemnach die Cubiczahl des andern Teils in der erſten Stelle zur rechten Hand, in der andern Stelle nach der linken Hand das Product aus dem Quadrat des andern Teils in den erſten Teil dreimal genommen, in der dritten Stelle, das Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil dreimal genommen, und in der vierten Stelle der Cubus des erſten Teils.

§. 185.

Man kan eine iede polynomiſche Wurzel in eine binomiſche verwandeln (§. 169. und 170.), und daher kan auch das, was im 183. §. erwieſen worden, von allen polynomiſchen, und alſo von allen Wurzeln behauptet werden, die mehr als zwei Teile haben. Auch dieſes wollen wir durch ein Exempel erläutern. Es ſei 129 eine polynomiſche Wurzel: So kan dieſe in 120 + 9 geteilt werden, und es iſt alſo der erſte Teil, der wieder a heiſen ſoll, = 120, und der andere, den wir b nennen wollen, = 9.

Multiplicirt man alſo
von der Wurzel $120+9$
das Quadrat $16641=14400+2160+81=a^2+2ab+b^2$ (§. 181.)
mit der Wurzel $120+9$ $129=120+9=a+b$

$729=81.9=b^2.b=b^3$
$1944- =2160.9=19440=2ab.b=2ab^2$ } $=29160=3ab^2$
$1296-- =14400.9=129600=a^2.b=a^2b$ }
$972- =120.81=9720=a.b^2=ab^2$ } $=388800=3a^2b$
$2592-- =2160.120=259200=2ab.a=2a^2b$ }
$1728--- =14400.120=1728000=a^2.a=a^3$

So iſt der
Cubus $2146689=1728000+388800+29160+729=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (§. 192.)

§. 186.

Es endiget ſich alſo der Cubus des andern Teils, wie bei der binomiſchen Wurzel §. 184., in der erſten Stelle zur rechten Hand, das dreifache Product aus dem Quadrat des andern Teils in den erſten Teil in der andern Stelle, das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil in der dritten Stelle, und der Cubus des erſten Teils in der vierten Stelle. Erwägt man nun, daß die Wurzel des erſten Teils auch in zwei Teile, und in Zehn und Zwei geteilt werden kan; So iſt auch nach der dritten Stelle von der rechten Hand in der erſten Stelle das Ende des Cubus des andern Teils, in der zweiten das Ende des dreifachen Products aus dem Quadrat des andern Teils in den erſten Teil, in der dritten das Ende des dreifachen Products aus dem Quadrat

drat des erſten Teils in den andern Teil, und in der vierten Stelle das Ende des Cubus vom erſten Teil (§. 184.). Wenn man alſo eine Cubiczahl von der rechten ſo in Klaſſen einteilt, daß iede drei Ziffern hat: So iſt in der erſten Klaſſe zur linken der Cubus des erſten Teils, in der zweiten Klaſſe aber in der erſten Stelle nach der rechten Hand das Ende des dreifachen Products aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil, in der zweiten Stelle das Ende von dem dreifachen Product aus dem Quadrat des andern Teils in den erſten Teil, und in der dritten Stelle das Ende des Cubus des andern Teils, in dieſen beiden vorderen Klaſſen aber iſt auch, wenn man die darinnen enthaltene beiden Wurzelteile als einen anſiehet, der Cubus dieſes erſten Teils, in der folgenden das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil, das dreifache Product aus dem Quadrat des andern Teils in den erſten, und der Cubus des kleineren Teils, wovon ſich das erſte Product in der erſten Stelle dieſer Klaſſe nach der rechten Hand, das andere in der zweiten, und der Cubus in der dritten Stelle endiget. So nun verhält es ſich mit allen Cubiczahlen, und wenn die Wurzeln auch noch ſo viele Teile haben, weil eine iede polynomiſche in eine binomiſche Wurzel verwandelt werden kan (§. 170.).

§. 187.

Aus einer vollkommenen Quadratzahl die Quadratwurzel auszuziehen (§. 172. und 174.).

Auflöſung und Beweis.

2) Man teile die gegebene Quadratzahl von der rechten nach der linken Hand zu, vermittelſt kleiner Strichlein, in Klaſſen, und zwar ſo, daß iede Klaſſe zwei Ziffern, oder zwei Zeichen bekomt, ſo hat die Wurzel ſo viele Teile, oder ſo viele Ziffern, als Klaſſen herauskommen, und wenn auch in der erſten Klaſſe der Quadratzahl zur linken nur eine Ziffer iſt (§. 182.)

2) In dem §. 178. angegebenen Täfelgen ſuche man dasienige Quadrat auf, welches der Zahl in der erſten Klaſſe zur linken Hand, ſie mag aus einer, oder aus zwei Ziffern beſtehen, gleich iſt, oder am nächſten komt, und ſchreibe es in der gehörigen Ordnung (§. 66.) unter dieſe Zahl, die Wurzel von dieſem Quadrat aber ſezze man als den erſten Teil der Wurzel hinter die gegebene Quadratzahl, ſo, als wie den Quotienten hinter den Diviſor (§. 105. 179. und 180.).

3) Das in dieſem Täfelgen aufgeſuchte Quadrat ziehe man, wie gewöhnlich, von der darüber ſtehenden Zahl ab (§. 97.), den Reſt aber, wenn was übrig bleibt, ſchreibe man, nebſt den zwei Ziffern aus der folgenden Klaſſe, unter einen unter dieſe Zahlen ge-

machten

gemachten Querſtrichen (§. 179. 180. 181. und 182.)

4) Man duplire den gefundenen erſten Teil der Wurzel, oder nehme ihn zweimal, und ſezze die rechte Zahl von dieſem Product unter die erſte, oder die linke Ziffer der herunter geführten Klaſſe, die folgenden linken Zahlen dieſes Products aber weiter nach der linken Hand zu unter die herunter geſchriebenen Zahlen, dieſes Product nun dividire man, wie gewöhnlich, in die oberen Zahlen (§. 105.), da alsdann der Quotient der andere Teil der Wurzel iſt, den man in den Quotienten, und in die folgende Stelle nach der rechten Hand ſchreibet (§. 179. 180. 181. und 182.). Jezt

5) multiplicire man das vorige Product, oder den iezigen Diviſor mit dem ſo eben gefundenen andern Teil der Wurzel (§. 102.), und ſchreibe das Product dergeſtalt unter die herunter geführte Klaſſe unter einen Querſtrichen, daß die rechte Zahl von dieſem Product unter die linke, oder die erſte Zahl der gedachten Klaſſe, die linke Zahlen von dieſem Product aber weiter nach der linken Hand unter die herunter geſchriebenen Zahlen zu ſtehen kommen (§. 180. und 182.).

6) Das Quadrat von dem gefundenen neuen Quotienten, oder dem andern Teil der Wurzel ſchreibe man von der rechten nach der linken Hand zu alſo unter dieſe Klaſſe, daß deſſen rechte Ziffer unter die rechte, oder die zweite Ziffer, deſſen linke Ziffer aber

unter die linke Zahl dieſer Klaſſe zu ſtehen komt (§. 180 und 182.). Nunmehr

7) addire man das Product aus dem Quotienten in den Diviſor, und das Quadrat des neu gefundenen Quotienten, oder des andern Teils, und ſezze dieſe Summe unter einen Querſtrichen (§. 93.).

8) Dieſe Summe ziehe man von den über ihr ſtehenden Zahlen in dieſer Klaſſe ab, und ſezze den Reſt, wenn noch mehrere Klaſſen da ſind, unter einen Querſtrichen, dazu aber die Zahlen in der nächſtfolgenden Klaſſe (§. 97. 179. 180. 181. und 182.).

9) Alle bisher gefundenen Teile der Wurzel nehme man endlich, wenn noch mehrere Klaſſen da ſind, als den erſten Teil der Wurzel an (§. 182.), und verfahre damit eben ſo, wie wir in der 4. 5. 6. 7. und 8. Regel gewieſen haben, ſo bekomt man die verlangte Wurzel.

Exempel.

Worinnen der erſte Teil a, der andere aber b heiſen ſoll.

1 Regel		1,66,41 | 129
2 Regel	$a.a = a^2 = 1.1 =$	1
3 Regel		66
4 Regel	$a.2 = 2a = 1.2 =$	2
5 Regel	$2a.b = 2ab = 2.2 =$	4
6 Regel	$b.b = b^2 = 2.2 =$	4
7 Regel	$2ab+b2 = 40+4 =$	44
8 Regel		2241
4 Regel	$a.2 = 2a = 12.2 =$	24
5 Regel	$2a.b = 2ab = 24.9 =$	216
6 Regel	$b.b = b^2 = 9.9 =$	81
7 Regel	$2ab+b^2 = 2160+81 =$	2241
8 Regel		0000

§. 188.

Aus einer unvollkommenen Quadratzahl die Wurzel auszuziehen (§. 172. und 174.).

Auflóſung und Beweis.

1) Man ziehe die Quadratwurzel nach den Regeln, die wir in dem 187. §. angegeben haben, ſo weit aus, als man kan.

2) Die Zahl, welche übrig bleibt, verwandele man in eine Decimalzahl, man hänge nemlich zwei, vier, ſechs, und ſo ſtets zwei Nulle mehr an, wenn man die Wurzel ſehr genau ausziehen will, ſo wird die übrigbleibende Zahl in 100, in 10000, in 1000000 Teile,

Teile, und ſo weiter verwandelt, und bei den angehängten zwei Nullen hat die Wurzel dieſes Reſts eine gewiſſe Anzahl von Zehnteilen, bei den angehängten vier Nullen eine ſolche Anzahl von Hunderttteilen, bei den angehängten ſechs Nullen aber eine gewiſſe Anzahl von Tauſendteilen, und ſo weiter, wie man zwei Nulle mehr anhängt (§. 176.).

3) Sind dieſe Nulle angehängt: So verdoppele man bei der erſten Klaſſe der angehängten Nulle alle bisher gefundenen Teile der Wurzel, die man als einen anſiehet (§. 182.), und verfahre, wie in der 4. 5. 6. 7. und 8. Regel des 187. §. gewieſen worden, den neuen Teil der Wurzel aber ſezze man, weil er nur eine gewiſſe Anzahl von Zehnteilen enthält, über einen Strichen, und darunter Zehn (N. 2.), oder man mache zwiſchen ihn, und die ganzen Zahlen einen Punkt, oder ein Strichlein, oder man ſezze über den neuen Teil der Wurzel die Kennziffer I von dem Nenner, und laſſe dieſen weg, damit man dieſen Wurzelteil von den ganzen Zahlen unterſcheiden könne (§. 156.). So nun, wie man

4) bei der erſten Klaſſe mit zwei Nullen verfahren iſt, ſo gehe man auch bei der andern und dritten Klaſſe mit Nullen zu Werk, und ſezze ſtets den neuen Teil über den Strichen an den Zähler, eine Null mehr aber bei ieder Klaſſe an den Nenner (N. 2.), oder die Kennziffer des Nenners über ieden neuen

Teil

Teil der Wurzel (§. 156.), wenn man die Teile der Wurzel, die bei den angehängten Klaſſen mit Nullen heraus kommen, nicht durch einen Punkt, oder einen kleinen Strichen von den ganzen Zahlen der Wurzel unterſcheiden will.

Exempel.

$19,35 \mid 43\frac{988}{1000}$

```
 19,35 |
 16' '
 -----
 335
  8'
 -----
 24'
   9
 -----
 249
--------
   8600 |
    86' |
--------
   774' |
    81  |
--------
   7821 |
----------
   77900 |
    878' |
----------
   7024' |
     64  |
----------
   70304 |
-------------
   759600 |
    8796' |
-------------
   70368' |
       64 |
-------------
   703744 |
-------------
    55856
```

§. 189.

Es iſt hieraus zugleich klar, wie man aus Decimalzahlen die Wurzel ausziehen kan. Weil das Quadrat entſtehet, wenn man die Wurzel mit ſich ſelbſt multipliciret, und alſo die Kennziffer einer Quadratzahl ſtets eine gerade Zahl iſt (§. 160. und 168.): So hänge man an die gegebene Quadratzahl noch eine Nulle mit einer um Eins erhöheten Kennziffer an, wenn die Kennziffer über der lezten Zahl zur rechten Hand eine ungerade Kennziffer iſt, damit die lezte Kennziffer der Quadratzahl gerade iſt, die etwa leeren Stellen zwiſchen zwei Kennziffern in der Quadratzahl aber fülle man mit Nullen aus (§. 156.), und ſezze darüber die Kennziffer, die um eins höher iſt, als die vorgehende. Nunmehr ziehe man die Wurzel, wie im 187. §. aus, und hänge ſtets zwei Nulle, iede mit einer um Eins über die lezte Kennziffer erhöheten Kennziffer zu einer neuen Klaſſe an, wenn ſich die Wurzel nicht genau ausziehen läſt (§. 188.), mit der Hälfte der lezten Kennziffer von der Quadratzahl aber bezeichne man, weil aus der Multiplication der Wurzel durch ſich ſelbſt das Quadrat entſtanden iſt (§. 168.), die rechte Zahl der Wurzel, und ſezze über die folgenden linken Zahlen dieſer Wurzel, die ſtets um Eins verminderte Kennziffer (§. 156.).

Soll

Soll man zum Exempel die Wurzel aus $\overset{0}{4}\overset{II}{2}\overset{V}{4}\overset{VII}{3}$ ausziehen: So hångt man eine Null mit der Kennziffer VIII an, und erſezt die fehlenden Zahlen der Kennziffern I, III, IIII und VI mit Nullen; So iſt die Zahl $\overset{0}{4}\ \overset{I}{0}\ \overset{II}{2}\ \overset{III}{0}\ \overset{IIII}{0}\ \overset{V}{4}\ \overset{VI}{0}\ \overset{VII}{3}\ \overset{VIII}{0}$, aus dieſer nun ziehet man, wie gewöhnlich, die Wurzel (§. 187.), die Kennziffer VIII halbiret man, und bezeichnet mit IIII die erſte Zahl der Wurzel zur rechten Hand, mit der ſtets um Eins verringerten Kennziffer aber die linken Zahlen (§. 156.), da man dann die Wurzel $\overset{0}{2}\ \overset{I}{0}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{5}\ \overset{IIII}{0}$ bekomt, und noch 1530 übrig bleiben, hångt man nun dieſem Reſt noch zwei Nulle mit den Kennziffern VIIII und X an, und ſezt die Ausziehung fort: So bekomt man noch einen Teil der Wurzel, der die Kennziffer V hat, und ſo kan man ſtets zwei Nulle mehr anhången.

§. 190.

Geſchiehet es bei der Ausziehung der Quadratwurzel, daß ſich der Diviſor bei einer herunter geführten Klaſſe, ſie ſeie in der Mitte, oder am Ende, in die über ihm ſtehende Zahlen nicht teilen låſt: So ſchreibt man eine Nulle in den Quotienten, ſezt neben dieſe Klaſſe, wenn noch mehrere Klaſſen folgen, noch eine Klaſſe herunter, und fåhrt alsdenn mit dem Ausziehen der Wurzel, indem man alle Teile der

Wur-

Wurzel, die Nulle mit genommen, dupliret, wie gewöhnlich, fort, aber auch alsdann ſezt man noch eine Null in den Quotienten, wenn ſich der Diviſor noch nicht in die über ihm ſtehenden Zahlen teilen läſt, damit aber hält man ſo lang an, bis der Diviſor in die über ihm ſtehenden Zahlen geteilt werden kan. Trägt es ſich bei der Ausziehung der Quadratwurzel auch zu, daß eine Klaſſe aufgehet, und nichts übrig bleibt, und in den folgenden ſtehen lauter Nulle: So ſchreibt man ſo oft eine Nulle in den Quotienten, als Klaſſen mit Nullen da ſind, damit die Ziffern, der Wurzel in die ihnen zugehörigen Stellen kommen (§. 66.).

§. 191.

Wenn man aus einem Bruch die Quadratwurzel ausziehen ſoll; So ziehe man dieſelbe ſowol aus dem Zähler, als wie aus dem Nenner, und ſchreibe dieſe Wurzeln bruchsweiſe unter einander (§. 110. 111. und 112.): Und ſoll man die Quadratwurzel aus einer gebrochenen Zahl ausziehen (§. 116.); So verwandele man dieſelbe in einen uneigentlichen Bruch (§. 113. und 117.), und ziehe alsdann die Wurzel aus dem Zähler, und dem Nenner, beide aber ſchreibe man auch hierbei bruchsweiſe über einander.

§. 192.

Wenn man eine Probe machen will, ob man recht gerechnet hat: So multiplicirt man die Wurzel

mit ſich ſelbſt, und addiret bei einer unvollkommenen Quadratzahl zu dem Product den Reſt. Iſt nun die Zahl, welche hierbei heraus komt, der gegebenen Zahl gleich, und dabei die unvollkommene Quadratzahl mit ſo viel Nullen vermehrt, als man angehängt hat; So iſt auch recht gerechnet worden: Wo aber nicht; So iſt gefehlet (§. 172.).

§. 193.

Aus einer vollkommenen Kubikzahl die Kubikwurzel *auszuziehen* (§. 172. und 174.).

Auflöſung und Beweis.

1) Man teile die Kubikzahl von der rechten nach der linken Hand zu durch kleine Strichen in Klaſſen, dergeſtalt, daß iede Klaſſe drei Ziffern, oder drei Zeichen bekomt, ſo hat die Wurzel ſo viele Teile, oder ſo viele Ziffern, als Klaſſen heraus kommen, und wenn auch in der erſten Klaſſe zur linken Hand nur eine bis zwei Ziffern ſtehen (§. 186.).

2) In dem Täfelgen, das wir §. 178. angegeben haben, ſuche man diejenige Kubikzahl auf, welche der Zahl in der erſten Klaſſe zur linken Hand, ſie mag aus einer, zwei, oder drei Ziffern beſtehen, gleich iſt, oder am nächſten komt, und ſchreibe dieſelbe in der gehörigen Ordnung (§. 66.) unter dieſe Zahl, die Wurzel von dieſer Kubikzahl aber ſezze man, als den erſten Teil der Wurzel, hinter die gegebene

Kubiczahl, eben ſo, als wie den Quotienten hinter den Dividendum (§. 105. 183. und 184.).

3) Die in dem Täfelgen aufgeſuchte Kubiczahl ziehe man, wie gewöhnlich, von den darüber ſtehenden Zahlen ab (§. 97.), den Reſt aber, wenn was übrig bleibt, ſchreibe man, nebſt den drei Ziffern aus der folgenden Klaſſe, unter einen unter dieſe Zahlen gemachten Querſtrichen (§. 183. 184. 185. und 186.).

4) Den gefundenen Teil der Wurzel erhebe man in ſein Quadrat, und triplire, oder multiplicire denſelben mit drei, dieſes Product aber ſchreibe man dergeſtalt unter die herunter geführte Klaſſe, daß deſſen rechte Zahl unter die erſte, oder die linke Zahl in der herunter geführten Klaſſe, die linke Zahlen von dieſem Product aber weiter nach der linken Hand zu unter die herunter geſchriebenen Zahlen zu ſtehen kommen. Dieſes Product nun dividire man, wie gewöhnlich, in die oberen Zahlen (§. 105.), da alsdann der Quotient der andere Teil der Wurzel iſt, den man in den Quotienten, und in die folgende Stelle nach der rechten Hand ſchreibt (§. 183. 184. 185. und 186.).

5) Das vorige Product, nemlich das dreifache Quadrat des erſten Teils, oder den iezzigen Diviſor multiplicire man mit dem durch die Diviſion ſo eben gefundenen zweiten Teil der Wurzel, und ſchreibe

das

das Product dergeſtalt unter die herunter geführte Klaſſe unter einen Strichen, daß deſſen rechte Zahl unter die linke, oder die erſte Zahl der gedachten Klaſſe, die linke Zahlen aber weiter nach der linken Hand, und unter die folgenden Zahlen zu ſtehen kommen (§. 184. und 186.).

6) Man triplire den erſten Teil der Wurzel, den andern aber erhebe man in das Quadrat, und multiplicire dieſe beide Producte in einander, das Product aber, welches heraus komt, ſchreibe man dergeſtalt unter die herunter geführte Klaſſe, daß deſſen rechte Zahl unter die zweite, oder die mittlere Zahl in dieſer Klaſſe, die linken Zahlen aber weiter nach der linken Hand unter die oberen Zahlen zu ſtehen kommen (§. 184. und 186.).

7) Den andern Teil der Wurzel erhebe man in den Cubum, und ſchreibe ihn dergeſtalt unter die herunter geführte Klaſſe, daß deſſen rechte Zahl unter die rechte, oder die dritte Zahl in dieſer Klaſſe, die darauf folgenden linken Zahlen aber weiter nach der linken Hand unter die oberen Zahlen zu ſtehen kommen (§. 184. und 186.). Nunmehr

8) addire man das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den andern Teil, das dreifache Product aus dem erſten Teil in das Quadrat des andern Teils, und den Cubum des andern Teils, und ſezze dieſe Summe unter einen Querſtrichen (§. 93.)

 9) Dieſe

9) Dieſe Summe ziehe man von den über ihr ſtehenden Zahlen in dieſer Klaſſe ab, und ſezze den Reſt, wenn noch mehrere Klaſſen da ſind, nebſt den Zahlen in der nächſtfolgenden Klaſſe unter einen Querſtrichen (§. 97. 183. 184. 185. und 186.).

10) Alle bis hiehin gefundenen Teile nun nehme man, wenn noch mehrere Klaſſen da ſind, als den erſten Teil der zu ſuchenden Wurzel an (§. 186.), und verfahre damit eben ſo, wie wir in der 4. 5. 6. 7. 8 und 9 Regel gewieſen haben: So bekomt man die verlangte Wurzel.

Exempel.

Worinnen wir den erſten Teil a, den andern aber b nennen wollen.

1 Regel 47,437,928 | 362

2 Regel a. a. a = a^3 = 3. 3. 3 = 27 . . . .

3 Regel 20437 . . .

4 Regel a. a = a^2, a^2. 3 = 3a^2 = 3. 3 = 9, 9. 3 = 27 . . . . .

5 Regel 3 a^2. b = 3 a^2b = 3 a^2b = 27. 6 = 162 . . . . .

6 Regel 3. a = 3a, b. b = b^2, 3 a. b^2 = 3a b^2 = 3. 3 = 9, 6. 6 = 36, 9. 36 = 324 . . . .

7 Regel b. b = b^2, b^2. b = b^3 6. 6 = 36, 36. 6 = 216 . . .

8 Regel 19656 . . .

9 Regel 781928

4 Regel a. a = a^2, a^2. 3 = 3 a^2 = 36. 36 = 1296, 1296. 3 = 3888 . .

5 Regel 3 a^2. b = 3 a^2b = 3888. 2 = 7776

6 Regel 3. a = 3 a, b. b = b^2, 3 a. b^2 = 3 a b^2 = 36. 3 = 108, 108. 4. = 432

7 Regel b. b = b^2, b^2. b = b^3 = 2. 2 = 4, 4. 2 = 8

8 Regel 781928

9 Regel 000000

§. 194.

§. 194.

Aus einer unvollkommenen Kubikzahl die Wurzel auszuziehen (§. 172. und 174.)

Auflöſung und Beweis.

1) Man ziehe die Kubikwurzel nach den Regeln, die wir in dem vorigen §. angegeben haben, ſo weit aus, als wie möglich iſt.

2) Die Zahl, welche übrig bleibt, verwandele man in eine Decimalzahl, man hänge nemlich drei, ſechs, neun, und ſo ſtets drei Nulle mehr an, wenn man die Wurzel ſehr genau ausziehen will, ſo wird die Zahl, welche übrig bleibt, in 1000, in 1000000 in 1000000000 Teile, und ſo weiter verwandelt, und bei den angehängten drei Nullen hat die Wurzel eine gewiſſe Anzahl von Zehnteilen, bei den angehängten ſechs Nullen eine ſolche Anzahl von Hundertteilen, bei den angehängten neuen Nullen eine gewiſſe Anzahl von Tauſendteilen, und ſo weiter, wie man drei Nulle mehr anhängt (§. 177.).

3) Wenn dieſe Nulle angehängt ſind: So erhebe man bei der erſten Klaſſe mit Nullen alle bis hiehin gefundene Teile der Wurzel, die man als einen anſiehet (§. 186.), in das Quadrat, und triplire dieſes Quadrat, nun aber verfahre man wie in der 4. 5. 6. 7. 8 und 9 Regel des vorigen §. gewieſen worden, den neuen Teil der Wurzel aber ſezze man, weil er nur eine gewiſſe Anzahl von Zehn-

teilen enthält, über einen Strichen, und darunter Zehn (N. 2.), oder man mache zwiſchen ihn, und die ganzen Zahlen einen Punkt, oder einen kleinen Strichen, oder man ſezze über den neuen Teil der Wurzel die Kennziffer | des Nenners, und laſſe den Nenner weg, damit man dieſen Teil der Wurzel von den ganzen Zahlen unterſcheiden könne (§. 156.). So nun

4) wie man bei dieſer der erſten Klaſſe mit drei Nullen verfahren iſt, ſo gehe man auch bei der andern, und der dritten Klaſſe mit Nullen zu Werk, und ſezze ſtets den neuen Teil über den Strichen an den Zähler, eine Null mehr aber bei ieder Klaſſe an den Nenner (N. 2.), oder die Kennziffer des Nenners über ieden neuen Teil der Wurzel (§. 156.), wenn man die Teile der Wurzel, die bei den angehängten Klaſſen mit Nullen heraus kommen, nicht durch einen Punkt, oder einen kleinen Strichen von den ganzen Zahlen der Wurzel unterſcheiden will.

Exempel.

```
3,212   | 14 75/100
1
----
2212
 3
----
12
 48
  64
----
1744
--------
 468000
  5881
--------
 41116
  2058
   343
--------
 432523
----------
  35477000
   64827
----------
  324135
   11025
     125
----------
  32523875
----------
   2953125
```

§. 195.

Es erhellet hieraus zugleich, wie man die Kubikwurzel aus Decimalzahlen ausziehen kan. Weil der Cubus entſtehet, wenn man die Wurzel erſt mit ſich ſelbſt, und dann das heraus kommende Quadrat

wieder mit der Wurzel multipliciret, und alſo die Kennziffer einer Kubikzahl ſtets III, VI, VIIII, XII, XV und ſo ſtets drei mehr iſt (§. 160. und 168.): So hänge man an die gegebene Kubikzahl, wenn die lezte Kennziffer der Kubikzahl kleiner iſt, als III, VI, VIIII, XII, XV, und ſo weiter, ſo viele Nulle mit einer um Eins erhöheten Kennziffer an, bis die lezte Kennziffer der Kubikzahl eine von den ſo eben gedachten Kennziffern ausmacht, die leeren Stellen zwiſchen zwei Kennziffern in der gegebenen Kubikzahl aber fülle man mit Nullen aus, und ſezze darüber die Kennziffer, die um Eins höher iſt, als die Kennziffer der vorhergehenden Zahl (§. 156.). Nunmehr ziehe man die Wurzel eben ſo aus, wie in dem 193. §. gelehret worden, und hänge ſtets drei Nulle, iede mit einer um Eins über die lezte Kennziffer erhöheten Kennziffer zu einer neuen Klaſſe an, wenn ſich die Wurzel nicht genau ausziehen läſt (§. 194.), mit dem dritten Teil von der lezten Kennziffer der Kubikzahl aber bezeichne man, weil durch die Multiplication der Wurzel mit ſich ſelbſt, und der Multiplication der Wurzel in das Quadrat die Kubikzahl entſtanden iſt (§. 168.), die rechte Zahl der Wurzel, und ſezze über die folgende linken Zahlen dieſer Wurzel die ſtets um Eins verminderte Kennziffer (§. 156.). Soll man zum Exempel die Wurzel

o II v vIII vIIII x
37 5 8 4 5 6 ausziehen: So hängt man noch eine Null mit der Kennziffer XI, und wieder eine Null mit der Kennziffer XII an, die fehlenden Zahlen der Kennziffern I, III, IIII, VI und VII aber erſezt man mit Nullen. So iſt die Zahl
o I II III IIII v vI vII vIII vIIII x xI xII
37 0 5 0 0 8 0 0 4 5 6 0 0, aus dieſer nun ziehet man, wie gewöhnlich, die Kubikwurzel (§. 193.), die Kennziffer XII dividirt man durch drei, und bezeichnet mit dem Quotienten IIII die erſte Zahl der Wurzel zur rechten Hand, mit der ſtets um Eins verminderten Kennziffer aber die linken Zahlen (§. 156.), da man dann die Wurzel
o I II III IIII
3 3 3 3 3 bekomt, und noch 717441847 übrig bleiben. Wenn man nun dieſem Reſt noch drei Nulle mit den Kennziffern XIII, XIIII und XV anhängt, und die Ausziehung fort ſezt: So bekomt man noch einen Teil der Wurzel, der die Kennziffer V hat, und ſo kan man ſtets drei Nulle mehr anhängen.

§. 196.

Wenn es bei der Ausziehung der Kubikwurzel geſchiehet, daß ſich der Diviſor bei einer herunter geführten Klaſſe, ſie mag in der Mitte, oder am Ende ſein, in die über ihm ſtehenden Zahlen nicht teilen läſt: So ſchreibt man eine Null in den Quo-

tienten, ſezt neben dieſe Klaſſe, wenn noch mehrere Klaſſen folgen, noch eine Klaſſe herunter, und fährt alsdann, indem man alle Teile der Wurzel, die Nulle mitgenommen, in das Quadrat erhebt, und dann dieſes triplirt, wie gewöhnlich fort, aber auch alsdann ſezt man noch eine Null in den Quotienten, wenn ſich der Diviſor noch nicht in die über ihm ſtehenden Zahlen teilen läſt, damit aber hält man ſo lang an, bis der Diviſor in die über ihm ſtehenden Zahlen dividirt werden kan. Geſchiehet es auch bei der Auszziehung der Kubikwurzel, daß eine Klaſſe aufgehet, und nichts übrig bleibt, in dem folgenden aber ſtehen lauter Nulle: So ſchreibt man ſo oft eine Nulle in den Quotienten, als Klaſſen mit Nullen da ſind, damit die Ziffern der Wurzel in die ihnen zugehörigen Stellen kommen (§. 66.).

§. 197.

Soll man aus einem Bruch die Kubikwurzel ausziehen; So ziehe man dieſelbe aus dem Zähler, und auch aus dem Nenner, und ſchreibe dieſe Wurzeln bruchsweiſe unter einander (§. 110. 111. und 112.): Und wenn man die Quadratwurzel aus einer gebrochenen Zahl ausziehen ſoll (§. 116.); So verwandele man dieſelbe in einen uneigentlichen Bruch (§. 113. und 117.), und ziehe alsdann die Wurzel aus dem Zähler, und dem Nenner, beide aber ſchreibe man auch hier bruchsweiſe unter einander.

§. 198.

§. 198.

Will man eine Probe machen, ob man recht gerechnet habe: So erhebe man die Wurzel in den Kubum, und addire bei einer unvollkommenen Kubikzahl dazu den Reſt. Wenn nun die Zahl, welche hierbei heraus komt, der gegebenen Zahl gleich, und wenn dieſelbe eine unvollkommene Kubikzahl geweſen, mit ſo viel Nullen vermehrt iſt, als man angehängt hat; So iſt auch recht gerechnet worden: Wenn aber dieſes nicht iſt; So iſt gefehlet (§. 172.).

Zweitens
von der
Erfindung der Gröſen, die mit einander in einer Verknüpfung ſtehen.

§. 199.

Die Gröſen, welche mit einander in einer Verknüpfung ſtehen, ſind Verhältniſſe, Proportionen, und Progreſſionen. Wir wollen ſie in der Folge erklären, und zeigen, wie man dabei aus bekanten unbekante Gröſen findet.

A.
Von Erfindung der Gröſen in denen Verhältniſſen.

§. 200.

Wenn zwei Gröſen dergeſtalt mit einander verknüpft ſind, daß die Eigenſchaft der einen durch die andere

andere beſtimt wird: So ſagt man, daß dieſe beiden Gröſen, die ſich auf einander beziehen, eine Verhältnis ausmachen. Betrachtet man zum Beiſpiel die Zahlen 5 und 3, in einer Beziehung auf einander, und erwägt, daß 5 um 2 gröſer iſt, als wie 3, oder umgewendet 3 um 2 kleiner iſt, als wie fünf; So machen dieſe Zahlen eine Verhältnis aus: Oder erwägt man, daß 12 die Zahl 4 dreimal in ſich faſt, oder umgewendet 4 in 12 dreimal enthalten iſt; So ſtehen auch dieſe Zahlen in einer Verhältnis.

§. 201.

Die Gröſen, welche die Verhältnis ausmachen, heiſen die **Glieder der Verhältnis**. Die Gröſe nun, welche ſich auf die andere beziehet, heiſt das erſte, dieienige aber, worauf ſich bezogen wird, das andere Glied, ienes heiſt auch das vorhergehende, und dieſes das folgende Glied. Bei den Verhältniſſen 5 und 3, und 12 und 4 ſind alſo 5 und 12 die erſten, 3 und 4 aber die anderen Glieder: Wendet man hingegen dieſe Verhältniſſe um: So ſind dieſe die erſten, und iene die anderen Glieder.

§. 202.

Die Gröſe, welche die Eigenſchaft ausdrukt, die eine Gröſe zu der andern hat, nent man überhaupt den **Exponent**, oder den **Namen der Verhältnis**.

hältnis. Bei der Verhältnis 5 und 3 iſt alſo 2, welche anzeigt. um wie viel 5 gröſer iſt, als wie 3, oder um wie viel 3 kleiner iſt, als wie 5 der Name der Verhältnis. Eben ſo iſt auch bei der Verhältnis 12 und 4 die Zahl 3, welche andeutet, wie vielmal 12 die Zahl 4 in ſich faſt, oder wie vielmal 4 in 12 enthalten iſt, der Name der Verhältnis.

§. 203.

Wenn die Glieder in einer Verhältnis gleich ſind (§. 21.): So nennet man ſie eine **gleiche**, und wenn dieſes nicht iſt, eine **ungleiche Verhältnis**. Die Verhältnis 4 und 4 iſt alſo eine gleiche Verhältnis, 7 und 5, und 3 und 5 aber ſind zwei ungleiche Verhältniſſe. In den leztern heiſt die, worinnen das erſte Glied gröſer iſt, als wie das andere, eine **Verhältnis der Gröſeren**, und die, worinnen dieſes Glied kleiner iſt, als wie das andere, eine **Verhältnis der kleinern Ungleichheit**.

§. 204.

Wann zwei Gröſen eine Verhältnis ausmachen: So ſiehet man entweder darauf, um wie viel nur, oder um wie vielmal das eine Glied gröſer, oder kleiner iſt, als wie das andere, und ienes erfährt man durch die Subtraction, dieſes aber durch die Diviſion, eine Verhältnis von der erſteren Art nun

nent

nent man eine arithmetiſche, eine von der andern Art aber eine geometriſche Verhältnis. Siehet man zum Exempel bei den Zahlen 5 und 3, oder 3 und 5 darauf, um wie viel 5 gröſer iſt, als wie 3, oder um wie viel 3 kleiner iſt, als wie 5; So machen dieſe beiden Gröſen eine arithmetiſche Verhältnis aus: Und erwägt man, wie vielmal 12 gröſer iſt, als wie 4, oder wie vielmal 4 kleiner iſt, als wie 12, das iſt, wie vielmal 12 die Zahl 4 in ſich faſt, oder wie vielmal 4 in 12 enthalten iſt; So iſt dieſes eine geometriſche Verhältnis. Wenn man endlich das Product der erſten Glieder zweier, oder mehrerer Verhältniſſe, mit dem Product der anderen Glieder dieſer Verhältniſſe vergleicht: So ſagt man, daß dieſe Producte eine zuſammengeſezte Verhältnis ausmachen. Iſt nun eine ſolche Verhältnis aus zwei Verhältniſſen, die einerlei Namen haben, zuſammen geſezt; So heiſt ſie eine duplicirte: Und wenn ſie aus drei ſolchen Verhältniſſen zuſammen geſezt iſt; So wird ſie eine triplicirte Verhältnis genent, und ſo weiter.

§. 205.

In der arithmetiſchen Verhältnis zeigt alſo der Name der Verhältnis an, um wie viel nur das eine Glied gröſer iſt, als wie das andere, in der geometriſchen hingegen zeigt derſelbe an, wie vielmal das eine

eine Glied in dem andern enthalten iſt (§. 202.). Bei der arithmetiſchen Verhåltnis nent man den Namen der Verhåltnis auch den Unterſcheid der Verhåltnis (§. 202.).

§. 206.

Die Zahlen, welche eine arithmetiſche Verhåltnis ausmachen, verbindet man mit dem Zeichen der Subtraction (§. 77.), die hingegen, welche in einer geometriſchen Verhåltnis ſtehen, durch zwei Punkten, und alſo durch das Zeichen der Diviſion (§. 81.). Die Zahlen 5 und 3, welche eine arithmetiſche Verhåltnis ausmachen, ſchreibt man demnach alſo: 5 — 3, und die Zahlen 12 und 4, welche in einer geometriſchen Verhåltnis ſtehen, dergeſtalt 12:4.

§. 207.

Wenn man in einer arithmetiſchen Verhåltnis den Namen, oder den Unterſcheid der Verhåltnis von dem gróſeren Glied abziehet (§. 202. und 205.); So komt im Unterſcheid das kleinere Glied heraus: Und wenn man den Namen der Verhåltnis zu dem kleineren Glied addiret; So iſt die Summe das gróſere Glied.

Beweis.

Der Name der Verhåltnis zeigt an, um wie viel ein Glied gróſer iſt, als wie das andere. Wenn man daher das kleinere Glied von dem gróſeren abzie-

abziehet: So findet man den Namen der Verhältnis (§. 76. 202. 204. und 205.), und dieſemnach iſt der Unterſcheid zwiſchen dem Namen der Verhältnis und dem gröſeren Glied, das kleinere Glied, die Summe hingegen von dem Namen der Verhältnis, und dem kleineren Glied das gröſere Glied (§. 74. 76. und 98.).

§. 208.

Wenn man alſo zu dem gröſeren Glied in einer arithmetiſchen Verhältnis, wovon der Name der Verhältnis bekant iſt, das kleine Glied finden ſoll; So ziehe man den Namen der Verhältnis von dem gröſeren Glied ab (§. 97.), ſo iſt die Differenz das kleine Glied: Und wenn man zu dem kleineren Glied in einer arithmetiſchen Verhältnis, wovon der Name der Verhältnis bekant iſt, das gröſere Glied finden ſoll; So addire man dieſen Namen zu dem kleineren Glied (§. 93.), ſo iſt die Summe das gröſere Glied. Soll man zum Exempel zum groſen Glied 7 in der arithmetiſchen Verhältnis, wovon der Name 3 iſt, das kleine Glied finden; So ziehe man 3 von 7 ab, ſo iſt 4 das kleine Glied: Und ſoll man zum kleinen Glied 4 in der arithmetiſchen Verhältnis, wovon der Name 3 iſt, das groſe Glied finden; So addire man 3 und 4, ſo iſt das groſe Glied 7.

§. 209.

§. 209.

Wenn man in einer geometriſchen Verhältnis das groſe Glied durch den Namen der Verhältniß dividiret; So komt im Quotienten das kleine Glied heraus: Und wenn man in einer geometriſchen Verhältnis das kleine Glied durch den Namen der Verhältnis multipliciret; So iſt das Product das groſe Glied.

Beweis.

Der Name der Verhältnis zeigt an, wie vielmal das eine Glied in dem andern enthalten iſt. Wenn man daher das kleine Glied in das groſe dividiret: So komt der Name der Verhältnis heraus (§. 80. 202. 204. und 205.), und dieſemnach iſt das groſe Glied, oder der Dividendus ein Product aus dem Namen der Verhältnis in das kleine Glied (§. 78. und 80.). Wenn man alſo das groſe Glied durch den Nahmen der Verhältnis dividiret; So komt das kleine Glied heraus: Und wenn man das kleine mit dem Namen der Verhältnis multipliciret; So entſtehet das groſe Glied (§. 80. 106. und 107.).

§. 210.

Soll man alſo zu dem gröſeren Glied einer geometriſchen Verhältnis, wovon der Name bekant iſt, das kleine Glied finden; So dividire man dieſen Namen in das gröſere Glied, ſo bekomt man das

kleine Glied: Und ſoll man zu dem kleinen das groſe Glied in einer ſolchen Verhältnis finden, wovon der Name bekant iſt; So multiplicire man dieſen Namen mit dem kleinen Glied, ſo komt das groſe Glied heraus. Soll man zum Exempel zum groſen Glied 16 in der geometriſchen Verhältnis, wovon der Name 8 iſt, das kleine Glied finden; So dividire man 8 in 16, ſo iſt das kleine Glied 2: Und ſoll man zum kleinen Glied 2 in der geometriſchen Verhältnis, und dem Namen 8 das groſe Glied finden; So multiplicire man 2 mit 8, ſo iſt das groſe Glied 16.

§. 211.

Wenn zwei Verhältniſſe einerlei Namen haben: So ſagt man, daß ſie einander ähnlich, oder gleich ſind.

§. 212.

Wenn zwei Verhältniſſe einer dritten gleich ſind: So ſind ſie einander ſelbſt gleich (§. 211.).

Beweis.

Sind zwei Verhältniſſe einer dritten gleich: So iſt eine iede der dritten gleich (§. 211.), und daher kan eine iede vor die dritte geſetzt werden (§. 25.), eben darum aber ſind auch zwei Verhältniſſe, die einer dritten gleich ſind, ſich ſelbſt gleich. Iſt zum Beiſpiel 3:15 gleich 5:25, und auch 4:20 gleich 5:25; So iſt auch 3:15 gleich 4:20.

§. 213.

§. 213.

Wenn man zu den Gliedern in einer arithmetiſchen Verhåltnis gleiches addiret: So verhalten ſich die Summen, wie die Glieder dieſer Verhåltnis.

Beweis.

Wenn man zu den Gliedern einer arithmetiſchen Verhåltnis gleiche Gröſen addirt: So vermehrt man die eine um ſo viele Einheiten, als wie die andere, und derohalben můſſen ſich auch die Summen eben ſo verhalten, wie die Glieder dieſer Verhåltnis (§. 204.).

§. 214.

Wenn man von den Gliedern einer arithmetiſchen Verhåltnis gleiches ſubtrahiret: So verhalten ſich die Differenzen, wie die Glieder dieſer Verhåltnis.

Beweis.

Ziehet man von den Gliedern einer arithmetiſchen Verhåltnis eine gleiche Gröſe ab: So vermindert man die eine um ſo viel, als man die andere vermindert, und derohalben můſſen ſich auch die Differenzen eben ſo verhalten, als wie die Glieder dieſer Verhåltnis (§. 204.).

§. 215.

Wenn man die Glieder einer geometriſchen Verhåltnis durch gleiches multipliciret: So

verhalten ſich die Producte, wie die Glieder dieſer Verhältnis.

Beweis.

Wenn man die Glieder einer geometriſchen Verhältnis durch gleiches multiplicirt: So nimt man ein iedes Glied ſo oft, als die gleiche Zahl Einheiten hat (§. 78.), und derohalben muß auch das eine Product ſo oft in dem andern enthalten ſein, als das eine Glied dieſer Verhältnis in dem andern begriffen iſt (§. 204.).

§. 216.

Wenn man die Glieder einer geometriſchen Verhältnis durch gleiches dividirt: So verhalten ſich die Quotienten wie die dividirten Glieder.

Beweis.

Dividirt man die Glieder einer Verhältnis durch gleiches, und multiplicirt die Quotienten in den Diviſor: So kommen die Dividendi heraus (§. 106. und 107.), und daher kan man die Dividendi, als ſolche Producte anſehen, welche entſtehen, indem man die Quotienten durch den Diviſor, als eine dritte Zahl multiplicirt. Nun verhalten ſich aber die Producte, wie die multiplicirten Glieder der Verhältnis (§. 215.), und derohalben verhalten ſich auch die Quotienten, wie die Glieder

einer

einer geometriſchen Verhältnis, wenn man dieſe durch gleiches dividirt.

B.

Von Erfindung der Gröſen in den Proportionen.

§. 217.

Wenn zwei Verhältniſſe einander ähnlich, oder gleich ſind (§. 211.): So machen dieſe Verhältniſſe eine Proportion aus. Es ſind alſo in einer ieden Proportion zwei Verhältniſſe, und weil eine iede aus zwei Gliedern beſtehet (§. 201.), in einer Proportion vier Glieder, nemlich das erſte und das andere in der erſten, und das erſte und das andere in der zweiten Verhältnis, wovon das erſte in dieſer Verhältnis das dritte, und das andere das vierte Glied der Proportion heiſt. Das erſte und das vierte Glied nent man gemeiniglich die äuſeren, das andere und das dritte aber die mitleren Glieder. Sowol die vorhergehenden, als die folgenden Glieder in einer Proportion heiſen die gleichnamigen Glieder (§. 201.)

§. 218.

Wenn in einer Proportion das andere Glied dem dritten Glied gleich iſt (§. 21.): So nent

man die Proportion eine ſtetige, oder eine zuſammenhängende Proportion, oder eine Proportio continua: Und wenn dieſes nicht iſt; So wird ſie eine unſtetige Proportion, oder eine Proportio diſcreta genennet.

§. 219.

Die Zahl, welche in der Proportio continua das andere und das dritte Glied ausmacht, heiſt die mittlere Proportionalzahl, das vierte Glied aber ſowol in der Proportio continua, als diſcreta die vierte Proportionalzahl.

§. 220.

Weil eine iede Verhältnis entweder arithmetiſch, oder geometriſch iſt (§. 204.), und eine Proportion aus zwei gleichen Verhältniſſen beſtehet (§. 217.): So iſt auch eine iede Proportion entweder arithmetiſch, oder geometriſch, und es machen alſo zwei gleiche arithmetiſche Verhältniſſe eine arithmetiſche, zwei gleiche geometriſche Verhältniſſe hingegen eine geometriſche Proportion aus. Iſt alſo 9 um ſo vielmal gröſer als 5, als 7 gröſer iſt als wie 3, oder 5 um ſo viel kleiner als 9, als 3 kleiner iſt als 7; So machen dieſe Verhältniſſe eine arithmetiſche Proportion aus: Faſt hingegen 16 die Zahl 4 ſo oft in ſich, als 20 die Zahl 5 in ſich begreift, oder iſt 4 in 16 ſo vielmal enthalten, als 5 in 20 begriffen iſt;

So

So machen dieſe Verhåltniſſe eine geometriſche Proportion aus (§. 203.), und in allen dieſen Exempeln ſagt man, das erſte Glied verhålt ſich zu dem andern, wie das dritte zum vierten, nemlich 9 verhålt ſich zu 5, wie 7 zu 3, oder 5 verhålt ſich zu 9, wie 3 zu 7, und 16 verhålt ſich zu 4, wie 20 zu 5, oder 4 verhålt ſich zu 16, wie 5 zu 20.

§. 221.

Da eine iede Proportion entweder continua, oder diſcreta iſt (§. 218.): So iſt auch ſowol die arithmetiſche, als die geometriſche Proportion entweder continua, oder diſcreta, und es iſt demnach eine arithmetiſche Proportion continua, wenn das andere und das dritte Glied einander gleich ſind, eben ſo iſt auch die geometriſche Proportion continua, wenn das andere Glied dem dritten gleich iſt, diſcreta hingegen ſind dieſe Proportionen, wenn das andere und das dritte Glied ungleich ſind (§. 21.). Wenn alſo 5 um ſo viel gröſer iſt, als wie 3, als 3 gröſer iſt als 1; So machen dieſe Verhåltniſſe eine arithmetiſche Proportio continua aus: Und wenn 16 die Zahl 8 ſo oft in ſich faſt, als 8 die Zahl 4 in ſich begreift; So machen dieſe Verhåltniſſe eine geometriſche Proportio continua aus. Iſt hingegen 9 um ſo viel gröſer als 7, als 5 gröſer iſt als 3, und 3 ſo viel mal in 9 enthalten, als 5 in 15 enthalten iſt; So

machen die erſteren Verhältniſſe eine arithmetiſche Proportio diſcreta, die andere hingegen eine geometriſche Proportio diſcreta aus.

§. 222.

In der arithmetiſchen Proportio continua heiſt das andere Glied, welches zugleich das dritte Glied ausmacht, die mittlere arithmetiſche, das andere Glied hingegen, welches in der geometriſchen Proportio continua zugleich das dritte Glied iſt, die mitlere geometriſche Proportionalzahl (§. 219.). In der arithmetiſchen Proportion heiſt das vierte Glied, wenn die Proportio continua iſt, die dritte, in der Proportio diſcreta aber die vierte arithmetiſche Proportionalzahl. Eben ſo nent man auch in der geometriſchen Proportion, die continua iſt, das vierte die dritte, in der geometriſchen Proportio diſcreta hingegen das vierte die vierte geometriſche Proportionalzahl.

§. 223.

Weil in einer ieden Proportion zwei Verhältniſſe einander gleich ſind (§. 217.): So kan man auch zwei Verhältniſſe, die eine Proportion ausmachen, durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbinden (§.22.). Da man nun die arithmetiſchen Verhältniſſe durch das Zeichen der Subtraction,

die

die geometriſchen aber durch das Zeichen der Diviſion mit einander verbindet (§. 206.): So kan man auch eine arithmetiſche Proportion dadurch leicht ausdrukken, wenn man die Glieder der Verhältnis mit dem Zeichen der Subtraction, beide Verhältniſſe aber mit dem Zeichen der Gleichheit verbindet, eben ſo kan man auch die geometriſche Proportion leicht anzeigen, wenn man die Glieder der Verhältniſſe mit dem Zeichen der Diviſion, beide Verhältniſſe aber mit dem Zeichen der Gleichheit verknüpft. Verhält ſich alſo in einer arithmetiſchen Proportion 15 zu 13., wie 11 zu 9; So ſchreibt man dieſes ſo 15 — 13 = 11 — 9: Und verhält ſich in einer geometriſchen Proportion 24 zu 8 wie 18 zu 6; So drukt man dieſes ſo aus 24 : 8 = 18 : 6. Anſtatt des Zeichens der Gleichheit bedient man ſich auch in der arithmetiſchen Proportion dieſer drei Punkten ·:·, in der geometriſchen hingegen dieſer vier Punkten ::, die angeführte erſte Proportion würde alſo ſo ausgedrukt 15 - 13 ·:· 11 - 7, die andere hingegen dergeſtalt 24 : 8 :: 18 : 6. Die arithmetiſche Proportio continua, die zum Exempel 3 — 8 = 8 — 13 ſein ſoll, iſt zuweilen ſo ausgedrukt ∸ 3 . 8 . 13, oder = 3 — 8 — 13, und die geometriſche Proportio continua, die 4 : 8 = 8 : 16 ſein mag, iſt nicht ſelten ſo geſchrieben ∺ 4 . 8 . 16, oder = 4 : 8 : 16.

§. 224.

In einer arithmetiſchen Proportion iſt die Summe der beiden äuſerſten Glieder der Summe der mittleren Glieder gleich (§. 217.).

Beweis.

Wenn die Verhältniſſe, welche die Proportion ausmachen, gleiche Verhältniſſe ſind (§. 203.): So iſt das erſte und das andere, und das dritte und das vierte Glied gleich (§. 217.): Addirt man daher die äuſerſten, und auch die mittelſten; So addirt man gleiches zu gleichem, und derohalben ſind auch die Summen gleich (§. 85.). Sind die Verhältniſſe ungleich (§. 203.); So beſtehet in der kleineren Verhältnis das andere Glied aus dem erſten, und dem Namen der Verhältnis, und das vierte aus dem dritten Glied, und dem Namen der Verhältnis, in der gröſeren Verhältnis hingegen entſtehet das andere Glied, wenn man den Namen der Verhältnis von dem erſten Glied, und das vierte, wenn man eben den Namen der Verhältnis von dem dritten Glied abziehet (§. 207. 208. und 217.). Addirt man daher bei den Verhältniſſen der kleinern Ungleichheit die äuſerſten Glieder; So addirt man das erſte und das dritte Glied, und den Namen der Verhältnis: Und addirt man die mittleren; So addirt man das erſte, den Namen der Verhältnis, und das dritte Glied, und alſo in beiden Fällen gleiches zu

gleichem,

gleichem, und derohalben ſind auch die Summen gleich (§. 85.). Addirt man endlich bei den Verhältniſſen der gröſeren Ungleichheit das erſte und das vierte Glied; So addirt man das erſte und das dritte Glied weniger dem Namen der Verhältnis: Und addirt man das andere und das dritte Glied; So addirt man auch das erſte und das dritte Glied weniger dem Namen der Verhältnis, folglich in beiden Fällen gleiches zu gleichem (§. 87.), und derohalben ſind auch die Summen gleich (§. 85.). Addirt man zum Beiſpiel in der arithmetiſchen Proportion 9—6 =5—2, die äuſern Glieder 9 und 2, und die mittleren 6 und 5: So ſind die Summen 11 und 11 einander gleich.

§. 225.

In einer arithmetiſchen Proportio continua iſt alſo die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl, weil ſie zugleich das andere, und das dritte Glied vertritt (§. 222.), zweimal genommen der Summe der äuſern Glieder gleich.

§. 226.

Wenn alſo von vier Zahlen die Summen der äuſeren und der mittleren Zahlen gleich ſind: So machen dieſe eine arithmetiſche Proportion aus.

§. 227.

§. 227.

Wenn zwei Summen einander gleich ſind: So kan man auch aus ihnen eine arithmetiſche Proportion machen.

§. 228.

In einer geometriſchen Proportion iſt das Product der beiden äuſeren Glieder dem Product der mittleren Glieder gleich (§. 217.).

Beweis.

Wenn die Verhältniſſe, welche die Proportion ausmachen, gleiche Verhältniſſe ſind (§. 203.): So iſt das erſte und das andere Glied, und das dritte und das vierte Glied gleich (§. 217.). Multiplicirt man daher die äuſerſten und die mittleren Glieder: So multiplicirt man gleiches mit gleichem, und derohalben ſind auch die Producte der äuſerſten und der mittleren Glieder einander gleich (§. 89.). Sind die Verhältniſſe der Proportion ungleich (§. 203.): So entſtehet in der kleineren Verhältnis das andere Glied, wenn man das erſte mit dem Namen der Verhältnis multiplicirt, und das vierte, wenn man das dritte mit eben dem Namen der Verhältnis multiplicirt, in der gröſeren Verhältnis hingegen entſtehet das andere Glied, wenn man das erſte durch den Namen der Verhältnis dividirt, und das vierte, wenn man das dritte durch eben den Namen der Ver-

Verhältnis dividirt (§. 209. 210. und 217.). Multiplicirt man dieſemnach bei den Verhältniſſen der kleineren Ungleichheit das erſte mit dem vierten Glied; So entſtehet das Product aus dem erſten Glied, dem dritten Glied, und dem Namen der Verhältnis: Und multiplicirt man das andere mit dem dritten; So entſtehet das Product ebenwol aus dem erſten Glied, dem dritten Glied, und dem Namen der Verhältnis, und darum ſind auch die Producte der äuſeren, und der mittleren Glieder einander gleich (§. 89.). Multiplicirt man bey den Verhältniſſen der gröſeren Ungleichheit das erſte und das vierte Glied; So multiplicirt man das erſte und das dritte Glied dividirt durch den Namen der Verhältnis: Und multiplicirt man das andere und das dritte Glied; So multiplicirt man auch das erſte und das dritte Glied dividirt durch den Namen der Verhältnis, folglich in beiden Fällen gleiches mit gleichem (§. 91.), und derohalben ſind auch die Producte der äuſeren und der mittleren Glieder einander gleich (§. 89.). Multiplicirt man zum Exempel in der geometriſchen Proportion 3 : 15 = 5 : 25 die äuſeren Glieder 3 und 25, und die mittleren 15 und 5: So ſind die Producte 75 und 75 einander gleich.

§. 229.

Weil in einer geometriſchen Proportio continua die mittlere geometriſche Proportionalzahl zugleich

die

die Stelle des andern und des dritten Glieds vertritt (§. 222.): So iſt auch ihr Quadrat dem Product der äuſeren Glieder gleich.

§. 230.

Wenn alſo von vier Zahlen die Producte der äuſeren, und der mittleren Glieder gleich ſind: So machen dieſe eine geometriſche Proportion aus.

§. 231.

Wenn zwei Producte einander gleich ſind: So kan man auch aus ihnen eine Proportion machen, in der ſtets das eine Product die äuſeren Glieder gibt, wenn das andere die mittleren ausmacht.

§. 232.

In einer ieden arithmetiſchen Proportion verhält ſich das erſte Glied zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten (§. 217.).

Beweis.

Wenn die Verhältniſſe, welche die Proportion ausmachen, gleiche Verhältniſſe ſind (§. 203.): So iſt das erſte und das andere, und das dritte und das vierte Glied gleich (§. 217.), das erſte und das dritte, und das andere und das vierte machen alſo einerlei Verhältniſſe aus, und daher verhält ſich auch das erſte zum dritten, wie das andere zu dem vierten.

Wenn

Wenn die Verhältniſſe, welche eine Proportion ausmachen, ungleich ſind (§. 203.): So beſtehet in der Verhältnis der kleineren Ungleichheit das andere Glied aus dem erſten Glied und dem Namen der Verhältnis, und das vierte aus dem dritten Glied und dem Namen der Verhältnis, in der Verhältnis der gröſeren Ungleichheit hingegen entſtehet das andere Glied, wenn man den Namen der Verhältnis von dem erſten Glied abziehet, und das vierte, wenn man eben den Namen der Verhältnis von dem dritten Glied ſubtrahirt (§. 207. 208. und 217.). In den Verhältniſſen der kleineren Ungleichheit ſind alſo das erſte und das dritte Glied zwei Zahlen, wozu man gleiches, nemlich den Namen der Verhältnis, addirt hat, und das andere und das vierte Glied ſind die daher entſtandenen Summen, eben darum aber verhält ſich auch das erſte zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten Glied (§. 213.). In den Verhältniſſen der gröſeren Ungleichheit hingegen ſind das erſte und das dritte Glied zwei Zahlen, wovon man gleiches, nemlich den Namen der Verhältnis, abgezogen hat, und das andere und das dritte Glied ſind die daher entſtandenen Differenzen, und daher verhält ſich auch das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten (§. 214.). In der arithmetiſchen Verhältnis 15 — 12 = 6 — 3 verhält ſich alſo 15 — 6 = 12 — 3.

§. 233.

In einer ieden geometriſchen Proportion verhält ſich das erſte Glied zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten (§. 217.).

Beweis.

Wenn die Verhältniſſe, welche die Proportion ausmachen, gleiche Verhältniſſe ſind (§. 203.): So iſt das erſte und das andere, und das dritte und das vierte Glied gleich (§. 217.), das erſte und das dritte, und das andere und das vierte machen alſo einerlei Verhältnis aus, und daher verhält ſich auch das erſte zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten. Sind die Verhältniſſe, welche eine Proportion ausmachen, ungleich (§. 203.): So entſtehet bei den Verhältniſſen der kleineren Ungleichheit das andere Glied, wenn man das erſte Glied mit dem Namen der Verhältnis multiplicirt, und das vierte, wenn man das dritte mit eben dem Namen der Verhältnis multiplicirt, das andere hingegen in den Verhältniſſen der gröſeren Ungleichheit erwächſt, wenn man das erſte durch den Namen der Verhältnis dividirt, und das vierte, wenn man das dritte durch eben den Namen der Verhältnis dividirt (§. 209. 210. und 217.). In den Verhältniſſen der kleineren Ungleichheiten ſind alſo das erſte und das dritte Glied zwei Zahlen, die durch gleiches, nemlich den Namen der Verhältnis multiplicirt worden, das andere und

das

das vierte Glied hingegen ſind die daher entſtandenen Producte, und daher verhält ſich auch das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten (§. 215.). In den Verhältniſſen der gröſeren Ungleichheit können endlich das erſte und das dritte Glied als zwei Zahlen angeſehen werden, die durch gleiches, nemlich den Namen der Verhältnis, dividirt worden, das andere und das vierte Glied aber ſind die daher entſtandenen Quotienten, und daher verhält ſich auch das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten (§. 216.). In der geometriſchen Proportion 6 : 18 = 3 : 9 verhält ſich alſo auch 6 : 3 = 18 : 9.

§. 234.

Zwiſchen zwei gegebenen Zahlen die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zu finden (§. 222).

Aufloſung.

Man addire die beiden gegebenen Zahlen, und halbire ſie, oder dividire die Summe durch 2: So iſt der Quotient die verlangte Zahl (§. 80. 93. und 105.).

Beweis.

In der arithmetiſchen Proportio continua iſt die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zweimal genommen der Summe der äuſern Glieder gleich (§. 225.). Wenn man daher die beiden äuſeren

Glieder addirt, und die Summe durch 2 dividirt: So iſt der Quotient die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl. Addirt man zum Exempel die Zahlen 5 und 7, und dividirt die Summe 12 durch 2: So iſt 6 die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl, und die Proportion dieſe 5–6=6–7, oder 7–6=6–5.

§. 235.

Zu zwei gegebenen Zahlen die mittlere geometriſche Proportionalzahl zu finden (§. 222.).

Auflöſung.

Man multiplicire die beiden gegebenen Zahlen mit einander, und ziehe aus dem Product die Quadratwurzel: So iſt dieſe die verlangte mittlere geometriſche Proportionalzahl (§. 78. 102. 187. und 188).

Beweis.

In der geometriſchen Proportio continua iſt das Quadrat der mittleren geometriſchen Proportionalzahl dem Product der äuſeren Glieder gleich (§. 229). Wenn man daher die gegebenen Zahlen in einander multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel ziehet: So bekomt man die mittlere geometriſche Proportionalzahl. Multiplicirt man zum Beiſpiel 8 und 18, und ziehet aus dem Product 144 die Quadratwurzel: So iſt 12 die mittlere geometriſche Proportionalzahl, und die Proportion dieſe 8 : 12=12 : 18, oder 18 : 12=12 : 8.

§. 236.

§. 236.

Zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithmetiſche Proportionalzahl zu finden (§. 222.).

Erſte Aufloſung.

Man addire das andere, und das dritte Glied (§. 93.), und ziehe von der Summe das erſte Glied ab (§. 97.): So iſt der Reſt die verlangte Zahl.

Beweis.

Die Summe der mittleren Glieder in einer arithmetiſchen Proportion iſt der Summe der äuſeren Glieder gleich (§. 224.), und daher iſt die Summe des andern, und des dritten Glieds eine Summe, die aus dem erſten und dem vierten Glied zuſammengeſezt iſt. Ziehet man daher das erſte Glied von dieſer Summe ab: So bleibt das vierte Glied übrig (§. 98.).

Exempel.

$$8 - 5 = 9 - x$$

9	14
5	8
14	6 das vierte Glied.

Andere Aufloſung.

1) Wann die erſte Verhältnis der Proportion gleich iſt; So iſt das dritte auch das vierte Glied (§. 203. und 217.).

2) Wenn die erſte Verhältnis in der Proportion ungleich iſt (§. 203.): So ziehe man das kleine Glied

von dem groſen ab, ſo bekomt man den Namen der Verhältnis (§. 208.), dieſen nun addire man in der Verhältnis der kleineren Ungleichheit zu dem dritten Glied, in der Verhältnis der gröſeren Ungleichheit, hingegen ſubtrahire man denſelben von dieſem, dem dritten Glied, ſo iſt im erſten Fall die Summe, im andern aber die Differenz das vierte Glied.

Exempel.

$$5 - 7 = 9 - x$$

7	9
5	2
2	11 das vierte Glied.

Oder

$$7 - 5 = 11 - x$$

7	11
5	2
2	9 das vierte Glied.

Beweis.

Dieſer iſt aus dem 207. 208. und 217. §. klar.

§. 237.

Weil ſich in einer ieden arithmetiſchen Proportion das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten verhält (§. 232.): So kan man auch das dritte Glied vor das andere, und das andere vor das dritte annehmen, und alsdann ſo, wie in der andern Auflöſung des vorhergehenden §. verfahren.

§. 238.

§. 238.

In der arithmetiſchen Proportio continua addirt man dieſemnach, wenn man zu zwei Zahlen die dritte arithmetiſche Proportionalzahl finden ſoll (§. 221. und 222.), nur das andere Glied zu ſich ſelbſt, und ziehet davon das erſte ab, ſo erhält man das Verlangte, oder man addirt den Namen der Verhältnis zu dem andern Glied, oder ſubtrahirt ihn davon: So bekomt man im erſten Fall in der Verhältnis der kleineren, im anderen aber in der Verhältnis der gröſeren Ungleichheit die dritte Proportionalzahl.

§. 239.

Wie man zu dem andern, dem dritten, und dem vierten Glied das erſte, zu dem erſten, dem dritten, und dem vierten das andere, und zu dem erſten, dem andern, und dem vierten das dritte Glied finden ſoll, das iſt vor ſich klar, und es werden alle dieſe Aufgaben dadurch aufgelöſt, wenn man nach der erſten Auflöſung des 236. §. die gegebenen mittleren, oder die äuſeren Glieder addirt, und von der Summe das eine gegebene äuſere, oder mittlere Glied abziehet, nach der andern Auflöſung hingegen werden dieſe Aufgaben aufgelöſt, wenn man in der allemal gegebenen einen Verhältnis der Proportion das kleinere von dem gröſeren Glied abziehet, und den Reſt, welcher der Name der Ver-

 hältnis

hältnis iſt, zu dem einen gegebenen äuſeren, oder dem mittleren Glied addiret, wenn es das kleinere Glied iſt, das man finden ſoll, hingegen aber dieſen Namen davon ſubtrahiret, wenn man das gröſere Glied finden will (§. 208.).

§. 240.

Zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl zu finden (§. 222.).

Erſte Auflöſung.

Man multiplicire das andere mit dem dritten Glied (§. 102.), und dividire das Product durch das erſte Glied (§. 105.): So iſt der Quotient die verlangte vierte geometriſche Proportionalzahl.

Beweis.

Das Product der mittleren Glieder iſt dem Product der äuſeren Glieder gleich (§. 228.), und daher iſt das Product der mittleren Glieder ein Product, das aus dem erſten, und dem vierten Glied zuſammen geſezt iſt. Dividirt man daher dieſes Product durch das erſte Glied: So komt auch das vierte Glied heraus (§. 106. und 107.).

Exempel.

$$6 : 12 = 9 : x$$

```
   12
    9        4
  ---
  108      1̸0̸8 | 18 das vierte
            6̸6̸ |    Glied.
```

Andere

Andere Auflöſung.

1) Wenn die erſte Verhältnis der Proportion gleich iſt: So iſt auch das dritte das vierte Glied (§. 203. und 217.).

2) Wenn hingegen die erſte Verhältnis der Proportion ungleich iſt (§. 203.): So dividire man das kleine Glied in das groſe; So bekomt man den Namen der Verhältnis (§. 210.): Mit dieſem nun multiplicire man in der Verhältnis der kleineren Ungleichheit das dritte Glied (§. 202.), in der gröſeren Verhältnis der Ungleichheit hingegen dividire man denſelben in das dritte Glied (§. 105.); So iſt im erſten Fall das Product, im andern aber der Quotient die geſuchte vierte Proportionalzahl.

Beweis.

Dieſer iſt aus dem 209. und 210. und 217. §. klar.

Exempel.

$3 : 12 = 8 : x$

$\not{1}\not{2} \,/\, \not{3} \mid 4$ $\quad 8 \times 4 = 32$ das vierte Glied.

Oder

$12 : 3 = 32 : x$

$\not{1}\not{2} \,/\, \not{3} \mid 4 \qquad \not{3}\not{2} \,/\, \not{4} \mid 8$ das vierte. Glied.

§. 241.

Da ſich in einer ieden geometriſchen Proportion das erſte Glied zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten verhält (§. 233.): So kan man auch das dritte vor das andere, das andere hingegen vor das dritte annehmen, und alsdann nach der zweiten Auflöſung des vorhergehenden §. zu Werk gehen.

§. 242.

Wenn man dieſemnach in einer geometriſchen Proportio continua zu zwei Zahlen die dritte geometriſche Proportionalzahl finden ſoll (§. 221. und 222.); So multiplicire man das andere Glied mit ſich ſelbſt, und dividire in dieſes Quadrat das erſte Glied, ſo erhält man die dritte Proportionalzahl, oder man multiplicire: Oder dividire den Namen der Verhältnis in das andere Glied; So bekomt man im erſten Fall in der Verhältnis der kleineren, im andern aber in der Verhältnis der gröſeren Ungleichheit die geſuchte dritte Proportionalzahl.

§. 243.

Es läſt ſich aus dem, was wir bisher vorgetragen haben, leicht begreifen, wie man zu dem andern dem dritten und dem vierten Glied das erſte, zu dem erſten dem dritten und dem vierten das andere, und zu dem erſten dem andern und dem vierten

ten das dritte Glied finden ſoll. Es werden aber alle dieſe Aufgaben nach der erſten Auflöſung des 240. §. dadurch aufgelöſt, wenn man die gegebenen mittleren, oder äuſeren Glieder in einander multiplicirt, und das Product durch das eine gegebene äuſere, oder mittlere Glied dividirt, nach der andern Auflöſung dieſes §. hingegen werden dieſe Aufgaben aufgelöſt, wenn man in der allemal gebenen einen Verhältnis der Proportion das kleine Glied in das groſe dividirt, und den Quotienten, welcher der Name der Verhältnis iſt, mit dem einen gegebenen äuſeren, oder mittleren Glied multipliciret, wenn das groſe Glied geſucht wird, hingegen aber dieſes äuſere, oder mittlere Glied durch den Namen der Verhältnis dividirt, wenn man das kleine Glied verlangt (§. 210.).

§. 244.

Die Aufgabe, worinnen man zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl findet (§. 240.), nennet man im gemeinen Leben die Regeldetri. Sie iſt von einem unbeſchreiblich groſen Nuzzen, und darum wollen wir uns mit ihrer Anwendung genauer bekant machen.

§. 245.

Weil nur zu den Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl gefunden werden kan, bei denen

eine geometriſche Proportion anzutreffen iſt (§. 240.): So folgt auch, daß ſich bei der Regeldetri ſtets zwei Zahlen, wie die zwei übrigen verhalten müſſen, ſo wie ſich nemlich zwei gleichnamige Zahlen verhalten, ſo müſſen ſich auch die andere zwei gleichnamigen Zahlen verhalten (§. 217.). In allen den Fällen alſo, wo ſich zwei gleichnamige Zahlen, wie zwei andere gleichnamige Zahlen verhalten, da läſt ſich auch die Regeldetri anwenden. Wir wollen davon einige Fälle anführen.

§. 246.

In dem Handel und Wandel iſt der Werth der Waare iederzeit ihrer Gröſe gleich: Denn wenn Jemand zweimal ſo viele Waare nimt; So bezahlt er das Doppelte, und ſo bezahlt er das Drei- Vier- und Fünffache (§. 36.), wenn er drei- vier- und fünfmal ſo viel nimt, und ſo weiter, eben darum aber kan man aus einem gegebenen Werth von einer gewiſſen Gröſe der Waare, den Werth einer andern Gröſe der Waare, oder, wenn die Gröſe der Waare von einem gewiſſen Werth bekant iſt, auch die Gröſe der Waare von einem gegebenen anderen Werthe finden. Wenn dieſemnach 12 Pfund 6 Gulden koſten, und man will wiſſen was 36 Pfund koſten? So müſſen 12 Pfund ſo oft in 36 Pfund enthalten ſein, als der Werth der 12 Pfund, nemlich 6 Gulden, in dem zu findenden Werth der

36 Pfund

36 Pfund enthalten iſt. Es wird dieſemnach dieſes Exempel nach dem 140. §. alſo aufgelöſt und geſezzet:

℔.	℔.		fl.	
12 :	36	=	6 :	x
	6			
	216			

1
19
216 | 18 Gulden koſten alſo
122 | 36 ℔.
1

Wenn man hingegen vor 6 fl. 12 ℔. kaufet, und man will wiſſen, wie viele ℔. man vor 18 fl. kaufet: So müſſen 6 fl. ſo oft in 18 fl. enthalten ſein, als die Gröſe der Waare von 6 fl., nemlich 12 ℔, in der zu findenden Gröſe der Waare von 18 fl. enthalten iſt, und demnach wird dieſes Exempel alſo geſezzet und aufgelöſt.

fl.	fl.		℔.	
6 :	18	=	12 :	x
	12			
	36			
	18			
	216			

3
216 | 36 ℔. kauft man alſo
66 | vor 18 fl.

In dem gemeinen Leben ſezzet man dieſe Exempel anders auf, und man ſagt bei dem erſten 12 ℔. koſten 6 fl., was koſten 36 ℔? bei dem andern hingegen

gegen vor 6 fl. kauft man 12 ℔, wie viel kauft man vor 18 fl.? und ſezzet dieſe Exempel ſo.

℔. — fl. — ℔.
12 — 6 — 36

36
6
216

1
19
216 | 18 fl.
122
1

fl. — ℔. — fl.
6 — 12 — 18

18
12
36
18
216

2
216 | 36 ℔.
66

Da hier ebenwol die beiden mittleren Glieder in einander multiplicirt werden, und ſich in einer ieden geometriſchen Proportion auch das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten verhält: So muß auch bei dieſer Verwechſelung eben das heraus kommen, was bei unſerem Sazze heraus gekommen iſt.

Wenn man bei dem erſten Exempel eine Probe machen will, ob man recht gerechnet hat: So wendet man aus den vorigen Gründen das Exempel um, und ſagt 36 ℔. koſten 18 fl., was koſten 12 ℔? da man dann wieder 6 fl. bekomt, wenn recht gerechnet worden. Eben ſo kan man auch bei dem

dem andern Exempel eine Probe machen, wenn man ſagt, vor 18 fl. kauft man 36 ℔., wie viel kauft man vor 6 fl? da man 12 ℔. bekomt, wenn richtig gerechnet worden. Wenn man von den vorigen Exempeln das eine durch das andere probiren will: So darf man nur das nach dem einen Saz gerechnete Exempel auch nach dem andern rechnen. Wenn nun hierbei eben die vier Proportionalzahlen heraus kommen: So iſt richtig gerechnet worden.

Dividirt man auch das erſte in das andere, und das dritte in das vierte Glied, und es komt einerlei Namen der Verhältnis heraus: So iſt auch recht gerechnet (§. 217.).

Multiplicirt man endlich nur die äuſeren und die mittleren Glieder, und es kommen gleiche Producte heraus: So iſt ebenwol richtig gerechnet (§. 228.).

§. 247.

Eine andere Anwendung der Regeldetri iſt dieſe. Der Lohn der Arbeiter verhält ſich ſtets, wie die Zahl der Zeit, wovon ſie ein gewiſſes Geld bekommen. Es bekomt nemlich ein Arbeiter das Doppelte, wenn er zweimal die Zeit durch arbeitet, wovor er ein gewiſſes Geld bekomt, und ſo bekomt er das Drei- Vier- und Fünffache, und ſo weiter (§. 36.). Wenn dieſemnach ein Häuer in 6 Schichten, oder in einer Woche 2 fl. bekomt, und man will wiſſen, wie viel

er

er in 4 Wochen bekomt (§. 145. und 146. der Grubenbauk.)? So muß ſo oft 1 Woche in 4 Wochen enthalten ſein, als der Lohn von 2 fl. von einer Woche in dem zu findenden Lohn von 4 Wochen enthalten iſt, und demnach iſt das Exempel dieſes.

Woch : Wochen = fl.

1 : 4 = 2 : x

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$ fl.

Oder

Woch — fl. — Wochen

1 — 2 — 4

$$\begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$ fl.

Man nent ein Exempel von dieſer Art, wobei man nur das dritte mit dem andern Glied multiplicirt, weil das erſte Glied nicht dividiret, ein Multiplicationsexempel.

Will man umgewendet wiſſen, wenn ein Häuer 2 fl. in einer Woche verdient, wenn er 8 verdienen wird? So iſt der Lohn von 2 fl. ſo oft in 8 fl. enthalten, als die Zeit von einer Woche in den zu findenden Wochen von 8 fl. begriffen iſt, und demnach iſt das Exempel dieſes.

fl. : fl. = Wochen

2 : 8 = 1 : x

$$\begin{array}{r} 8 \\ 1 \\ \hline 8 \\ 2 \end{array} \Big|$$ 4 Wochen.

Oder

Oder

fl.		Woche		fl.	
2	—	1	—	8	
				1	
				8	4 Wochen.
				~~2~~	

Ein ſolches Exempel, wobei nur das dritte Glied durch das erſte dividirt wird, weil das andere 1 nicht multipliciret, heiſt ein Diviſionsexempel.

§. 248.

Die Gröſe der verrichteten Arbeit verhält ſich ferner wie die Zahl der Zeit, worinnen man eine gewiſſe Arbeit gemacht hat, wenn man einmal ſo ſtark wie das andere mal arbeitet. Arbeitet alſo einer noch einmal ſo lang, und in einer Zeit ſo ſtark, wie in der anderen: So machet er auch eine noch einmal ſo groſe Arbeit, und ſo weiter. Wenn zum Exempel ein Häuer vor einem Stollen in 3 Schichten ein Lachter herausſchlägt (§. 43. 145. und 146. der Grubenbaukunſt, und §. 96. der Markſch.), und man will wiſſen, wie viel er in 6 Schichten herausſchlägt? So müſſen 3 Schichten in 6 Schichten ſo oft enthalten ſein, als 1 Lachter von 3 Schichten in den zu findenden Lachtern von 6 Schichten begriffen iſt, und demnach iſt das Exempel dieſes.

Schichten Schichten Lachter

3 : 6 = 1 : x

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \not{6} & 2 \text{ Lachter.} \\ \not{3} & \end{array}$$

Oder

Schichten Lachter Schichten

3 — 1 — 6

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \not{6} & 2 \text{ Lachter.} \\ \not{3} & \end{array}$$

Ein anderes Exempel iſt dieſes: In einer Woche fährt man vor einem Ort 2 Lachter auf (§. 43. und 87. der Grubenbauk.), wie viel wird man in 4 Wochen auffahren? das Exempel komt alſo zu ſtehen.

Woche Wochen Lachter

1 : 4 = 2 : x

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 8 \text{ Lachter.} \end{array}$$

Oder

Woche Lachter Woche

1 — 2 — 4|

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 8 \text{ Lachter.} \end{array}$$

Ferner

Ferner in 2 Wochen werden vor einem Stollen 5 Lachter aufgefahren, wie viel fährt man in 4 Wochen auf?

Wochen Woche Lachter.

2 : 4 = 5 : x
    5
  ---
  20 | 10 Lachter.
  22 |

Oder

W. Lachter W.

2 — 5 — 4
          5
        ---
        20 | 10 Lachter.
        22 |

Noch ferner: In 4 Wochen wältiget, oder ſäubert man vor einen zuſammen gebrochenen Stollen (§. 43. der Grubenbauk.) 5 Lachter, wie viel wird man in 13 Wochen wältigen, wenn in einer ſo viel gearbeitet wird, wie in der andern?

W. W. Lachter

4 : 13 = 5 : x
     5
   ---
    65   2(1 |
          6 5 | 16¼ Lachter.
          4 4 |

Oder

W.		Lachter		W.
4	—	5	—	13
				5
				65

2(1
6̸ 5̸ | $16\frac{1}{4}$ Lachter.
4̸ 4̸ |

Man kan dieſe Exempel auch umwenden, und ſtatt der Gröſe der Arbeit die Zahl der Zeit ſuchen, und alsdann komt aus den vorigen Gründen, das erſte Exempel, wenn man ſagt, ein Häuer ſchlägt 1 Lachter in 3 Schichten heraus, wenn wird er 2 Lachter herausſchlagen? alſo zu ſtehen.

Lachter		Lachter		Schichten	
1 :		2	=	3	: x
				2	
				6 Schichten.	

Oder

Lachter		Schichten		Lachter
1	—	3	—	2
				3
				6 Schichten.

§. 249.

Die Zahl der Arbeiter verhält ſich endlich, wie die Zahl der Zeit, wenn einer ſo viel arbeitet, wie der andere. Iſt die Zeit alſo noch einmal ſo gros, worinnen man eine gewiſſe Zahl Arbeiter gebrauchet: So gebraucht man ihrer auch noch einmal ſo viel, und

und ſo weiter. Gebraucht man zum Exempel in einer Schicht zwei Häuer (§. 145. und 146. der Grubenbauk.), und man will wiſſen, wie viel man in 6 Schichten gebraucht: So iſt 1 Schicht in 6 Schichten ſo oft enthalten, als 2 Häuer von einer Schicht in den zu findenden Häuern von 6 Schichten begriffen ſind. Und demnach iſt das Exempel dieſes.

Schicht Schichten Häuer

$$1 : 6 = 2 : x$$

$$\frac{2}{12} \text{ Häuer}$$

Oder

Schicht Häuer Schichten

$$1 - 2 - 6$$

$$\frac{2}{12} \text{ Häuer.}$$

Auch dieſes Exempel kan man umwenden, und ſtatt der Zahl der Arbeiter die Zahl der Zeit ſuchen, und alsdann komt es aus den vorigen Gründen, wenn man ſagt 3 Häuer machen 1 Schicht, wie viel machen 12 Häuer, alſo zu ſtehen.

Schichten Schichten Häuer

$$2 : 12 = 1 : x$$

$$\frac{1}{\not{1}\not{2}} \Big| \; 6 \text{ Schichten}$$
$$\not{6}$$

Oder

Häuer Schicht Häuer

2 — 1 — 12

1

~~12~~ | 6 Schichten.
~~2~~

§. 250.

Bei der Regeldetri beſtehen öfters die gleichnamigen Glieder (§. 217.) aus genanten Zahlen von der gröſeren und der kleineren Art (§. 60.), dieſe Glieder nun muß man, ehe man die Regeldetri ausübt, erſt unter einerlei Art, oder auf einerlei Einheiten bringen, und alſo die Dinge von der gröſeren Art in Dinge von der kleineren Art verwandeln, weil ſonſt dieſe Zahlen keine Verhältnis, und keine Proportion ausmachen. Koſten zum Exempel 4 ℔ 8 Loth 2 fl 4 Weispfennig, und man will wiſſen, was 9 ℔ 4 Loth koſten? So muß man die Pfunde zu Lothe, und die Gulden zu Weispfennigen machen. Weil nun 32 Loth 1 Pfund, und 30 Weispfennige einen Gulden machen (§. 96.): So iſt das erſte Glied 4 ℔ 8 Loth = 4. 32 + 8 = 136 Loth, das andere 2 fl 4 Alb = 2. 30 + 4 = 64, und das dritte 9 ℔ 4 Loth = 9. 32 + 4 = 292 Loth (§. 104.).

(§. 104.). Das Exempel komt demnach alſo zu ſtehen.

```
  ℔.     Loth     fl.    alb.     ℔.     Loth
   4  —   8   —   2  —   4   =    9   —   4
  32              30             32
 ---             ---            ---
 128              60            288
   8               4              4
 ---             ---            ---
 136              64            292
                                 64
                                ---
                               1168
                              1752
                              -----
                              18688
```

```
      3
    1 0(5
    2 1 9
    5 0 0(6
  1 8 6 8 8 | 137 56/136 Weispfennig.
  1 3 6 6 6
    1 3 3
      1
```

Die vierte geometriſche Proportionalzahl macht alſo $137\frac{56}{136}$ Weispfennige aus, und wenn man dieſe durch 30 dividirt: So iſt die verlangte Zahl 4 fl $17\frac{56}{136}$ Weispfennig (§. 108.). Wenn man aber auch wiſſen will, wie viel Heller $\frac{56}{136}$ Weispfennige machen: So multipliciret man 56 mit 8, und dividirt das Product durch 136 (§. 153.), ſo bekomt man $3\frac{40}{136}$ Heller, oder $3\frac{5}{17}$ Heller (§. 128.), und es iſt alſo die geſuchte Zahl 4 fl 17 Weispfennige und $3\frac{5}{17}$ Heller.

Wir wollen zur Erläuterung noch einige Exempel beibringen.

1. Exempel.

```
 ℔.    Loth    fl.        ℔.
  3  —  2  —  4    —    8
 32                      32
 ---                     ---
 96                      256
  2                        4
 ---                     ----
 98                      1024

        1(4
      10 2(4  |      (2 ____
       988    |  10 44/98 | 22/49 fl.
        9
```

2. Exempel.

```
 ℔.     fl.    alb.    ℔.
 4   —   3   —   6   —   5
        30
        ---
        90
         6
        ---
        96   480 | 120 |
         5   444 |  30 | 4 fl.
        ---
       480
```

3. Exempel.

```
 ℔.      fl.      ℔.      Loth
  2  —   5   —    2   —   6
 32               32
----             ----
 64               64
                   6
----             ----
                  70
                   5
                 ----
                 350

                       3   (2
                     350 | 5 30/64 | 15/32 fl.
                      64 |
```

4. Exempel.

```
 ℔.      Loth     fl.      Alb.      ℔.
  2  —   4   —    2   —    5   —     6
 32               30                 32
----             ----               ----
 64               60                192
  4  —   3   —    5   —    6   —     65
----             ----               ----
 68               65                960
                                   1152
                                   -----
                                  12480

   2 (3
  586
  664(6
 12480 | 18(3 36/68 | 6 fl. 3 36/68 (2 | 18/39 (2 | 9/17 Weispf.
  6888 |   30
   66
```

5. Exempel.

tb.	fl.	Alb.	tb.	Loth
3 —	3 —	8 —	2 —	4
32	30		32	
96	90		64	
	8		4	
	98		68	
	68			
	784			
	588			
	6664			

(4
9 9
1 2 0 (0
6 6 6 4 | 69 $\frac{40}{96}$ | 2 fl. 9 $\frac{40}{96}$ (8 | $\frac{5}{12}$ Weispf.
9 6 6 | 30
9

6. Exempel.

tb.	Loth	fl.	tb.	Loth
2 —	6 —	3 —	3 —	4
32			32	
64			96	
6			4	
70			100	
			3	
			300	

(2
3 0 (0 | 4 $\frac{20}{70}$ (5 | $\frac{4}{14}$ (2 | $\frac{2}{7}$ fl.
7 0 |

Zwei-

Zuweilen macht in genanten Zahlen das Product aus dem andern in das dritte Glied keine ſo groſe Zahl aus, daß das erſte Glied in dieſes Product dividirt werden kan, in einem ſolchen Fall nun, löſt man, wenn man keinen Bruch zur vierten Proportionalzahl bekommen will, die Dinge des ungleichnamigen Glieds in kleinere Arten auf (§. 104.), und verfährt alsdann wie gewöhnlich.

Exempel.

℔. fl. ℔.
68 — 4 — 6
30

120
6

720 14
720 | $10\frac{40}{68}$ Weispf.
688
6

Läſt ſich, dieſem allen ohngeachtet, das erſte Glied nicht in das Product der mittleren dividiren: So bekomt man zur geſuchten Zahl einen Bruch, wovon das Product der mittleren Glieder der Zähler, das erſte Glied aber der Diviſor iſt.

Exempel.

℔.	fl.	℔.
1500 —	2 —	3

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 60 \\ 8 \\ \hline 480 \\ 3 \\ \hline \frac{1440}{1500} \end{array}$$ Heller.

Oder

℔.	Heller	℔.
18 —	6 —	2

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 12 \end{array}$$

$\frac{12}{18} \overset{(6}{|}\ \frac{2}{3}$ Heller.

§. 251.

Bei der Regeldetri hat man weiter nichts zu thun, als daß man die mittleren Glieder mit einander multiplicirt, und das Product durch das erſtere dividirt (§. 240.). Wenn man ſich daher das, was wir von der Multiplication und Diviſion der Brüche von dem 142. bis zum 153. §. geſagt haben, wol bekant gemacht hat: So wird man auch die Regeldetri in Brüchen leicht ausüben können (§. 110. 113. und 116.). Um inzwiſchen auch dieſe Sache unſern Leſern leicht zu machen: So wollen wir nur die

die Exempel davon hierher ſezzen, weil aus dem Anſchauen derſelben die Regeln von ſelbſt klar ſind, es laſſen ſich aber bei der Regeldetri in Brüchen überhaupt drei Fälle gedenken. Es beſtehet nemlich in der geometriſchen Proportion entweder nur ein, oder zwei, oder alle drei Glieder aus Brüchen. Wir wollen einen ieden Fall, der ſich wieder in beſondere verteilet, durch Exempel erläutern.

§. 252.

Wenn nur ein Glied aus einem Bruch beſtehet: So kommen dabei die folgenden Fälle vor.

I. Wenn das erſte Glied ein Bruch iſt.

Ehlen Thlr. Ehlen

$\frac{3}{4} : 5 = 7 : 5 \cdot 7 = 35 = \frac{35}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{2}$ Thaler (§. 149.).

Oder kürzer, wobei die Zähler und die Nenner auf eben die Art in die Rechnung kommen.

Ehlen Thaler Ehlen

$$\frac{3}{4} \;—\; 5 \;—\; 7$$

$$\begin{array}{lr} \underline{\frac{3}{4}} & 7 \\ 3 & \underline{5} \\ & 35 \\ & \underline{4} \\ & 140 \end{array}$$

2(2
140 | $46\frac{2}{3}$ Thaler.
33

II. Wenn

II. Wenn das erſte Glied eine gebrochene Zahl iſt.

Pf. Gulden Pf.

$$7\tfrac{1}{5} : 11 = 3 : 11.3 = 33 = \tfrac{33}{1} \times \tfrac{36}{5} = \tfrac{165}{36} = 4\tfrac{21}{36} \text{ Gulden}$$

$$\begin{array}{l} 7\tfrac{1}{5} \\ \hline 36 \\ \hline 5 \end{array}$$

(§. 151.).

Oder

$$\begin{array}{llll} 7\tfrac{1}{5} - & 11 - & 3 & \\ \hline 36 & \quad 3 & & \\ & \overline{\;33\;} & & \\ & \quad 5 & & \\ & \overline{165} & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & \\ \not{4}1 & \\ \not{1}\not{6}\not{5} & 4\tfrac{21}{36} \text{ Gulden.} \\ 3\not{6} & \end{array}$$

III. Wenn das andere Glied aus einem Bruch beſtehet.

Ehlen Thlr. Ehlen

$$2 : \tfrac{2}{3} = 5 : \tfrac{5}{1}.\tfrac{10}{3} = \tfrac{10}{3} \times \tfrac{2}{1} = \tfrac{10}{6} = 1\tfrac{4}{6} \text{ Thaler}$$

(§. 144. und 149.).

Oder

$$\begin{array}{lll} 2 - & \tfrac{2}{3} - & 5 \\ 3 & \overline{\;2\;} & \;\;2 \\ \overline{6} & & \overline{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \\ \not{1}\not{0} & 1\tfrac{4}{6} \text{ Thaler.} \\ \not{6} & \end{array}$$

IIII. Wenn das andere Glied aus einer gebrochenen Zahl beſtehet.

℔. fl. ℔.

$$1 : 2\tfrac{1}{5} = 9 : \tfrac{9}{1} \cdot \tfrac{11}{5} = \tfrac{99}{5} \times \tfrac{1}{1} = \tfrac{99}{5} = 19\tfrac{4}{5} \text{ fl.}$$

$$\begin{array}{c} 2\tfrac{1}{5} \\ \hline 11 \\ \hline 5 \end{array}$$

(§. 146. und 149.).

Oder

Oder

℔. fl. ℔.

$1 - 2\frac{1}{5} - 9$ 44

$\frac{5}{5}$ 11 $\frac{11}{99}$ 99 | $19\frac{4}{5}$ fl.

88

V. Wenn das dritte Glied aus einem Bruch beſtehet.

Ehl fl. Ehl

$2 : 7 = \frac{5}{8} : \frac{7}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{35}{16} = 2\frac{3}{16}$ fl.

(§. 144. und 149.).

Oder

$2 - 7 \quad \frac{5}{8}$ 1(3

$\frac{8}{16} \quad \frac{5}{35}$ 35 | $2\frac{3}{16}$ fl.

16

VI. Wenn das dritte Glied aus einer gebrochenen Zahl beſtehet.

℔. fl. ℔.

$7 : 3 = 4\frac{1}{4} : \frac{17}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{51}{4} \times \frac{7}{1} = \frac{51}{28} = 1\frac{23}{28}$ fl.

17 (§. 146. und 149.).

4

Oder

$7 - 3 \quad 4\frac{1}{4}$ (2

$\frac{4}{28} \quad 17$ 3(3

$\frac{3}{51}$ 51 | $1\frac{23}{28}$ fl.

28

§. 253.

Wenn zwei Glieder aus Brůchen beſtehen: So laſſen ſich die folgenden Fålle gedenken.

I. Wenn

I. Wenn das erſte, und das andere Glied aus Brüchen beſtehen.

Ehlen fl. Ehlen

$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = 4 : \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{72}{20} = 3\frac{12}{20} = 3\frac{3}{5}$ fl.

(§. 144. und 148.).

Oder

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} - 4$$

$$\begin{array}{lll} \frac{5}{6} & & 4 \\ \hline 5 & & 3 \\ 4 & & \overline{12} \\ \hline 20 & & 6 \\ & & \overline{72} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} (1 & \\ \not{7}\,(2 & 3\frac{12}{20}\,{}^{(4} \mid \frac{3}{5}\ \text{fl.} \\ \not{2}\not{0} & \end{array}$$

II. Wenn das erſte, und das andere Glied aus gebrochenen Zahlen beſtehen.

lb. fl. lb.

$2\frac{3}{4} : 3\frac{1}{3} = 5 : \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{50}{3} \times \frac{11}{4} = \frac{200}{33} = 6\frac{2}{3}$ fl.

$\frac{11}{4}$ $\frac{10}{3}$

(§. 146. und 152.).

Oder

$$\begin{array}{lll} 2\frac{3}{4} - & 3\frac{1}{3} & - 5 \\ \hline 11 & 10 & 10 \\ 3 & & \overline{50} \\ \hline 33 & & 4 \\ & & \overline{200} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \not{2}(2 & \\ \not{2}\not{0}\not{0} & 6\frac{2}{3}\ \text{fl.} \\ \not{3}\not{3} & \end{array}$$

III. Wenn das erſte Glied ein Bruch, und das andere eine gebrochene Zahl iſt.

Ehlen fl. Ehlen

$\frac{1}{3} : 2\frac{1}{4} = 7 : \frac{7}{1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{63}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{189}{4} = 47\frac{1}{4}$ fl.

$\frac{9}{4}$

(§. 146. und 150.).

Oder

Oder

Ehlen — fl. — Ehlen

$\frac{1}{3}$ — $2\frac{1}{4}$ — 7

1 — 9 — 9

4 — — 63

4 — — 3

— — — 189

2(1
189
44 | $47\frac{1}{4}$ fl.

IIII. Wenn das erſte Glied eine gebrochene Zahl und das andere ein Bruch iſt.

tb. fl. tb.

$3\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 6 : \frac{6}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{24}{21} = 1\frac{3}{21} = 1\frac{1}{7}$ fl.

7

2

(§. 144. und 152.).

Oder

$3\frac{1}{2}$ — 2 — 6

7 — 3 — 2

3 — 2 — 12

21 — — 2

— — 24

3
24
21 | $1\frac{3}{21}$ | (3 $\frac{1}{7}$ fl.

V. Wenn das andere, und das dritte Glied aus einem Bruch beſtehen.

Ehlen Thlr. Ehlen

$2 : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ Thaler

(§. 142. und 149.).

Oder

Oder

Ehlen Thaler Ehlen

$2 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

3 | 3 | 2
6 | 2
4 | 6
24

$\frac{6}{24} \mid \frac{1}{4}$ Thaler. (6

VI. Wenn das andere, und das dritte Glied gebrochene Zahlen ſind.

℔. fl. ℔.

$3 : 2\frac{1}{4} = 6\frac{4}{5} : \frac{9}{4} \cdot \frac{34}{5} = \frac{306}{20} \times \frac{3}{1} = \frac{306}{60} = 5\frac{6}{60} = 5\frac{1}{10}$ fl.

9 | 34
4 | 5

(§. 147. und 151.).

Oder

$3 - 2\frac{1}{4} - 6\frac{4}{5}$

4 | 9 | 34
12 | | 9
5 | | 306
60

$\frac{306}{60} \mid 5\frac{6}{60} \mid \frac{1}{10}$ fl.

VII. Wenn das andere Glied aus einem Bruch, und das dritte aus einer gebrochenen Zahl beſtehet.

℔ fl. ℔

$5 : \frac{5}{6} = 7\frac{1}{2} : \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{75}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{75}{60} = 1\frac{15}{60} = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$

15
2

(§. 145. und 151.).

Oder

$5 - \frac{5}{6} - 7\frac{1}{2}$

6 | 5 | 15
30 | | 5
2 | | 75
60

$\frac{75}{60} \mid 1\frac{15}{60} \mid \frac{3}{12} \mid \frac{1}{4}$ fl.

VIII. Wenn

VIII. Wenn das andere Glied aus einer gebrochenen Zahl, und das dritte aus einem Bruch beſtehet.

℔ Thaler ℔

$2 : 4\frac{1}{2} = \frac{2}{3} : \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{18}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{18}{12} = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$ Thaler

$\frac{9}{2}$ (§. 145. und 151.).

Oder

$2 - 4\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$

2 9 2

4 2

3 18

12

(6 | 16 |
18 | $1\frac{6}{12}$ | $\frac{1}{2}$ Thaler
12 |

VIIII. Wenn das erſte, und das dritte Glied aus einem Bruch beſtehet.

℔ fl. ℔

$\frac{1}{4} : 3 = \frac{2}{3} : \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{24}{3} = 8$ fl. (§. 144. 150.).

Oder

$\frac{1}{4} - 3 - \frac{2}{3}$

1 2

3 3

3 6

4

24

24 | 8 fl.
3 |

X. Wenn das erſte, und das dritte Glied aus gebrochenen Zahlen beſtehen.

℔ fl. ℔

$2\frac{1}{3}\ 8 = 4\frac{1}{4} : \frac{8}{1} \cdot \frac{17}{3} = \frac{136}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{408}{28} = 14\frac{16}{28} = 14\frac{4}{7}$ fl.

$\frac{7}{3}$ $\frac{17}{4}$ (§. 146. und 152.).

Oder

```
2⅓—8—4¼
 7    17
 4     8          (1
 28   136         1̸4̸
        3         1̸1̸(6
      408         4̸0̸8   | 14 16/28 | 4/7 fl.
                  2̸88   |
                  2̸
```

XI. Wen das erſte Glied aus einem Bruch, und das dritte aus einer gebrochenen Zahl beſtehet.

℔ Thaler ℔

$\frac{1}{3} : 2 = 1\frac{1}{4} : \frac{5}{4} . \frac{2}{1} = \frac{10}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{30}{4} = 7\frac{2}{4} = 7\frac{1}{2}$ Thaler

(§. 146. und 150.).

```
1¼
5
—
4
```

Oder

```
⅓—2—1¼
1     5
4     2
4    10
      3         (2
     30         3̸0̸ | 7 2/4 | ½ Thaler
                4̸  |
```

XII. Wenn endlich das erſte Glied aus einer gebrochenen Zahl, und das dritte aus einem Bruch beſtehet.

Ehlen fl. Ehlen

$2\frac{1}{5} : 4 = \frac{3}{4} : \frac{4}{1} . \frac{3}{4} = \frac{12}{4} \times \frac{5}{11} = \frac{60}{44} = 1\frac{16}{44} = 1\frac{4}{11}$ fl.

(§. 144. und 152.).

```
11
—
5
```

Oder

Oder

$2\frac{1}{5}$ — 4 — $\frac{3}{4}$

11 3 3

4 12

44 5

60

(1
$\not{2}$(6
$\not{6}\,\not{0}$ | $1\frac{16}{44}$ | (4 $\frac{4}{11}$ fl.
$\not{4}\,\not{4}$ |

§. 254.

Beſtehen endlich alle drei Glieder aus Brůchen: So kommen dabei die folgende Fålle vor.

I. Wenn alle drei Glieder aus Brůchen beſtehen.

tb fl. tb

$\frac{1}{3} : \frac{5}{8} = \frac{7}{8} : \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{35}{64} \times \frac{1}{3} = \frac{105}{64} = 1\frac{41}{64}$ fl. (§. 142, 148).

Oder

$\frac{1}{3}$ — $\frac{5}{8}$ — $\frac{7}{8}$

1 5 7

8 5

8 35

8 3

64 105

41
$\not{1}\not{0}\not{5}$ | $1\frac{41}{64}$ fl.
$\not{6}\not{4}$ |

II. Wenn alle drei Glieder aus gebrochenen Zahlen beſtehen.

Ehlen fl. Ehlen

$5\frac{3}{4} : 9\frac{1}{2} = 7\frac{2}{3} : \frac{19}{2} \cdot \frac{23}{3} = \frac{437}{6} \times \frac{23}{4} = \frac{1748}{138} = 12\frac{92}{138} = 12\frac{46}{69}$ fl.

23 19 23 (§. 147. und 152.).

4 2 3

Oder

$5\frac{3}{4} - 9\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3}$

```
 23   19   23
  2        19
 46       207
  3        23
138       437
            4
         1748
```

```
  1(9
  46(2
 1748 | 12 92/138 | 46/69 fl.
 1388 |
  13
```

III. Wenn das erſte Glied ein Bruch iſt, und das andere und das dritte Glied gebrochene Zahlen ſind.

℔ fl. ℔

$\frac{1}{3} : 2\frac{1}{4} = 3\frac{1}{2} : \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{63}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{189}{8} = 23\frac{5}{8}$ fl. (§. 147. 150.).

```
  9    7
  4    2
```

Oder

$\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2}$

```
 1    9    7
 4         9
 4        63
 2         3
 8       189
```

```
  2(5
 189 | 23 5/8 fl.
  88 |
```

IIII. Wenn das erſte Glied eine gebrochene Zahl, das andere und das dritte aber Brüche ſind.

℔ fl. ℔

$1\frac{1}{7} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} : \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{20} \times \frac{8}{7} = \frac{84}{160} = \frac{21}{40}$ fl. (§. 142. u. 150)

```
 8
 7
```

Oder

Oder

$1\frac{1}{7} — \frac{3}{4} — \frac{4}{5}$

8	3	4
4		3
32		12
5		7
160		84

$\frac{84}{160}$ (4 | $\frac{21}{40}$ fl.

V. Wenn das andere Glied ein Bruch, und das erſte und das dritte Glied eine gebrochene Zahl iſt.

tb fl. tb

$2\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3} : \frac{2}{3} . \frac{10}{3} = \frac{20}{9} \times \frac{11}{5} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$ fl. (§. 145. 152.)

11	10
5	3

Oder

$2\frac{1}{5} — \frac{2}{3} — 3\frac{1}{3}$

11	2	10
3		2
33		20
3		5
99		100

(1
100 | $1\frac{1}{99}$ fl.
99 |

VI. Wenn das andere Glied eine gebrochene Zahl, und das erſte und das dritte ein Bruch iſt.

Ehlen fl. Ehlen

$\frac{3}{5} : 2\frac{1}{8} = \frac{6}{7} : \frac{6}{7} . \frac{17}{8} = \frac{102}{56} \times \frac{3}{5} = \frac{510}{168} = 3\frac{6}{168} = 3\frac{1}{28}$ fl.

(§. 145. und 150.).

$\frac{17}{8}$

Oder

$$\begin{array}{lll} \frac{3}{5} - & 2\frac{1}{8} - & \frac{6}{7} \\ \hline 3 & 17 & 6 \\ 8 & 6 & \\ \hline 24 & 102 & \\ 7 & 5 & \\ \hline 168 & 510 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} \not{2}\not{2}(6 & & \\ \not{5}\not{1}\not{0} & 3\frac{6}{168} \;{}^{(6} & \frac{1}{28}\text{ fl.} \\ \not{1}\not{6}8 & & \end{array}$$

VII. Wenn das erſte und das andere Glied eine gebrochene Zahl, und das dritte ein Bruch iſt.

℔ fl. ℔

$4\frac{1}{3} : 8\frac{2}{5} = \frac{4}{7} : \frac{42}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{168}{35} \times \frac{13}{3} = \frac{504}{455} = 1\frac{49}{455}$ fl. (§. 145. und 152.).

$$\begin{array}{ll} 4\frac{1}{3} & 8\frac{2}{5} \\ \hline 13 & 42 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

Oder

$$\begin{array}{lll} 4\frac{1}{3} - & 8\frac{2}{5} - & \frac{4}{7} \\ \hline 13 & 42 & 4 \\ 5 & 4 & \\ \hline 65 & 168 & \\ 7 & 3 & \\ \hline 455 & 504 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} (4 & \\ \not{1}\not{5}(9 & \\ \not{5}\not{0}\not{4} & 1\frac{49}{455}\text{ fl.} \\ \not{4}\not{5}\not{5} & \end{array}$$

VIII. Wenn endlich das erſte und das andere Glied aus Brüchen, und das dritte aus einer gebrochenen Zahl beſtehet.

Ehlen fl. Ehlen

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 3\frac{1}{4} : \frac{4}{5} \cdot \frac{13}{4} = \frac{52}{20} \times \frac{2}{3} = \frac{156}{40} = 3\frac{36}{40} = 3\frac{9}{10}$ fl. (§. 145. und 150.).

$$\begin{array}{c} 3\frac{1}{4} \\ \hline 13 \\ \hline 4 \end{array}$$

Oder

Oder

$\frac{2}{3} — \frac{4}{5} — 3\frac{1}{4}$

2	4	13
5		4
10		52
4		3
40		156

(3
18(6 | $3\frac{36}{40}$ (4 | $\frac{9}{10}$ fl.
40 |

§. 255.

Wenn man wiſſen will, wie viele Dinge von der der kleineren Art die Brüche ausmachen, die in dem 252. 253. und 254. §. in der vierten Proportionalzahl herausgekommen ſind: So verfährt man ſo, wie wir im 153. und 250. §. gewieſen haben.

§. 256.

Geſchiehet es auch, daß bei der Ausůbung der Regeldetri in Brůchen ein, zwei, oder alle drei Glieder aus genanten Zahlen von der grôſeren und der kleineren Art beſtehen (§. 60.): So bringt man ſie ſo, wie in §. 250. gezeigt worden, auf einerlei Einheiten, und verfährt alsdann nach dem 252. 253. und 254. §. Wir wollen nur ein paar Exempel zur Erlåuterung anfůhren.

Exempel vom I. Fall des 252. §.

℔ Guld. Weispf. Hell. ℔

$\frac{4}{5} : 2 — 6 — 4 = 6 : 532.6 = \frac{3192}{1} \times \frac{4}{5} = \frac{15960}{4} =$ 3990 Heller: 8 = $498\frac{6}{8}$ Weispfennig: 30 = 16 fl. 18 Weispf. 6 Heller

```
 30
----
 60
  6
----
 66
  8
----
528
  4
----
532
```

Oder

℔ fl. W. H. ℔

```
   4/5--2--6--4--6
  ---
   4   30
      ----
       60
        6
      ----
       66
        8
      ----
      528
        4
      ----
      532
        6
      ----       33      77(6    x(1
     3192     x5960|3990|  49(8| 16 fl. 18 W. 6 Hel.
        5      4444| 888|  300|
    -----                  3
    15960
```

Exempel vom IIII. Fall des 252. §.

Ehlen fl. W. H. Ehlen

$2 : 3 - 5 - 4\frac{1}{3} = 12 : \frac{2293}{3} . \frac{12}{1} = \frac{27516}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{27516}{6} =$

$4586 : 8 = 573\frac{2}{8} : 30 = 19\frac{3}{30} =$ 19 fl. 3 Weispf. 2 Heller.

```
 30
 --
 90
  5
 --
 95
  8
 --
760
 4⅓
 ----
764⅓
 ----
2293
 ----
  3
```

Oder

Ehlen fl. W. H. Ehlen

$2 - 3 - 5 - 4\frac{1}{3} -- 12$

```
 3    30
 --   --
 6    90
       5
      --
      95
       8
     ---
     760
      4⅓
    ----
    764⅓
    ----
    2293
      12
    ----
    4586
   2293
   -----
   27516
```

```
  383    82(2  2
 27816 | 4586 | 87(3 | 19 fl. 3 W. 2 H.
 6666  |  888 | 330  |
```

§. 257.

Wir haben bisher von der Regula de Tri ſimplici directa gehandelt, die man nur ſchlechtweg die Regeldetri nent, iezt aber wollen wir die Regula de Tri ſimplici indirecta, oder inverſa, oder die verkehrte Regeldetri erklären, worinnen die gleichnamigen Glieder in einer umgekehrten Ordnung ſtehen (§. 217.), und ſich verkehrt, wie die anderen verhalten, die man aber leicht in iene verwandeln kan. Wir wollen uns dieſe Sache deutlicher vorſtellen. Wenn man annimt, 232 Arbeiter endigen eine gewiſſe Arbeit in 9 Tagen, und man wirft die Frage auf, wie viele Arbeiter wird man nötig haben, um ſie in 6 Tagen zu endigen? So iſt klar, daß wie vielmal 6 in 9 Tagen enthalten iſt, eben ſo vielmal müſſen auch 232 Arbeiter in der zu ſuchenden vierten Proportionalzahl der Arbeiter von 6 Tagen enthalten ſein: Denn ie geſchwinder die Arbeit gehen ſoll, um deſto mehr Leute muß man haben. Man kan daher die zu ſuchende Zahl alſo finden, wenn man ſchlieſt $6:9=232:x$, oder wenn man den Satz ſo aufſezt, wie er im gemeinen Leben gewöhnlich iſt (§. 246) $6:232=9:x$. Weil inzwiſchen nach dem Sazze 232 Arbeiter endigen eine Arbeit in 9 Tagen, wie viele Arbeiter wird man nötig haben, um ihn in 6 Tagen zu endigen, die Glieder verkehrt, und alſo zu ſtehen kommen 232--9--6-- x: So ſiehet man,

daß

daß das dritte in der Proportion 6:9=232:x, oder das andere in der Proportion 6:232=9:x in die Stelle des erſten, und das erſte in die Stelle des dritten Glieds geſezt wird: Wenn man daher nach der verkehrten Regeldetri, und der Ausſage zu Werke gehen will; So kan man ſich bei dem Sazze 232--9--6--x vorſtellen, als ſtůnde das erſte Glied in der Stelle des dritten, und das dritte in der Stelle des erſten, und in dieſen Gedanken das erſte mit dem andern multipliciren, und das Product durch das dritte Glied dividiren, da man dann die verlangte Zahl bekomt. Es iſt alſo das Exempel nach der Ausſage dieſes.

Arbeiter	Tage	Tage	
232 --	9 --	6 --	x
9		24	
2088		2088 | 348 Arbeiter	
		666 |	

Man kan auch die Frage umwenden, und die Zeit ſuchen, wenn man ſagt, 232 Arbeiter endigen in 9 Tagen eine gewiſſe Arbeit, in wie viel Zeit werden ihn 348 Arbeiter endigen, da dann das Exempel dieſes iſt.

Arbeiter	Tage	Arbeiter	
232 --	9 --	348 --	x
9		24	
2088		2088 | 6 Tage	
		348 |	

Dieſes

Dieſes iſt zugleich eine Probe von dem erſten Exempel.

Man kan den Aufſatz in dieſer Regel auch ſo machen, daß man das dritte Glied finden muß, und dieſes geſchiehet, bei unſerem erſten Exempel 232—9—6 wenn man ſagt, wie ſich verhält 9 zu 6, ſo verhält ſich auch die zu findende dritte Proportionalzahl zu 232, in dieſem Fall aber muß man, da das andere Glied in die Stelle des erſten, und das erſte in die Stelle des vierten, und das dritte in die Stelle des andern Glieds zu ſtehen kommen, das erſte und das vierte mit einander multipliciren, und das Product durch das andere dividiren. Das Exempel iſt alſo dieſes.

Tage Tage Arbeiter
9 -- 6 -- x -- 232
9
2088

24
2088 | 348 Arbeiter
666 |

Wendet man dieſen Saz um, und ſuchet, nach dem zweiten Exempel die Zeit: So iſt die Rechnung dieſe.

Tage Arbeiter Tage
9 -- 348 -- x -- 232
9
2088

24
2088 | 6 Tage
348 |

End-

Endlich kan man den Aufſaz ſo machen, daß man das andere Glied finden muß. Es geſchiehet dieſes, wenn man bei dem erſten Exempel 232—9—6 ſagt, wie ſich verhalten 232 zu der noch unbekanten Zahl der Arbeiter, ſo verhält ſich auch 6 zu 9, in dieſem Fall aber muß man das erſte Glied mit dem vierten multipliciren, und das Product durch das dritte dividiren, weil das andere Glied in die Stelle des vierten geſezt worden. Unſer Exempel iſt alſo dieſes.

Arbeiter		Tage	Tage
232 —	x —	6 —	9
9			
2088			

24
2088 | 348 Arbeiter
666 |

Wendet man auch dieſen Saz um, und ſuchet nach dem zweiten Exempel die Zeit: So iſt die Rechnung dieſe.

Arbeiter		Arbeiter	Tage
232 —	x —	348 —	9
9			
2088			

24
2088 | 6 Tage
348 |

§. 258.

Man muß die Regeldetri nicht ſelten zweimal anwenden, ehe man die verlangte Zahl findet, man kan

kan aber die ganze Rechnung auch dadurch zu Ende bringen, wenn man zu fünf gegebenen Zahlen die ſechſte findet, und dieſe Regel nent man die Regula de quinque, oder die Regel von fünfen. Sie heiſt auch die Regula duplex, weil ſie zeigt, wie man die beiden gegebenen Verhältniſſen in dem erſten und dem dritten Glied in eine zuſammenbringen ſoll. Man nennet ſie ferner die Regula compoſita, weil ſie aus einer zuſammengeſezten Regeldetri, und das erſte und das dritte Glied aus mehreren Zahlen beſtehet, und neben dem Hauptglied noch ein Nebenglied befindlich iſt. Wenn man die Regeldetri zweimal anwendet: So kan man dieſelbe entbehren, wir wollen alſo vorerſt dieſes zeigen, und hernach die Regeln angeben, wie man dieſe Rechnung auf einmal zu Ende bringen ſoll. Wann zum Beiſpiel 200 Thaler in 3 Jahren 30 Thaler Intereſſe tragen, und man will wiſſen, wie viele Intereſſen 3000 Thaler in 15 Jahren geben werden: So ſuchet man erſt durch die Regeldetri, wie viele Intereſſen 3000 Thaler in 3 Jahren tragen. Man ſagt nemlich 200 Thaler geben in 3 Jahren 30 Thaler Intereſſe, was tragen 3000 Thlr. in eben der Zeit der 3 Jahre an Intereſſen? Da nun, wenn man die Zeit der drei Jahre, als eine Nebenſache wegläſt, 200 Thaler in 3000 Thlr. ſo oft enthalten ſein müſſen, als 30 Thlr. in der zu ſuchenden Zahl der Intereſſen von 3000 Thaler

ler enthalten iſt (§. 246.): So iſt auch das Exempel dieſes.

Thlr.		Thlr.		Thlr.		
200	:	3000	=	30	:	x
				3000		
				90000		

~~1~~

~~90000~~ | 450 Thlr.

~~22200~~ |

Oder

Thlr.		Thlr.		Thlr.
200	—	30	—	3000
				30
				90000

~~1~~

~~90000~~ | 450 Thlr. (§. 246.).

~~22200~~ |

Wenn alſo 200 Thlr. in 3 Jahren 30 Thlr. Intereſſe tragen: So tragen 3000 Thlr. in drei Jahren 450 Thlr. Intereſſe. Nun wollen wir aber eigentlich wiſſen, wie viele Intereſſen 3000 Thlr. in 15 Jahren ausmachen, und daher darf man nur ſagen 3000 Thlr. tragen in 3 Jahren 450 Thlr. Intereſſe, was geben ſolche in 15 Jahren? Da nun das Capital von 3000 Thlr. iezt nur eine Nebenſache iſt, die nicht mit in die Rechnung komt, und ſich die Intereſſen verhalten müſſen, als wie die Jahre, oder die Zeiten, und folglich 3 Jahre ſo oft in 15 Jahren

Jahren enthalten ſein müſſen, als 450 Thlr. Intereſſe von den 3 Jahren derer 3000 Thlr. in den Intereſſen von 15 Jahren begriffen ſind: So iſt die Rechnung dieſe.

Jahre Jahren Thlr.
3 : 15 = 450 : x
15
2250
450
6750

x
6750 | 2250 Thlr.
3333 |

Oder

Jahr Thlr. Jahren
3 — 450 — 15
15
2250
450
6750

x
6750 | 2250 Thlr. (§. 246.).
3333 |

Wenn alſo 200 Thlr. in 3 Jahren 30 Thlr. Intereſſe ausmachen So betragen 3000 Thlr. in 15 Jahren 2250 Thlr. Intereſſe, und dieſe Zahl haben wir durch eine zweifache Anwendung der Regeldetri gefunden:

Jezt

Jezt wollen wir auch zeigen, wie man die verlangte Zahl auf einmal, und zu fünf Zahlen die ſechſte finden ſoll. Betrachtet man unſere Aufgabe etwas genauer: So findet man, daß dreimal 200 Thlr. in einem Jahre eben ſo viele Intereſſen ausmachen, als 200 Thlr. in drei Jahren, und daß fünfzehnmal 3000 Thlr. in einem Jahre eben ſo viele Intereſſen betragen, als 3000 Thlr. in fünfzehn Jahren, und daher kan man die Umſtände der Zeit weglaſſen, und den Auffaz alſo machen: Dreimal 200 Thlr., das iſt 600 Thlr. geben (nemlich in einem Jahre) 30 Thlr. Intereſſen, was geben fünfzehnmal 3000 Thlr., das iſt 45000 Thlr. (wieder aber in einem Jahre) an Intereſſen? Wenn man demnach ſagt 200 Thlr. geben in 3 Jahren 30 Thlr. Intereſſe, und man will wiſſen, wie viele 3000 Thlr. in 15 Jahren an Intereſſen betragen: So hat man, wenn man den Werth von dem erſten Glied in die Stelle des dritten Glieds ſezzet (§. 246.), nur nötig, daß man das erſte, und das andere Glied mit ſeinem Nebenglied, oder der Zahl der Jahre multipliciret, und alsdann, weil iezt das erſte Product das erſte, und das andere das andere Glied ausmacht, nach der Regeldetri verfährt. Unſer Exempel iſt demnach dieſes.

```
Thlr.  Jahre  Thlr.   Jahre   Thlr.
200  —  3  :  3000  —  15  =  30 : x
  3              15
———          ————————
600           15000
              3000
             ———————
              45000
                 30
             ———————
            1350000

                          13
                    1350000 | 2250 Thlr.
                    600000  |
```

Oder

```
Thlr.  Jahre  Thlr.   Thlr.   Jahre
200  —  3  —  30  —  3000  —  15
  3                          3000
———                        ———————
600                          45000
                                30
                         ——————————
                          1350000

         13
   1350000 | 2250 Thlr.
   600000  |
```

Wir wollen noch einige andere Exempel vor uns nehmen: 3 Häuer bekommen in 4 Wochen 24 Gulden, was bekommen 6 in 13 Wochen (§. 145. der Grubenbauk.)? Die Rechnung iſt demnach dieſe.

Häuer Wochen Häuer Wochen Gulden

3 — 4 : 6 — 13 = 24

4	6
12	78
	24
	312
	156
	1872

11
67
1872 | 156 Gulden die geſuchte Zahl.
1222
11

Ein Häuer bekomt von einer Stroſſe von 1 Lachter lang, und $\frac{1}{2}$ Lachter hoch 12 Gulden, was muß man ihm auf einem eben ſo feſtem Geſtein von einer Stroſſe von 3 Lachter lang, und $\frac{1}{4}$ Lachter hoch geben (§. 87. und 145. der Grubenbauk.)? Unſer Exempel iſt, wenn man die ganze Lachter zu Viertellachter macht, dieſes.

Viertel-lachter lang	Viertel-lachter hoch	Viertel-lachter lang	Viertel-lachter hoch	Gulden
4 —	2 :	12 —	1 =	12

2	1
8	12
	12
	24
	12
	144

6
144 | 18 Gulden die geſuchte Zahl.
88

 Ferner

Ferner 2 Häuer ſchlagen in vier Wochen 6 Lachter vor einem Stollen heraus, wie viel werden 4 Häuer in 13 Wochen herausſchlagen, wenn das Geſtein ſtets ein und eben daſſelbe iſt? Das Exempel iſt dieſes.

Häuer Wochen Häuer Wochen Lachter
2 — 4 : 4 — 13 = 6
4 4
8 52
6
312

7
312 | 39 Lachter.
88

§. 259.

Es geſchiehet nicht ſelten, daß verſchiedene Perſonen an dem Gewinn, oder dem Verluſt einer Sache Teil nehmen. Da ſich nun alle Anteile zu einem einzelen Anteil, wie der ganze Gewinn, oder Verluſt zu einem einzeln Anteil des Gewinnes, oder des Verluſtes verhalten muß: So läſt ſich auch durch die Regeldetri finden, wie viel ein ieder, der Teil an einer Sache hat, gewinnt, oder verlieret, wenn man die Regeldetri ſo oft anwendet, als Perſonen, oder Fragen da ſind, und dieſe Rechnung nent man die **Geſellſchaftsrechnung**, die **Geſellſchaftsregel**, oder die **Regula Societatis**. Wir wollen dieſelbe durch ein Exempel erläutern, und annehmen

nehmen, eine Perſon A habe in einer Handlung 100 Thlr., eine andere B 40 Thlr., und eine dritte C 60 Thlr. eingelegt, das aber, was ſie damit gewonnen haben, macht 300 Thaler aus. Es muß ſich alſo die ganze Einlage von 200 Thlr. zu der Einlage des A von 100 Thlr. verhalten, wie der ganze Gewinn von 300 Thlr. zu dem Gewinn der Einlage von 100 Thlr., eben ſo nun wie ſich die ganze Einlage von 200 Thlr. zu der Einlage des B von 40 Thlr. verhält, ſo muß ſich auch der ganze Gewinn von 300 Thlr. zu dem Gewinn der Einlage von 40 Thlr. verhalten, und wie ſich die ganze Einlage von 200 Thlr. zu der Einlage des C von 60 Thlr. verhält, ſo verhält ſich auch der ganze Gewinn von 300 Thlr. zu dem Gewinn der Einlage von 60 Thlr. Die Rechnung iſt alſo dieſe.

	Thlr.
A hat eingelegt	100
B ſ ſ ſ ſ	40
C ſ ſ ſ ſ	60
Summa der Einlage	200

Thlr. Thlr. Thlr.

200 : 100 = 300 : x

100

30000

x
3ØØØØ | 150 Thlr. der Gewinn vor A
222ØØ

Thlr. Thlr. Thlr.
200 : 40 = 300 : x
40
12000

~~12000~~ | 60 Thlr. der Gewinn vor B.
~~200~~

Thlr. Thlr. Thlr.
200 : 60 = 300 : x
60
18000

~~18000~~ | 90 Thlr. der Gewinn vor C.
~~200~~

Der Gewinn iſt alſo dieſer.

A hat eingelegt	100 Thlr,	und gewinnt	150 Thlr.	
B ſ ſ ſ ſ ſ	40	ſ ſ ſ ſ ſ	60	ſ
C ſ ſ ſ ſ ſ	60	ſ ſ ſ ſ ſ ſ	90	ſ
Sum̃a der Einlage	200	und des Gewiñs	300	ſ

Und hierbei hat man zugleich eine Probe, ob richtig gerechnet worden.

Sonſt kan man bei dieſer Regel auch alſo ſchlieſſen, wie ſich verhält die Summe aller Einlagen zu dem ganzen Gewinn, oder Verluſt, ſo verhält ſich auch ein gewiſſer Teil der Einlage zu dem Teil des Gewinnes, oder des Verluſts, nemlich 200 Thlr : 300 Thlr = 100 Thlr : x, ferner 200 Thlr : 300 Thlr = 40 Thlr : x, und 200 Thlr : 300 Thlr = 60 Thlr : x.

Wir

Wir wollen noch einige Exempel anführen. Ein Häuer, ein Haspelknecht, und ein Junge haben in einem Freigedinge 3 Gulden Ueberſchuß, und es hat einer wie der andere 18 Schichten verfahren, der erſtere aber bekomt die Schicht 20 ⸗, der andere $13\frac{1}{3}$ ⸗, und der dritte 10 Kreuzer (§. 145. 146. 147. und 150. der Grubenbauk.), man wirft daher die Frage auf, wie viel ein ieder von dieſem Ueberſchuß bekomt? Da der Lohn von den verfahrnen Schichten die Einlage, oder den Anteil eines ieden Arbeiters ausmacht: So verfahre man alſo.

	Gulden
Der Lohn des Häuers von 18 Schichten zu 20 Kr. beträgt ⸗ ⸗	6
der Lohn des Haspelknechts von 18 Schichten zu $13\frac{1}{3}$ Kr. ⸗ ⸗ ⸗	4
der Lohn des Jungens von 18 Schichten zu 10 Kr. ⸗ ⸗ ⸗	3
Summe der Anteile ⸗	13

Nunmehr rechnen wir ſo:

Gulden		Gulden		Gulden		
13	:	6	=	3	:	x
				6		
				18		

(5
~~18~~ | $1\frac{5}{13}$ Gulden Ueberſchuß vor den Häuer.
~~13~~

Gulden Gulden Gulden
$$13 : 4 = 3 : x$$
$$\frac{\begin{array}{r}4\end{array}}{12}$$

$\frac{12}{13}$ Gulden Ueberſchuß vor den Haspelknecht.

Gulden Gulden Gulden
$$13 : 3 = 3 : x$$
$$\frac{\begin{array}{r}3\end{array}}{9}$$

$\frac{9}{13}$ Gulden Ueberſchuß vor den Jungen.

Der Ueberſchuß iſt alſo.

	Gulden
vor den Häuer	$1\frac{5}{13}$
vor den Haspelknecht	$\frac{12}{13}$
und vor den Jungen	$\frac{9}{13}$
Und alſo die Summe	3

Wenn man wiſſen will, wie viele Dinge in der kleineren Art die Brüche ausmachen: So verfährt man nach dem 153 §.

Eine Zeche iſt in 132 Anteile, oder Kuxen geteilet, von dieſen Kuxen nun hat A 60, B 40 und C 32, und der Ueberſchuß, oder die Ausbeute von einem Quartal macht von allen Kuxen 72 Gulden, man fragt daher wie viel A, B und C von dieſer Ausbeute bekommen?

Die Rechnung iſt dieſe.

					Kuxen
A hat Anteile			;	;	60
B	;	;	;	;	40
C	;	;	;	;	32
Summa der Kuxen			;	;	132

Jezt rechnen wir ſo.

Kux. Kux. Gulden

132 : 60 = 72 : x

60

4320

1(9

20

146(6

4320 | $32\frac{96}{132}$ Gulden Ausbeute vor A.

1322

13

Kux. Kux. Gulden

132 : 40 = 72 : x

40

2880

(1(0

11

24(8

2880 | $21\frac{108}{132}$ Gulden Ausbeute vor B.

1322

13

Kux.		Kux.		Gulden		
132	:	32	=	72	:	x
				32		
				144		
				216		
				2304		

2(6
9 7
1 0 8(0
2 3 0 4 | $17\frac{60}{132}$ Gulden Ausbeute vor C.
1 3 2 2 |
1 3

	Gulden
Die Ausbeute vor A beträgt alſo	$32\frac{96}{132}$
„ „ „ „ B „ „ „ „ „	$21\frac{108}{132}$
„ „ „ „ C „ „ „ „ „	$17\frac{60}{132}$
Summe der Ausbeute	72

Eben ſo rechnet man auch den Verluſt, oder die Zubuſen aus, und wenn man die Brüche in Dinge von der kleineren Art verwandeln will: So verfährt man nach dem 153 §.

Ein anderes Exempel iſt dieſes, von den vorigen Gewerken A, B und C (§. 31. Einleitung in die Bergwerksk.) läßt C ſeine Berganteile liegen, oder gehet mit 32 Kuxen aus dem Felde, A und B nun wollen dieſelbe nach Verhältnis ihrer Kuxen unter ſich verteilen, und daher fragt es ſich wie viele Kuxen ein ieder von den 32 bekomt?

Die

Die Rechnung iſt dieſe.

A hat	—	—	60
B ꞉ ꞉	—	—	40
Summe der Kux.	—	—	100

Nun rechnen wir ſo.

Kux 100 : Kux 60 = Kux 32

$$\begin{array}{r} 32 \\ 60 \\ \hline 1920 \end{array}$$

1920 | $19\frac{20}{100}$ Kuxen bekomt A.
100

Kux 100 : Kux 40 = Kux 32

$$\begin{array}{r} 32 \\ 40 \\ \hline 1280 \end{array}$$

1280 | $12\frac{80}{100}$ Kuxen bekomt B.
100

			Kuxen
A bekomt alſo		꞉	$19\frac{20}{100}$
B ꞉	꞉	꞉	$12\frac{80}{100}$
Summe der Kux.		꞉	32

§. 260.

Zuweiln ſoll man verſchiedene Dinge in einer gröſern, oder kleinern Menge nach einer beſtimten Vermiſchung unter einander mengen. Auch hierbei wird durch die Geſellſchaftsrechnung gefunden, wie viel man von einem ieden Dinge zu einer gegebenen Menge

Menge nehmen muß, wenn verſchiedene einfache Dinge nach gewiſſen Verhältniſſen unter einander gemiſcht werden ſollen, man hat inzwiſchen dieſer Anwendung der Geſellſchaftsregel einen andern Namen gegeben, und nent ſie die Regula mixtionis, die Vermiſchungsregel, oder die Regula alligationis. Da ſie von der Geſellſchaftsregel nicht unterſchieden iſt; So darf man nur alſo ſchlieſen: Wie ſich die Summe der verſchiedenen Dinge, die unter einander gemiſcht werden, zu einem beſtimten Teil von einem Ding in dieſer Vermiſchung verhält, ſo verhält ſich auch eine iede gegebene andere Summe von den zu vermiſchenden Dingen zu dem zu ſuchenden Teil von dem vorigen Dinge, das in dieſe Miſchung kommen ſoll, oder wie ſich verhalten alle Teile der Dinge in der gegebenen Vermiſchung zu allen Teilen der Dinge von einer andern gegebenen Menge von dieſer Vermiſchung, ſo verhält ſich auch der beſtimte Teil von einem Dinge in der erſten Vermiſchung, zu dem zu ſuchenden Teil von dieſem Dinge in der andern Menge von dieſer Vermiſchung. Wenn man zum Exempel 100 Pfund Salpeter, 24 Pfund Kohlen, und 20 Pfund Schwefel bedarf, um 144 Pfund Pulver zu machen, und man will wiſſen, wie viel man von iedem nötig hat, um nach eben den Verhältniſſen 30 Pfund Pulver zu machen: So iſt die Rechnung dieſe.

Salpeter

			Pf.
Salpeter	—	—	100
Kohlen	—	—	24
Schwefel	—	—	20
Summe der vermiſchten Dinge			144

Jezt rechnen wir ſo.

Pf. Pul.	Pf. Salp.		Pf. Pul.	
144 :	100	=	30 :	x
	30			
	3000			

```
 (1
 1 2(2
 3 0 0(0  |  20 120/144 Pf. Salpeter zu 30 Pf. Pulver.
 1 4 4 4  |
   1 4
```

Pf. Pul.	Pf. Kohl.		Pf. Pul.	
144 :	24	=	30 :	x
	30			
	720			

```
  2 2  |
 7 2 0 |  5 Pf. Kohlen zu 30 Pf. Pulver.
 1 4 4 |
```

Pf. Pul.	Pf. Schwef.		Pf. Pul.	
144 :	20	=	30 :	x
			20	
			600	

```
 (2
 2 4(4  |
 6 0 0  |  4 24/144 Pf. Schwefel zu 30 Pf.
 1 4 4  |  Pulver.
```

Es

Es werden alſo erfordert zu 30 Pf. Pulver

			Pfund
Salpeter	—	—	$20\frac{120}{144}$
Kohlen	—	—	5
Schwefel	—	—	$4\frac{24}{144}$
Summe	—	—	30

Die Brüche kan man nach dem 153 §. in kleinere Arten auflöſen.

Wir wollen noch ein ander Exempel angeben. In einer Mark, oder 24 Karat legirtem Gold ſind 12 Karat Gold, 4 Karat Silber, und 8 Karat Kupfer (§. 57. 181. 196. und 199. der Probierk.), nun will man wiſſen, wie viel Gold, Silber und Kupfer man nehmen muß, um 16 Mark von einem ſolchergeſtalt legirten Golde zu bekommen? die Rechnung iſt dieſe.

Zu einer Mark von dieſem Golde werden erfordert

			Karat
Gold	—	—	12
Silber	—	—	4
Kupfer	—	—	8
Summe der vermiſchten Dinge			24

Nun=

Nunmehr rechnen wir ſo.

Kar. Kar. Gold Mark Gold

24 : 12 = 16 : x

12

32

16

192

8 ~~192~~ ~~24~~	8 Mark Gold zu 16 Mark legirtem Gold.

Kar. Kar. Silber Mark Gold

24 : 4 = 16 : x

4

64

(1 ~~1~~(6 ~~6~~4 ~~2~~4	$2\frac{16}{24}$ Mark Silber zu 16 Mark legirtem Gold.

Kar. Kar. Kupfer Mark Gold

24 : 8 = 16 x

8

128

~~2~~8 ~~12~~8 ~~2~~4	$5\frac{8}{24}$ Mark Kupfer zu 16 Mark legirtem Gold.

Zu

Zu 16 Mark Gold von der gegebenen Legirung ſind alſo nötig

			Mark
Gold	—	—	8
Silber	—	—	$2\frac{16}{24}$
und Kupfer	—	—	$5\frac{8}{24}$
	Summe	—	16

Nach dem 153 §. kan man finden, wie viel Dinge von der kleineren Art die Brüche ausmachen.

§. 261.

Weil zu viele Zahlen gar ſehr ermüden, und man daher leicht einen Fehler begehen kan: So haben die Italiener gewiſſe Vorteile erfunden, wodurch man ſich das Rechnen in der Regeldetri gar ſehr erleichern kan, dieſe Art zu rechnen aber nent man die welſche **Praktik.** Wir wollen nur die nützlichſten Vorteile erklären, weil die übrigen faſt eben ſo weitläuftig ſind, als die gemeine Ausübung der Regeldetri.

I. Wenn ſich das erſte, und das andere, oder das erſte und das dritte Glied durch einerlei Zahl dividiren laſſen: So dividire man dieſelbe, und nehme die Quotienten vor dieſe Glieder an, im übrigen aber verfahre man nach der Regeldetri: So bekomt man die geſuchte vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 216. und 233.).

2. Exem-

1. Exempel.

Pf. koſten		Thlr.	was koſten	Pf.
	—	12	—	9
4) 4		4) —		
1	—	3	—	9
				3
				27 Thlr. koſten alſo 9 Pfund.

2. Exempel.

Pf. koſten		Gulden,	was koſten	Pf.
5) 25	—	7	—	5) 15
5	—	7	—	3
		3		
		21		

1 | 21 | 5 — $4\frac{1}{5}$ Gulden koſten alſo 15 Pf.

II Wenn es bei den Multiplications- und Diviſionsexempeln geſchiehet, daß das andere Glied aus genanten Zahlen beſtehet (§. 247.): So läſt man die im 250. §. angegebene Reduction weg, und multiplicirt in dem erſten Exempel nur das andere mit dem dritten Glied, in dem andern aber dividirt man das erſte in das andere Glied (§. 104. und 108.).

Exempel vom erſten Fall.

Pf. Gulden Weiſpf. Hell. Pf.
1 — 5 — 4 — 3 — 3
3

15 — 13 — 1 koſten 3. Pf.

Exempel vom andern Fall.

Pf. Thlr. Ggr. Pfen. Pf.
4 — 8 — 7 — 8 — 1
4)

2 — 1 — 11 koſtet 1 Pf.

III. Eben ſo, wie bei dem erſten Exempel, kan man auch verfahren, wann das erſte Glied eine gröſere Zahl als Eins iſt, in dieſem Fall aber, wo man die Reduction weg läſt, muß man das erſte Glied in das Product aus dem andern in das dritte Glied dividiren (§. 108.).

Exempel.

Pf. koſten Gulden Weiſpf. Hell. was koſten Pf.
4 — 3 — 2 — 4 — 2
2

6 — 5 — 8
4)

1 — 16 — 2.

IIII. Zuweiln ſind die Zahlen, die einerlei Namen haben, nur um eins von einander unterſchieden, und es iſt alſo die Zahl, wovon die Frage iſt, nur um Eins gröſer, oder kleiner, in dieſen Fällen nun hat man weiter nichts nötig, als daß man das

erſte

erſte Glied in die Zahl, die mit ihm nicht einerlei Namen hat, dividiret, und den Quotienten im erſten Fall zu dieſer Zahl addiret, im andern aber davon abziehet: So iſt in ienem Fall die Summe, in dieſem aber der Reſt die geſuchte Zahl.

Exempel vom erſten Fall.

Pf. Thlr. Pf.
4 — 24 — 5
4) ——
6
24
——
30 Thlr. koſten 5 Pfund.

Exempel vom andern Fall.

Pf. Gulden Pf.
6 — 42 — 5
6) ——
7
——
35 Gulden koſten 5 Pf.

V. Wenn man endlich in den Brüchen das erſte und das andere Glied mit ſeinen Nennern, und das erſte und das dritte Glied mit dem Nenner des lez-ten Gliedes multipliciret: So erleichtert man ſich auch dadurch zuweiln die Rechnung, und es werden aus ihr die Brüche heraus geworfen.

Exempel.

Pf. koſten Gulden, was koſten Pf.
$\frac{3}{4}$ — $\frac{2}{5}$ — $\frac{5}{6}$

Dieſes kan alſo verwandelt werden, wenn man das erſte und das andere Glied durch den Nenner 4 multiplicirt.

Pf. Gulden Pf.

$3 — \frac{8}{5} — \frac{5}{6}$

Wenn man das erſte und das andere Glied durch den Nenner 5 multiplicirt.

Pf. Gulden Pf.

$15 — 8 — \frac{5}{6}$

und wenn man das erſte und das dritte Glied durch den Nenner 6 multiplicirt

Pf. Gulden Pf.

$90 — 8 — 5$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 40 \\ \hline 90 \end{array}$$

Gulden koſten alſo $\frac{5}{6}$ Pfund.

C.

Von Erfindung der Gröſen in den Progreßionen.

§. 262.

Wenn viele Zahlen in einerlei Verhältnis fortgehen (§. 200.): So nent man eine ſolche Menge von Zahlen eine Reihe, oder eine Progreßion. Da nun die Verhältniſſe entweder arithmetiſche, oder geometriſche Verhältniſſe ſind (§. 204.): So iſt auch die Progreßion von zweierlei Art, und ſie iſt entweder eine arithmetiſche, oder eine geometriſche Progreßion. 3 – 6 – 9 – 12 – 15 –

18 – 21 – 24 – 27 – 30 u. ſ. w. iſt alſo eine arithmetiſche, 3: 6: 12: 24: 48: 96: 192: 384: 768: 1536 u. ſ. w. aber eine geometriſche Progreſſion (§. 206.).

§. 263.

Wenn die Verhältniſſe in den Progreßionen, ſie mögen arithmetiſch, oder geometriſch ſein, Verhältniſſe von der kleineren Ungleichheit ſind (§. 203.): So nent man ſie zunehmende, hingegen aber abnehmende Progreßionen, wenn ihre Verhältniſſe Verhältniſſe der gröſeren Ungleichheit ſind. Es iſt alſo 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 18 – 21 – 24 – 27 – 30 u. ſ. w. eine zunehmende, 30 – 27 – 24 – 21 – 18 – 15 – 12 – 9 – 6 – 3 aber eine abnehmende arithmetiſche Progreßion, und 3: 6: 12: 24: 48: 96: 192: 384: 768: 1536 u. ſ. w. eine zunehmende, 1536: 768: 384: 192: 96: 48: 24: 12: 6: 3 hingegen eine abnehmende geometriſche Progreßion.

§. 264.

Weil die Glieder in einer Progreßion in einerlei Verhältnis neben einander fortgehen (§. 262.): So verhält ſich auch, man mag zum erſten Glied annehmen, welches man will, das erſte zu dem andern, wie das andere zu dem dritten, und daher machen ſtets drei Glieder in einer Progreßion, die neben einander ſtehen, eine Proportio continua aus

 (§. 218.)

(§. 218.). In der arithmetiſchen Progreßion machen alſo drei ſolche Glieder eine arithmetiſche, in der geometriſchen Progreßion hingegen drei dieſer Glieder eine geometriſche Proportio continua aus (§. 221.).

§. 265.

Weil die Glieder in einer Progreßion in einerlei Verhältnis neben einander fortgehen (§. 262.): So verhält ſich auch das erſte, man mag zum erſten annehmen, welches man will, zum andern wie das dritte zu dem vierten, und es machen alſo ſtets vier Glieder, die neben einander ſtehen, eine Proportio diſcreta aus (§. 218.). Es machen alſo in der arithmetiſchen Progreßion vier ſolcher Glieder eine arithmetiſche, in der geometriſchen Progreßion hingegen vier dieſer Glieder eine geometriſche Proportio diſcreta aus (§. 221.).

§. 266.

Wenn ein Glied von einer arithmetiſchen Progreßion, und der Unterſcheid der Glieder gegeben iſt (§. 202. und 262.:) So kan man auch die übrigen Glieder finden, wenn man den Unterſcheid der Glieder zu dem gegebenen Glied vorerſt nach und nach addirt, und dann denſelben von dieſem Glied nach und nach ſubtrahirt, da man im erſten Fall in der zunehmenden Progreßion die folgenden, in dem

andern

andern aber die vorhergehenden, und in der abnehmenden Progreßion im erſten Fall die vorhergehenden, in dem andern aber die folgenden Glieder bekomt (§. 207. 208. und 263.). Iſt zum Exempel das Glied 9 und der Unterſcheid der Glieder 3 gegeben: So ſind in der zunehmenden Progreßion $9 + 3 = 12$, und $12 + 3 = 15$ u. ſ. w. die folgenden, $9 - 3 = 6$ und $6 - 3 = 3$ aber die vorhergehenden Glieder, in der abnehmenden Progreßion hingegen $9 + 3 = 12$, und $12 + 3 = 15$ u. ſ. w. die vorhergehenden, $9 - 3 = 6$, und $6 - 3 = 3$ aber die folgenden Glieder.

§. 267.

Wenn in einer geometriſchen Progreßion ein Glied, und der Name der Verhältnis gegeben iſt (§. 202. und 262.): So kan man auch die übrigen Glieder finden, wenn man den Namen der Verhältnis mit dem gegebenen Glied vorerſt nach und nach multiplicirt, und dann denſelben in dieſes Glied nach und nach dividiret, da man im erſten Fall in der zunehmenden Progreßion die folgenden, in dem andern aber die vorhergehenden, und in der abnehmenden Progreßion in dem erſten Fall die vorhergehenden, in dem andern aber die folgenden Glieder bekomt (§. 209. 210. und 263.). Wenn zum Exempel das Glied 16, und der Name der Verhältnis 2

gegeben iſt: So ſind in der zunehmenden Progreſſion 16.2=32, und 32.2=64 u. ſ. w. die folgenden, 16:2=8, und 8:2=4 aber die vorhergehenden, in der abnehmenden Progreßion hingegen 16.2=32, und 32.2=64 u. ſ. w. die vorhergehenden, 16:2=8, und 8:2=4 aber die folgenden Glieder.

§. 268.

Wenn ſich die Glieder einer arithmetiſchen Progreßion dergeſtalt auf die Glieder einer zunehmenden geometriſchen Progreßion beziehen, daß die erſteren anzeigen, wie vielmal in der leztern der Name der Verhältnis mit dem erſten Glied multiplicirt worden: So heiſen die Zahlen in der erſtern Progreßion die Logarithmi von den Zahlen in der andern Progreßion, auf welche ſie ſich beziehen.

§. 269.

Da das andere Glied in einer geometriſchen Progreßion entſtehet, wenn man das erſte Glied mit dem Namen der Verhältnis einmal, das dritte, wenn man das erſte Glied mit dem Namen der Verhältnis zweimal, und das vierte, wenn man das erſte Glied mit dem Namen der Verhältnis dreimal multipliciret u. ſ. w. (§. 262. und 267.): So entſtehen auch dadurch die Logarithmi von den Zahlen in einer geometriſchen Progreßion, wenn man zu den Gliedern

dern in dieſer Progreßion ſezzet, wie oft der Name der Verhåltnis mit dem erſten Glied multiplicirt worden. Es ſei 1 das erſte Glied in der geometriſchen Progreßion, und 2 der Name der Verhåltnis: So iſt, wenn man ſtets das erſte Glied mit dem Namen der Verhåltnis multipliciret, die geometriſche Progreßion 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. u. ſ. w. Schreibt man nun unter iedes Glied, wie oft der Name der Verhåltnis mit dem erſten Glied multiplicirt worden: So komt unter 1, wobei man noch nicht multiplicirt hat 0, unter 2, wobei man den Namen der Verhåltnis einmal mit dem erſten Glied multiplicirt hat, 1, und unter 4, wobei man den Namen der Verhåltnis zweimal mit dem erſten Glied multiplicirt 2, u. ſ. w. Es iſt dieſemnach

die geometriſche Progreßion 1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.u. ſ. w.
und die arithmetiſche Progreßion 0.1.2.3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.u.ſ.w.

Dieſemnach iſt 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 2 der Logarithmus von 4, 3 der Logarithmus von 8 u. ſ. w.

§. 270.

Wenn der Logarithmus von Eins Null iſt: So iſt der Logarithmus des Products die Summe von den Logarithmis der beiden Zahlen, die in einander multiplicirt worden.

Beweis.

Wenn man zwei Zahlen in einander multipliciret: So iſt Eins ſo oft in dem Multiplicator enthalten, als das Multiplicandum in dem Product begriffen iſt (§. 78.). Die Factores und das Product machen alſo eine geometriſche Proportion aus, in welcher 1 das erſte, der Multiplicator das andere, das Multiplicandum das dritte, und das Product das vierte Glied iſt (§. 220.). Da nun, wie wir angenommen haben, von 1 der Logarithmus 0 iſt, und die Logarithmi in einer arithmetiſchen Proportion fortgehen (§. 268.): So müſſen auch die Logarithmi des Multiplicators, des Multiplicandi, und des Products eine arithmetiſche Proportion ausmachen, in welcher das erſte Glied 0, das lezte aber der Logarithmus des Products iſt; in einer ieden arithmetiſchen Proportion aber iſt die Summe der äuſerſten Glieder der Summe der mittleren gleich (§. 224.), und daher iſt auch der Logarithmus des Products, welcher die Summe der beiden äuſerſten Glieder iſt, weil das erſte Glied 0 iſt, die Summe von den Logarithmis der beiden Zahlen, die in einander multiplicirt worden, weil die Logarithml dieſer Zahlen die mittleren Glieder ſind.

Wir wollen annehmen, es ſei der Multiplicator 8, und das Multiplicandum 64: So iſt ihr Product 512, und alſo 1:8=64:512, der Logarith-

mus

mus von 1 aber Null, von 8 drei, von 64 ſechs, und von 512 neun (§. 268. und 269.), und demnach 0—3=6—9. Da nun in der arithmetiſchen Proportion die Summe der beiden äuſerſten Glieder der Summe der mittleren gleich, und das erſte Glied 0 iſt: So iſt auch der Logarithmus 9 des Products 512, die Summe von den Logarithmis 3 und 6 der in einander multiplicirten Zahlen 8 und ~~32~~. 64.

§. 271.

Wenn man dieſemnach zwei Zahlen in einander multipliciren ſoll: So hat man nur nötig, daß man ihre Logarithmos addirt, und die Zahl aufſucht, wovon dieſe Summe der Logarithmus iſt, da man dann das verlangte Product bekomt. Es verwandeln alſo die Logarithmi das Multipliciren in Addiren, und dadurch wird man bei groſen Zahlen ſehr vieler Beſchwerlichkeit entlediget.

§. 272.

Aus dem gegebenen Logarithmo eines Products kan man gar leicht alle mögliche Factores dieſes Products finden, wenn man den Logarithmum deſſelben in alle mögliche kleinere Logarithmos zerteilet, woraus er zuſammengeſezt werden kan, und dazu die Zahlen aufſuchet, wovon ſie die Logarithmi ſind, die dann die verlangte Factores ausmachen. Iſt uns

zum

zum Beiſpiel der Logarithmus 6 von dem Product 64 gegeben, und man zergliedert dieſen alſo: 6 = 1 + 5, 6 = 2 + 4, 6 = 3 + 3, und 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1: So ſind 2 und 32 die Zahlen von den Logarithmis 1 und 5, und die Factores von dem Product 64, 4 und 16 ſind die Zahlen von den Logarithmis 2 und 4, und die Factores von dem Product 64, 8 und 8 ſind die Zahlen von den Logarithmis 3 und 3, und die Factores von dem Product 64, und 2, 2, 2, 2, 2 und 2, ſind die Zahlen von den Logarithmis 1, 1, 1, 1, 1 und 1 und die Factores von 64 (§. 269.).

§. 273.

Der Logarithmus des Quadrats iſt zweimal ſo gros, als der Logarithmus ihrer Wurzel, wenn von 1 der Logarithmus 0 iſt.

Beweis.

Das Quadrat entſtehet, wenn man die Wurzel mit ſich ſelbſt multipliciret (§. 168.). Es iſt alſo das Quadrat das Product, die in einander multiplicirten Wurzeln aber ſind die Factores, oder die in einander multiplicirten Zahlen, und daher iſt auch der Logarithmus des Quadrats die Summe von den Logarithmis der in einander multiplicirten Wurzeln (§. 270.). Nun iſt aber die Wurzel ſich ſelbſt gleich, und es wird die Wurzel mit ſich ſelbſt multiplicirt, und daher ſind auch die Factores des Products gleich,

und

und alſo iſt auch der Logarithmus des Quadrats zweimal ſo gros, als der Logarithmus der Quadratwurzel, wenn von 1 der Logarithmus 0 iſt.

Es ſei zum Exempel das Quadrat 16 und ihre Wurzel 4: So iſt der Logarithmus des erſteren 4, und der lezteren 2 (§. 269.), und alſo 4 zweimal ſo gros als 2.

§. 274.

Aus dem Logarithmo einer Zahl kan man alſo gar leicht erkennen, ob ſie eine Quadratzahl iſt, wenn ſich der Logarithmus durch 2 dividiren läſt, und es iſt auch hieraus zugleich klar, daß die Hälfte von dem Logarithmo einer Quadratzahl dem Logarithmo der Quadratwurzel gleich iſt.

§. 275.

Weil die Hälfte von dem Logarithmo der Quadratzahl dem Logarithmo der Quadratwurzel gleich iſt (§. 274.): So kan man aus einer Quadratzahl die Quadratwurzel leicht ausziehen, wenn man ihren Logarithmum aufſuchet, und dieſen mit 2 dividiret, aber auch von dieſer Hälfte die Zahl aufſuchet, wovon ſie der Logarithmus iſt, da man dann die verlangte Wurzel bekomt.

§. 276.

Eben ſo leicht kan man auch eine Zahl in das Quadrat erheben, wenn man ihren Logarithmum

auf=

aufſuchet, und dieſen mit 2 multipliciret, alsdann aber auch dazu die Zahl ſuchet, wovon er der Logarithmus iſt, da man dann das verlangte Quadrat bekomt. Die Logarithmi verwandeln alſo das Ausziehen der Quadratwurzel in Dividiren mit 2, und das Erheben der Zahlen in das Quadrat in Multipliciren mit 2.

§. 277.

Der Logarithmus der Cubikzahl iſt dreimal ſo gros, als der Logarithmus ihrer Wurzel, wenn von 1 der Logarithmus 0 iſt.

Beweis.

Die Cubikzahl entſtehet, wenn man die Quadratzahl durch ihre Wurzel multipliciret (§. 168.). Es iſt alſo die Cubikzahl das Product, und das Quadrat und ihre Wurzel ſind die Factores, oder die in einander multiplicirten Zahlen, und daher iſt auch der Logarithmus der Cubikzahl die Summe von den Logarithmis der Quadratzahl, und der Quadratwurzel (§. 270.). Nun iſt aber die Wurzel bei der Erhebung einer Zahl in das Quadrat zweimal der Factor, und bei der Erhebung des Quadrats in den Cubum, iſt ſie zum drittenmal der Factor (§. 268.), und derohalben iſt der Logarithmus der Cubikzahl dreimal ſo gros, als der Logarithmus ihrer Wurzel, wenn von 1 der Logarithmus 0 iſt.

§. 278.

§. 278.

Man kan alſo aus dem Logarithmo einer Zahl erkennen, ob ſie eine Cubikzahl iſt, wenn ſich ihr Logarithmus durch 3 dividiren läſt, und es erhellet hieraus zugleich, daß der dritte Teil von dem Logarithmo der Cubikzahl der Logarithmus ihrer Wurzel iſt.

§. 279.

Weil der dritte Teil von dem Logarithmo der Cubikzahl der Logarithmus ihrer Wurzel iſt (§. 278.): So kan man aus einer Zahl die Cubikwurzel leicht ausziehen, wenn man ihren Logarithmum aufſuchet, und dieſen mit 3 dividiret, alsdann aber auch zu dem Quotienten die Zahl aufſuchet, wovon er der Logarithmus iſt, da man dann die verlangte Wurzel bekomt.

§. 280.

Auch kan man eine Zahl gar leicht in den Cubum erheben, wenn man ihren Logarithmum aufſuchet, dieſen mit drei multipliciret, und alsdann dazu die Zahl ſuchet, wovon er der Logarithmus iſt, da man den Cubum bekomt. Die Logarithmi verwandeln alſo das Ausziehen der Cubikwurzel in Dividiren mit 3, und das Erheben einer Zahl in den Cubum in Multipliciren mit 3. Ueberhaupt kan man von einer Zahl eine iede Dignität leicht finden,

den, wenn man den Logarithmum der Zahl mit dem Exponenten der Dignität multipliciret, und ſo kan man auch eine iede Wurzel von einer Dignität finden, wenn man den Logarithmum der Dignität durch den Exponenten dividirt (§. 168. und 171.).

§. 281.

Wenn der Logarithmus von Eins Null iſt: So iſt der Logarithmus des Quotienten der Unterſcheid zwiſchen den Logarithmis der beiden Zahlen, die in einander dividirt worden.

Beweis.

Wenn man zwei Zahlen in einander dividitet: So iſt der Diviſor ſo oft in dem Dividendo enthalten, als Eins in dem Quotienten begriffen iſt (§. 80.). Der Diviſor, der Dividendus, Eins und der Quotient machen alſo eine geometriſche Proportion aus (§. 220.). Nun gehen aber die Logarithmi der Zahlen in einer arithmetiſchen Proportion fort (§. 268.), und daher machen auch der Logarithmus des Diviſors, der Logarithmus des Dividendi, der Logarithmus von Eins, und der Logarithmus des Quotienten eine arithmetiſche Proportion aus; in einer arithmetiſchen Proportion aber findet man die vierte arithmetiſche Proportionalzahl, wenn man die beiden mittleren Glieder addiret, und von ihrer Summe das erſte Glied abziehet (§. 236.), und dieſemnach

muß

muß man in dieſer arithmetiſchen Proportion, da ſich der Logarithmus des Diviſors zu dem Logarithmo des Dividendi verhält, wie der Logarithmus von Eins zu dem Logarithmo des Quotienten, den Logarithmum von Eins und dem Dividendo addiren, und von ihrer Summe den Logarithmus von dem Diviſor abziehen, wenn man den Logarithmum von dem Quotienten wiſſen will. Es iſt aber unſerem angenommenen Saz nach der Logarithmus von Eins Null, und daher muß man nur den Logarithmum des Diviſors von dem Logarithmo des Dividendi abziehen, wenn man den Logarithmum des Quotienten wiſſen will, und alſo iſt der Logarithmus des Quotienten der Unterſcheid zwiſchen den Logarithmis der beiden Zahlen, die man in einander dividirt hat, wenn der Logarithmus von Eins Null iſt.

Wir wollen annehmen, es ſei 8 der Dividendus, und 4 der Diviſor: So iſt der Quotient 2, folglich $4:8=1:2$, und 2 der Logarithmus von 4, 3 der Logarithmus von 8, 0 der Logarithmus von 1, und 1 der Logarithmus von 2 (§. 268. und 269.), und demnach $2-3=0-1$. Weil nun in der arithmetiſchen Proportion die Summe der mittleren Glieder weniger dem erſten Glied, das vierte Glied gibt (§. 236.), und das dritte Glied 0 iſt: So iſt auch der Unterſcheid zwiſchen dem Logarithmo 3 von dem Dividendo 8, und dem Logarithmo 2 des Diviſors

4, nemlich der Logarithmus 1 der Logarithmus des Quotienten.

§. 282.

Wenn man alſo zwei Zahlen in einander dividiren ſoll: So hat man nur nötig, daß man ihre Logarithmos aufſuchet, und den Logarithmum des Diviſoris von dem Logarithmo des Dividendi abziehet, zu dem Unterſchied aber die Zahl ſuchet, wovon er der Logarithmus iſt, da man dann den Quotienten bekomt. Es verwandeln alſo die Logarithmi das Dividiren in Subtrahiren, und dadurch erleichtern ſie das Rechnen gar merklich.

§. 283.

Weil ein ieder Bruch ein Quotient iſt, welcher entſtehet, wenn man eine kleinere Zahl durch eine gröſere dividiren ſoll: So iſt auch der Nenner der Diviſor, und der Zähler der Dividendus (§. 110. und 111.), und daher findet man den Logarithmum eines Bruchs, wenn man den Logarithmum des Nenners von dem Logarithmo des Zählers ſubtrahiret, oder weil das gröſere von dem kleineren nicht abgezogen werden kan, wenn man den Logarithmum des Zählers von dem Logarithmo des Nenners abziehet, und weil, wenn man das gröſere von dem kleineren abziehet, weniger als nichts

übrig

übrig bleibt, zu dem Reſt das Zeichen der Subtraction ſezzet (§. 77.). So findet man zum Exempel den Logarithmum von $\frac{1}{2}$, wenn man den Logarithmum 0 vom Zähler 1 vom Logarithmo 1 vom Nenner 2 abziehet, da 1 — 0 = 1, und wenn man vor den Unterſcheid das Zeichen — ſezzet, von dem Bruche $\frac{1}{2}$ der Logarithmus — 1 iſt.

§. 284.

Damit man ſich das Rechnen erleichtern, und die Logarithmos vor alle Zahlen um deſto genauer finden könne: So haben Neper und Brigge eine geometriſche Progreßion angenommen, in welcher das erſte Glied 1, und der Name der Verhältnis 10 iſt. Beziehet man nun darauf die Logarithmi 0, 1, 2, 3, 4, u. ſ. w. (§. 268. und 269.), und verwandelt dieſe in Decimalzahlen (§. 157.), indem man ſie mit 8 Nullen vermehrt: So hat man eine geometriſche Progreßion 1, 10, 100, 1000, u. ſ. w. dazu aber die Logarithmi 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 u. ſ. w., und hiernach ſind die Logarithmi vor alle Zahlen von 1 bis 10000, ja bis 20000 und bis 100,000 ausgerechnet worden.

§. 285.

Die Glieder, welche eine ſolche Progreßion ausmachen, werden die Hauptzahlen, die Zahlen aber,

welche dazwiſchen fallen, die mittlere Zahlen genennet.

§. 286.

Dieienige Ziffer des Logarithmi, welche anzeigt, zwiſchen welche unmittelbar auf einander folgende Hauptzahlen dieſer Logarithmus fält, heiſt die Kennziffer, oder die Characteriſtica. Weil nun die Nulle an die Logarithmi hinten angehängt werden (§. 284.): So iſt dieſelbe die erſte Ziffer zur linken Hand, die man um der Unterſcheidung willen, durch einen Punkt von den übrigen abſondert. Wenn alſo die Characteriſtica eines Logarithmi 0 iſt; So fält derſelbe zwiſchen 1 und 10: Iſt ſie 1; So fält er zwiſchen 10 und 100: Iſt ſie 2; So fält er zwiſchen 100 und 1000: Und iſt ſie 3; So fält er zwiſchen 1000 und 10000 u. ſ. w.

§. 287.

Den Logarithmum von einer mittlern Zahl zu finden, die zwiſchen die Hauptzahlen der in einem zehnfachen Wachsthum aufſteigenden geometriſchen Progreßion fält (§. 284. und 285.).

Aufloſung.

Da die Logarithmi eigentlich anzeigen, wie oft in der geometriſchen Progreßion das erſte Glied mit dem Namen der Verhältnis multipliciret worden (§. 268.),

(§. 268.), und die mittlern Zahlen keine Glieder der Progreßion ſind (§. 285.): So iſt es auch unmöglich, den Logarithmum von einer mittleren Zahl genau zu finden. Man muß daher zufrieden ſein, wenn man den Logarithmum von der gegebenen Zahl beinahe, und in ſo weit findet, daß der Unterſchied zwiſchen dem wahren, und dem gefundenen unendlich klein iſt, welchen Logarithmum man dann, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, vor den wahren annehmen kan. Es ſind, dieſes vorausgeſezt, die Regeln unſerer Aufgabe dieſe.

1) Um den Logarithmum deſto genauer finden zu können: So verwandele man die Hauptzahlen der geometriſchen Progreßion, zwiſchen welche die gegebene mittlere Zahl fält, wozu man den Logarithmum finden ſoll, in Decimalzahlen, und hänge ihnen ſieben Nulle an (§. 157.). Wenn zum Exempel die mittlere Zahl 8 iſt: So verwandele man die Hauptzahlen 1 und 10, zwiſchen welche dieſe Zahl fället, in die Decimalzahlen 1.0000000 und 10.0000000.

2) Man ſuche zwiſchen 1.0000000 und 10.0000000 die mittlere geometriſche Proportionalzahl (§. 235.), zwiſchen dem Logarithmo von 1 und 10 aber (§. 284.) die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl (§. 234.): So iſt dieſe der Logarithmus von der geſuchten mittleren geometriſchen Proportionalzahl (§. 268. und 269.).

3) Iſt die gefundene mittlere geometriſche Proportionalzahl von der gegebenen, mit ſo vielen Nullen vermehrt, als man den Gliedern der geometriſchen Progreßion angehängt hat, in unſerem Falle von 80000000, noch merklich unterſchieden: So ſuche man zwiſchen ihr, und der gröſten Hauptzahl, zwiſchen die ſie fället, in unſerem Falle zwiſchen ihr und 10. 0000000, abermals die mittlere geometriſche, zwiſchen dem gefundenen Logarithmo, und dem Logarithmo von 10. 0000000 aber die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl (§. 234. und 235.). So nun fahre man ſtets fort, bis man in der geometriſchen Progreßion eine mittlere Proportionalzahl findet, die von der gegebenen Zahl, wozu man den Logarithmum finden ſoll, unendlich wenig unterſchieden iſt: So iſt alsdann die geſuchte mittlere arithmetiſche Proportionalzahl von dieſer Zahl der geſuchte Logarithmus, und alſo in unſerem Fall der Logarithmus von 8.

§. 288.

Da der dritte Teil von dem gefundenen Logarithmo von 8, weil 8 eine Cubikzahl iſt (§. 278.), der Logarithmus von 2, das zweifache von dem Logarithmo von 2 aber der Logarithmus von 4 iſt, weil 4 eine Quadratzahl von 2 iſt (§. 274.), und endlich das Vierfache des Logarithmi von 2, der Logarithmus

mus von 16 iſt, weil das Vierfache des Logarithmi der Wurzel 2 der Logarithmus der vierten Dignität iſt, (§. 280.): So hat man auch nicht nötig, daß man alle Logarithmi auf eine ſo mühſame Art findet.

§. 289.

Weil die Logarithmi der Zahlen von Vlac, Wolf, und andern mehr ſchon herausgegeben ſind; So iſt es auch nicht nötig, daß man die Logarithmi der Zahlen ausrechnet: Und wir haben dieſe ſo bekante Aufgabe nur zu dem Ende hierher geſezzet, damit die Anfänger das Vergnügen haben, die Erfindung der Logarithmorum einzuſehen.

Der zwette Abſchnitt
von
der Algebra.

§. 290.

Die Algebra, die Analytic, oder die Analyſis, welche eine Wiſſenſchaft iſt, die lehret, wie man durch den Gebrauch allgemeiner Zeichen, aus bekanten unbekante Gröſen, vermittelſt der Gleichungen, finden ſoll (§. 8.), dehnt ſich überhaupt auf zwei Stükke aus, vorerſt auf die Bezeichnung, und die Eigenſchaften der Gröſen überhaupt, und dann auf

die Erfindung der unbekanten Gröſen, aus bekanten. Beides wollen wir in zwei Kapitteln abhandeln.

Das erſte Kapittel
von der
Bezeichnung und den Eigenſchaften der Gröſen überhaupt.

§. 291.

Die Gröſen, überhaupt betrachtet (§. 15.), ſind entweder bekante, oder unbekante Gröſen, iene benennet man mit den erſten Buchſtaben des kleinen Alphabets, und mit a, b, c, d u. ſ. w., dieſe aber mit den lezten Buchſtaben dieſes Alphabets, und mit x, y, z. Unter dieſen Buchſtaben nun kan man ſich eine iede Gröſe, doch unter den erſten alzeit bekante, unter den leztern aber unbekante gedenken, und dieſes muß man ſich ſehr wol merken.

§. 292.

Die Gröſen, welche mit einem Buchſtaben benent werden, heiſen einfache, die aber, welche aus mehreren Buchſtaben beſtehen, nent man zuſammengeſezte Gröſen. Es ſind alſo a, b, c, d, x und y einfache, aa, ab, bbc, abc, xy und xyz zuſammengeſezte Gröſen.

§. 293.

§. 293.

Die Gröſen, welche mit einerlei Buchſtaben benent werden, nent man ähnliche, oder gleichnamige, die aber, welche durch verſchiedene Buchſtaben ausgedrukt werden, unähnliche, oder ungleichnamige Gröſen. Es ſind alſo a und 2a, und b und 3b gleichnamige, a und b, und a und aa aber ungleichnamige Gröſen (§. 79.).

§. 294.

Wenn eine Gröſe mehr als nichts iſt: So nent man ſie eine wirkliche, eine beiahende, oder eine poſitive Gröſe. Und wenn ſie weniger als nichts iſt; So wird ſie eine verneinende, oder eine negative Gröſe genent. Jene bemerkt man mit dem Zeichen +, dieſe aber mit dem Zeichen — (§. 75. und 77.). Die Gröſen, die weder + noch — haben, nent man ungebundene Gröſen, oder Quantitates incomplexä, die aber, welche mit + verknüpft, oder mit — getrent ſind, gebundene Gröſen, oder Quantitates complexä. Es ſind alſo + a, + ab und + a b c poſitive, — a, — b c und — a b c aber negative Gröſen, a, ab, abc und $\frac{bb}{c}$ hingegen ſind Quantitates incomplexä, a + b, und a — b b aber Quantitates complexae. Die Gröſen, welche kein Zeichen vor ſich haben, nent man auch abſolute Gröſen, und ſie werden

alzeit als poſitive Gröſen betrachtet. Eine iede ungebundene Gröſe ſowol, als die erſte Gröſe in einer gebundenen Gröſe, iſt alſo eine poſitive Gröſe. Es bedeutet alſo a ſo viel als + a, und a — b + c ſo viel als + a — b + c.

§. 295.

Durch Vermögen und Schulden kan man ſich die deutlichſten Begriffe von den poſitiven, und den negativen Gröſen machen. Wenn man kein Vermögen, und auch keine Schulden, oder ſo viel Vermögen, als Schulden hat; So hat man Nichts: Hat man alſo Vermögen und keine Schulden; So hat man mehr als nichts, und folglich eine poſitive Gröſe: Hat man hingegen Schulden und kein Vermögen; So hat man weniger als Nichts, und folglich eine negative Gröſe. Wenn man alſo 500 Gulden Vermögen, und auch 500 Gulden Schulden hat; So hat man Nichts: Und wenn man 500 Gulden Vermögen, und keine Schulden hat; So hat man mehr als Nichts, und alſo etwas Wirkliches: Und wenn man endlich kein Vermögen, und 500 Gulden Schulden, oder 100 Gulden Vermögen, und 500 Gulden Schulden hat; So hat man weniger als nichts, und alſo einen Mangel, und Schulden.

§. 296.

Wenn man anzeigen will, daß eine Gröſe etliche mal zu ſich addirt, oder in eine Zahl multiplicirt iſt (§. 78.): So ſchreibt man zur linken Hand eine Zahl davor, und dieſe heiſt der Coefficient. Es ſind alſo von den Gröſen 2a, 3x und 5bc die Coefficienten 2, 3 und 5. Es iſt von ſelbſt klar, daß der Coefficient der Gröſen, die keine Zahlen vor ſich haben, 1 iſt. Es iſt alſo a, und bb ſo viel, als 1a und 1bb.

§. 297.

Da man in der Algebra die Potenzen durch Buchſtaben ausdrukt, und obenhin zur rechten Hand ihren Exponenten ſchreibt (§. 171.); So muß man die Coefficienten von den Exponenten ſehr wol unterſcheiden: Denn 2a iſt ſo viel, als a + a, und a^2 ſo viel als aa, oder a. a (§. 78. 79. und 168.). Iſt nun a = 3; So iſt 2a = a + a = 3 + 3 = 6, und a^2 = aa = a. a = 3. 3 = 9.

§. 298.

Wir bemerken überhaupt noch, daß man die Buchſtaben einer Gröſe ſo ordnet, wie das Alphabet auf einander folgt, und dieſes um deswillen, damit man die Aehnlichkeit verſchiedener Gröſen um deſto beſſer überſehen könne (§. 293.).

Das

Das zwette Kapittel
von der
Erfindung der unbekanten Gröſen aus bekanten.

§. 299.

Wenn man Gröſen erfindet: So betrachtet man dieſe Gröſen entweder vor ſich, oder man vergleicht ſie mit andern, und dieſes ſind die zwei Stükke, die wir in dieſem Kapittel betrachten wollen.

Der erſte Tittel
von der
Erfindung der Gröſen vor ſich betrachtet.

§. 300.

Zu dieſen Gröſen rechnen wir die Reduction der Gröſen, und die Erfindung der Gröſen in ganzen Gröſen, in Brüchen, und in Potenzen.

Erſtens
von der
Reduction der Gröſen.

§. 301.

Wenn man die Teile einer gebundenen Gröſe (§. 294.), die man ihre Glieder zu nennen pflegt, auf

auf wenigere Glieder bringt, ſo, daß dadurch ihr Werth nicht verändert wird: So ſagt man, daß man dieſe Gröſe reducire.

§. 302.

Eine gebundene Gröſe zu reduciren.

Auflöſung.

I. Wenn zwei ähnliche Glieder einander gleich ſind, und das eine poſitiv, das andere aber negativ iſt (§. 294.): So laſſe man dieſelbe aus, weil ſie ſich aufheben, und 0 oder Nichts geben (§. 295.). Dieſemnach wird $a^2 + 2\,bc - 2\,bc + d - d + 2\,e$ auf $a^2 + 2\,e$, und $2\,b^3 + c^2 - c^2 + 3\,d - f^2 + f^2$ auf $2\,b^3 + 3\,d$ reducirt.

II. Wenn die ähnlichen Glieder alle poſitiv, oder negativ ſind: So addire man dieſelbe, und gebe der Summe das Zeichen dieſer Glieder, weil poſitive zu poſitiven, und negative zu negativen Gröſen addiret in der Summe poſitive, oder negative Gröſen geben müſſen (§. 30. 74. und 294.). Es wird alſo $3\,a + 2\,bc - 2\,c + bc + 3\,bc$ auf $3\,a + 6\,bc - 2\,c$, $a^2 - 3\,b^2 + c^3 - 4\,b^2 - b^2 + 2\,d^3$ auf $a^2 - 8\,b^2 + c^3 + 2\,d^3$, und $a^2 + b^3 + 2\,b^3 + 2\,c - d^4 - 2\,d^4$ auf $a^2 + 3\,b^3 + 2\,c - 3\,d^4$ reducirt.

III. Wenn von zwei ähnlichen Gliedern das eine poſitiv, das andere aber negativ iſt: So ziehe man

den

den kleineren Coefficienten von dem gröſeren ab, und gebe dem Unterſcheid das Zeichen des gröſeren Coefficienten: Denn wenn man eine negative Gröſe von einer gröſeren poſitiven weg nimt; So hebt ſie ſo viel von der poſitiven Gröſe auf, als ſie iſt: Und wenn eine poſitive Gröſe von einer gröſeren negativen weg genommen wird; So nimt ſie einen ſo groſen Mangel von der negativen weg, als ſie ſelbſt iſt. (§. 294. 295. und 296.). Dieſemnach wird $ab + 2cd - cd + e$ auf $ab + cd + e$, $abb - 3df + 2df - e$ auf $abb - df - e$, und $a + 2b - b - 3cd + cd + f$ auf $a + b - 2cd + f$ reducirt.

Zweitens
von der
Erfindung der Gröſen in ganzen Gröſen.

§. 303.

Gröſen zu addiren (§. 74.).

Erſte Aufloͤſung.

1) Man ſchreibe die ähnlichen Gröſen unter einander, und bringe ſie, wenn ſie einerlei Zeichen haben, mit ihrem Zeichen in eine Summe (§. 293. und 302. N. II.). Wenn hingegen

2) ihre Zeichen verſchieden ſind: So ziehe man den Coefficienten der kleineren Gröſe von dem Coefficienten der Gröſeren ab, und ſezze zu dem Unterſcheid,

ſcheid, wenn was übrig bleibt, das Zeichen der Gröſeren (§. 302. N. III.). Wenn aber

3) die ähnlichen Gröſen einander aufheben: So laſſe man ſie in der Summe aus (§. 302. N. I.).

1. Exempel.

$$a + 2b - 3c + 4d + 5f - 2e + 2g$$
$$3a - b + 2c + d - 3f + 4e - 2g$$

die Sume $4a + b - c + 5d + 2f + 2e$

2. Exempel.

$$2a^2 - 3b^2 - 2c^3 + 4d^2 - 3g^4$$
$$a^2 - b^2 + c^3 - 4d^2 + 4g^4$$

die Sum̃e $3a^2 - 4b^2 - c^3 + g^4$ (§. 297.).

3. Exempel.

$a^3 + xy^3 - z$ und $2a + b^2 - c^3$

kommen alle neben einander, weil ein iedes ſich ſelbſt ähnlich iſt, und eben darum werden ſie nur an einander geſchrieben, und zwar ſo

$$a^3 + xy^3 - z + 2a + b^2 - c^3$$

Andere Auflöſung.

Wenn man die Gröſen mit ihren Zeichen an einander hängt, und dieſelbe reducirt (§. 302. N. I. II. und III.): So werden ſie auch addirt, und man bekomt ebenwol die Summe.

1. Exempel.

a, a, a addirt gibt die Summe $a + a + a = 3a$ (§. 294. 296. und 302. N. II.).

Des-

Desgleichen

$3abc$ und abc addirt gibt $4abc$ (§. 294. 296. und 302. N. II.).

Ferner

$-2c-3c$ addirt gibt die Summe $-5c$ (§. 296. und 302. N. II.).

Endlich

$-2b+3b$ addirt gibt $+b$ (§. 302. N. III.)

Und

$2a-2a$ addirt gibt 0 (§. 302. N. I.).

2. Exempel.

$a+2b-3c+4d+5f-2e+2g$ zu $3a-b+2c+d-3f+4e-2g$ addirt gibt $a+2b-3c+4d+5f-2e+2g+3a-b+2c+d-3f+4e-2g$, und wenn man dieſes reducirt die Summe $4a+b-c+5d+2f+2e$.

3. Exempel.

$2a^2+3b^2-2c^3+4d^2-3g^4$ zu $a^2-b^2+c^3-4d^2+4g^4$ addirt gibt $2a^2+3b^2-2c^3+4d^2-3g^4+a^2-b^2+c^3-4d^2+4g^4$, und wenn man dieſes reducirt $3a^2+2b^2-c^3+g^4$.

4. Exempel.

$2a^3+2b-3x+2y^2$ addirt zu b^2-3c^3+3z gibt die Summe $2a^3+2b-3x+2y^2+b^2-3c^3+3z$.

§. 304.

Gröſen von einander zu ſubtrahiren (§. 76.).

Erſte Auflöſung.

1) Man verwandele in der abzuziehenden Gröſe, die poſitiven Gröſen in negative, und die negativen in poſitive Gröſen, man verwandele nemlich die Zeichen in die gegen geſezten, und alſo + in —, und — in + (§. 75. und 77.).

2) Man hänge die abzuziehende Gröſe an die an, wovon man abziehen ſoll.

3) Endlich reducire man dieſe Gröſe (§. 302. N. I. II. und III.): So bekomt man den Reſt.

Beweis.

Wenn man eine poſitive Gröſe von einer andern abziehen ſoll: So ſoll man eine Gröſe von derſelben wegnehmen (§. 76. und 77.), und daher muß man auch in der abzuziehenden Gröſe die poſitive in eine negative Gröſe, und + in — verwandeln. Soll hingegen eine negative Gröſe von einer andern abgezogen werden; So ſoll man eine negative Gröſe von der Gröſe wegnehmen, von welcher man abziehen ſoll, und alſo einen Mangel einer Gröſe aufheben, hebt man aber einen Mangel einer Gröſe auf, ſo ſezt man ihr eine poſitive Gröſe zu (§. 294. und 295.), und derohalben muß man auch in der abzuziehenden Gröſe die negative Gröſe in eine poſitive Gröſe, und — in + verwandeln, welches man ſich auf dieſe Art etwas deutlicher vorſtellen kan: Wenn man von 2 a abziehen ſoll b — c, und ziehet

b allein ab, ſo hat man um c, weil b um die ganze Gröſe c gröſer iſt als b -- c, zuviel abgezogen, und demnach muß man c wieder mit dem Zeichen + dazu ſezzen.

1. Exempel.

Von a abgezogen b gibt den Reſt a -- b, und von 3 abc abgezogen abc gibt den Reſt 3 abc -- abc oder 2 abc (§. 302. N. III.).

Ferner

Von b abgezogen — b gibt den Reſt b + b oder 2 b.

Endlich

Von bc abgezogen bc gibt den Reſt bc -- bc = 0 (§. 302. N. I.).

2. Exempel.

Von 2 a + 2 b -- 3 c + d abgezogen a + b -- c + d gibt 2 a + 2 b -- 3 c + d -- a -- b + c, — d, und wenn man dieſes reducirt, ſo iſt der Reſt a + b — 2 c (§. 302. N. I. und III.).

3. Exempel.

Von $2a^3 + 3a^2b^2 - b^3 + 2d^4$ abgezogen $a^2b^2 + b^3 + d^4$ gibt $2a^3 + 3a^2b^2 - b^3 + 2d^4 - a^2b^2 - b^3 - d^4$, und wenn man dieſe Gröſe reducirt, ſo iſt der Reſt $2a^3 + 2a^2b^2 - 2b^3 + d^4$.

4. Exempel.

Von $2a^3 + b^2 + x^3 + 2y^4$ abgezogen $2a - 3c^4 + 2z$ gibt $2a^3 + b^2 + x^3 + 2y^4 - 2a + 3c^4 - 2z$.

Andere

Andere Auflöſung.

Schreibet man die ähnlichen Gröſen unter einander, und zwar die abzuziehende Gröſe unter die, wovon man abziehen ſoll, und gedenket ſich bei der erſteren, da ſtünde — wo + ſtehet, und da ſtünde + wo — iſt, und addiret alsdann, wie wir in der erſten Auflöſung des vorhergehenden §. gewieſen haben: So wird ebenwol die eine Gröſe von der andern abgezogen, und man bekomt eben den Reſt.

1. Exempel.

$$\begin{array}{r} 2a + 2b - 3c + d \\ a + b - c + d \\ \hline \text{der Reſt } a + b - 2c \end{array}$$

2. Exempel.

$$\begin{array}{r} 2a^3 + 3a^2b^2 - b^3 + 2d^4 \\ a^2b^2 + b^3 + d^4 \\ \hline \text{der Reſt } 2a^3 + 2a^2b^2 - 2b^3 + d^4 \end{array}$$

3. Exempel.

Wenn von $2a^3 + x^4 - y$ abgezogen werden ſoll $3a - b + z$; So kommen die Gröſen alle neben einander, weil ein iedes ſich ſelbſt ähnlich iſt, und es werden nur die Zeichen der abzuziehenden Gröſen in die entgegen geſezten verwandelt, und demnach iſt der Reſt $2a^3 + x^4 - y - 3a + b - z$.

§. 305.

Gröſen mit einander zu multipliciren (§. 78.).

Auflöſung.

1) Man multiplicire, wie bei den Zahlen die Glieder des Multiplicators in die Glieder des Multiplicandi, und ſchreibe die Buchſtaben neben einander, vor ſie aber die in einander multiplicirten Coefficienten (§. 79. und 102.), vor iedes Product nun aus dem einen in das andere Glied ſezze man +, wenn beide Glieder + oder —, und alſo einerlei Zeichen haben, und alſo beide poſitiv, oder negativ ſind (§. 294.), hingegen aber — wenn das eine Glied + und das andere — hat, und alſo die Zeichen der Glieder verſchieden ſind.

2) Man addire die einzelnen Producte, wenn das Multiplicandum und der Multiplicator aus mehr, als wie einem Glied beſtehen (§. 303.): So iſt das verlangte geſchehen.

Beweis.

Wenn man poſitive Gröſen mit poſitiven, und + mit + multipliciret: So nimt man etwas wirkliches wirklich etlichemal (§. 294. und 295.), und daher haben auch die poſitiven Gröſen, die in einander multiplicirt worden, in dem Product +. Wenn man poſitive Gröſen mit negativen, und + mit —, und alſo a—b mit c multipliciret, ſo ſoll man das wirkliche c in a—b multipliciren, multiplicirt man nun c allein in a, ſo hat man die wirkliche Gröſe a, weil b von a abgezogen werden ſoll, um bc zu viel genom-

genommen, denn man hat, da b nicht abgezogen worden, auch c mit b multiplicirt, und daher muß man dieſe Gröſe wieder abziehen (§. 294. und 295.), eben darum aber haben auch die poſitive und negative Gröſen, die in einander multiplicirt werden, in dem Product —. Wenn man endlich negative Gröſen mit negativen, das iſt — mit —, und alſo a — b mit — c multipliciret: So ſoll man den Mangel c in a — b nehmen, nimt man ihn nun allein in a, ſo hat man den Mangel c, weil b von a abgezogen werden ſoll, um bc zu viel genommen, denn man hat, da b nicht abgezogen worden, auch c mit b multiplicirt, und demnach muß man ihn wieder addiren (§. 294. und 295.), eben daher aber haben auch die negativen Gröſen, die in einander multiplicirt werden, in dem Product +. Stelt man ſich nur ſchlechterdings vor, daß man bei den in einander multiplicirten poſitiven Gröſen beiahet, daß man beiahet habe, daß man bei den in einander multiplicirten negativen Gröſen leugnet, daß man geleugnet, und alſo im Grund beiahet habe, und daß man bei den in einander multiplicirten poſitiven und negativen, oder negativen und poſitiven Gröſen, beiahet, daß man leugne, oder leugne, daß man beiahet, und alſo im Grunde in beiden Fällen leugnet, oder einen Mangel etlichemal nimt: So kan man ſich auch von der Richtigkeit

dieſer Auflöſung, und daß einerlei Zeichen in dem Product +, verſchiedene aber — geben, leicht überzeugen.

1. Exempel.

a mit a multiplicirt gibt aa

Und

a mit b multiplicirt gibt a b

Oder

a mit b d multiplicirt gibt a b d

Ferner

a multiplicirt mit 3b gibt 3ab (§. 296.).

Und

3a multiplicirt mit 4b gibt 12ab

Endlich

a mit — b multiplicirt gibt — ab

Desgleichen

— a mit b multiplicirt gibt — ab

Und

— a mit — b multiplicirt gibt + ab

2. Exempel.

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ a+b-c \\ \hline -ac-bc+cc \\ ab+bb-bc \\ aa+ab-ac \\ \hline \end{array}$$

das Product $aa+2ab-2ac+bb-2bc+cc$

3. Exem-

3. Exempel.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b - 3d \\ 4a + b \\ \hline 3ab + 2bb - 3bd \\ 12aa + 8ab - 12ad \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

das Product $12aa + 11ab - 12ad + 2bb - 3bd$

4. Exempel.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y - 2a \\ 3a - 2b \\ \hline -4bx - 6by + 4ab \\ 6ax + 9ay - 6aa \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

das Product $6ax + 9ay - 4bx - 6by - 6aa + 4ab$

§. 306.

Gröſen in einander zu dividiren (§. 80.).

Aufloſung.

1) Wenn ſich der Diviſor in den Dividendum nicht dividiren läſt, und alſo keine Teile hat, die den Teilen des Dividendi ähnlich ſind (§. 293.): So ſchreibe man den Dividendum, und den Diviſor bruchsweiſe unter-, oder mit dem Zeichen der Diviſion neben einander (§. 81.).

2) Wenn ſich die Gröſen in einander dividiren laſſen, und alſo die ähnlichen Gröſen des Diviſors auch in dem Dividendo enthalten ſind (§. 293.): So dividire man, wie in Zahlen, doch wegen der Bequemlichkeit unter ſich, und nehme die ähnlichen Buchſtaben des Diviſors, von den ähnlichen Buch-

Und

$ab + ad - ay$ dividirt durch a gibt $b + d - y$.

Oder

Dividendus $aa + 2ab + bb$ | $a + b$

Diviſor $a + b$

das Product aus a in $a + b$ $aa + ab$

der Reſt $aa + 2ab + bb - aa - ab$

der folgende Teil nach der Reduction $ab + bb$

der Diviſor $a + b$

das Product aus b in $a + b$ $ab + bb$

der Reſt $ab + bb - ab - bb = 0$

3. Exempel.

$2a$ dividirt durch $2c$ gibt $a : c$, oder $\frac{a}{c}$.

Und

$6abc$ dividirt durch $2ab$ gibt $6abc : 2ab$, oder $\frac{6abc}{2ab} = 3c$.

Oder

Dividendus $6aa + 7ab - 3bb$ | $2a + 3b$

Diviſor $3a - b$

das Product aus $2a$ in $3a - b$ $6aa - 2ab$

der Reſt $6aa + 7ab - 3bb - 6aa + 2ab$

der folgende Teil nach der Reduction $9ab - 3bb$

der Diviſor $3a - b$

das Product aus $3b$ in $3a - b$ $9ab - 3bb$

der Reſt $9ab - 3bb - 9ab + 3bb = 0$

4. Exem-

4. Exempel.

Dividendus $a-bb+x-y \mid a-b+\frac{x-y}{a+b}$

Diviſor $a+b$

das Product aus a in $a+b$ $aa+ab$

der Reſt $aa-bb+x-y-aa-ab$

der folgende Teil nach der Reduction $-bb+x-y-ab$

der Diviſor $a+b$

Product aus $-b$ in $a+b$ $-ab-bb$

der Reſt $-bb+x-y-ab+ab+bb$

der folgende Teil nach der Reduction $x-y$

der Diviſor $a+b$

Drittens
von der
Erfindung der Gröſen in den Brüchen.

§. 307.

Einen Bruch, der im Zähler und Nenner ähnliche Gröſen hat, auf wenigere Glieder zu bringen (§. 110. 111. und 127.).

Aufloſung.

Man dividire den Zähler und den Nenner durch die ähnliche Gröſe, oder nehme die ähnliche Gröſen im Zähler und Nenner weg: So iſt der erſte

erſte Quotient der Zähler, und der andere der Nenner des neuen Bruchs (§. 128. und 306.).

Exempel.

$$\frac{ab:b}{bd:b} = \frac{a}{d}$$

Oder

$$\frac{abx:a}{adx:a} = \frac{bx:x}{dx:x} = \frac{b}{d}.$$

Und

$$\tfrac{4}{8}y:4 = \tfrac{1}{2}y, \text{ oder } \tfrac{9}{27}ab:9 = \tfrac{1}{3}ab.$$

§. 308.

Verſchiedene Brüche unter einerlei Benennung zu bringen (§. 129.).

Auflöſung.

Man verfahre gänzlich, wie in Zahlen (§. 131.): So bekomt man Brüche von einerlei Benennung.

1. Exempel.

Soll $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ auf einerlei Benennung gebracht werden: So iſt $\frac{a.d}{b.d} = \frac{ad}{bd}$, und $\frac{c.b}{d.b} = \frac{bc}{bd}$

2. Exempel.

Soll $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ und $\frac{f}{g}$ auf einerlei Benennung gebracht werden: So iſt $\frac{a.d.g}{b.d.g} = \frac{adg}{bdg}$, $\frac{c.b.g}{d.d.g} = \frac{bcg}{bdg}$, und $\frac{f.b.d}{g.b.d} = \frac{bdf}{bdg}$.

3. Exem-

3. Exempel.

Soll man a und $\frac{b}{c}$ unter einerlei Benennung bringen: So iſt $a = \frac{a}{1}$, und demnach $\frac{a \cdot c}{1 \cdot c} = \frac{ac}{c}$, und $\frac{b \cdot 1}{c \cdot 1} = \frac{b}{c}$, folglich a und $\frac{b}{c} = \frac{ac}{c}$, und $\frac{b}{c}$ (§. 123 und 144.).

§. 309.

Brüche zu addiren.

Aufloͤſung.

Man verfahre eben ſo, wie in Zahlen (§. 134. und 135.).

1. Exempel.

Soll $\frac{ab}{d}$ zu $\frac{c}{g}$ addirt werden: So iſt $\frac{ab \cdot g}{d \cdot g} = \frac{abg}{dg}$, und $\frac{c \cdot d}{g \cdot d} = \frac{cd}{dg}$ (§. 308.), folglich die Summe $\frac{abg + cd.}{dg}$

2. Exempel.

Wenn $a - b + \frac{x}{y}$ und $c + \frac{b}{d}$ addiret werden ſollen: So iſt $\frac{x \cdot d}{y \cdot d} = \frac{dx}{dy}$, und $\frac{b \cdot y}{d \cdot y} = \frac{by}{dy}$, folglich ihre Summe $a - b + c + \frac{dx + by.}{dy}$

§. 310.

§. 310.

Brüche von einander zu ſubtrahiren.

Aufloͤſung.

Auch hier verfahre man, wie in Zahlen (§. 136. und folg.).

1 Exempel.

Wenn man von $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{d}{g}$ ſubtrahiren ſoll: So iſt $\frac{a.g}{b.g}=\frac{ag}{bg}$, und $\frac{d.b}{g.b}=\frac{bd}{bg}$, folglich der Reſt $\frac{ag-bd}{bg}$

2 Exempel.

Wenn man von $a+\frac{bc}{d}$ die Groͤſe $x-\frac{by}{g}$ abziehen ſoll: So iſt a ſo viel als $\frac{a}{1}$, und $\frac{a.d}{1.d}=\frac{ad}{d}$ (§. 308), folglich $a+\frac{bc}{d}=\frac{ad+bc}{d}$, x aber ſo viel als $\frac{x}{1}$, und $\frac{x.g}{1.g}=\frac{xg}{g}$, folglich $x-\frac{by}{g}=\frac{xg-by}{g}$, und es ſind demnach die Ganze auf einen Bruch gebracht. Wenn man nun $\frac{ad+bc}{d}$, und $\frac{xg-hy}{g}$ auf einerlei Benennung bringt: So iſt $\frac{ad+bc.g}{d.g}=\frac{adg+bcg}{dg}$, und $\frac{xg-by.d}{g.d}=\frac{xdg-bdy}{dg}$, und alſo der Reſt $\frac{adg+bcg-xdg+bdy.}{dg}$

§. 311.

Brüche in einander zu multipliciren.

Aufloſung.

Man multiplicire, wie in Zahlen (§. 142. und folg.).

1 Exempel.

Soll $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden: So iſt das Product $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

2 Exempel.

Wenn man $\frac{a}{b}$ durch c multipliciren ſoll: So iſt c ſo viel als $\frac{c}{1}$, und alſo $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$.

3 Exempel.

Soll man $a + \frac{c}{d}$ mit b multipliciren: So iſt a ſo viel als $\frac{a}{1}$, und $\frac{a}{1} \cdot \frac{d}{d} = \frac{ad}{d}$, folglich $a + \frac{c}{d} = \frac{ad + c}{d}$ (§. 308). Da nun b ſo viel als $\frac{b}{1}$ iſt (§. 308.): So iſt $\frac{ad + c}{d} \cdot \frac{b}{1} = \frac{abd + bc}{d}$.

4. Exem-

4. Exempel.

Wenn man $a + \frac{b}{c}$ mit $d - \frac{f}{g}$ multipliciren ſoll:

So iſt $a = \frac{a}{1}$ und $\frac{a.c}{c.1} = \frac{ac}{c}$, und alſo $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$,

und $d = \frac{d}{1}$, und $\frac{d}{1} \cdot \frac{g}{g} = \frac{dg}{g}$, folglich $d - \frac{f}{g} = \frac{dg-f}{g}$.

Multiplicirt man nun von den Brüchen $\frac{ac+b}{c}$ und $\frac{dg-f}{g}$, die Zähler und auch die Nenner: So iſt das Product $\frac{acdg - acf + bdg - bf}{cg}$.

§. 312.

Brüche in einander zu dividiren.

Aufloͤſung.

Man dividire wie in Zahlen (§. 148. und folg.)

1. Exempel.

Soll man $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren: So iſt der Quotient $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

2. Exempel.

$$\frac{ab-cd}{f} : \frac{bc}{g} = \frac{ab-cd}{f} \cdot \frac{g}{bc} = \frac{abg-cdg}{bcf}.$$

3. Exempel.

$$a:\frac{b}{d}=\frac{a}{1}:\frac{b}{d}=\frac{a}{1}\cdot\frac{d}{b}=\frac{ad}{b}.$$

4. Exempel.

$$a+\frac{b}{c}:d-\frac{f}{g}=\frac{ac+b}{c}:\frac{dg-f}{g}\ (\S.310.)=\frac{ac+b}{c}\cdot\frac{g}{dg-f}=\frac{acg+bg}{cdg-cf}.$$

Viertens
von
den Potenzen.

§. 313.

Die Potenzen, welche entſtehen, wenn man eine Gröſe ein, oder etlichemal mit ſich ſelbſt multiplicirt (§. 167.), drukt man in der Algebra durch Buchſtaben aus (§. 297.). Wenn man alſo a mit a multipliciret: So iſt aa das Quadrat, oder die zweite Potenz (§. 305.), a.a.a, oder aa.a=aaa iſt der Cubus, oder die dritte Potenz, a.a.a.a, oder aaa.a =aaaa iſt die vierte Potenz, oder das Biquadrat, und a.a.a.a.a, oder aaaa.a=aaaaa iſt die fünfte Potenz u. ſ. w., a hingegen die Wurzel von dieſen Potenzen. Die Wurzeln können auch aus zwei, oder mehreren Buchſtaben beſtehen, und demnach iſt von der Wurzel ab das Quadrat aabb, und der Cubus aaabbb (§. 292.). Aus dem 169. §. wird

man zugleich leicht begreifen, daß a eine uninomiſche, $a + b$ eine binomiſche, und $a + b - c$, oder $a + b + c - d$ eine polynomiſche Wurzel ſei.

§. 314.

Um die vielen Buchſtaben abzukürzen, und anzuzeigen, daß eine Gröſe zu einer gewiſſen Potenz erhoben werden ſoll: So ſchreibt man oben zur rechten Hand an dieſe Gröſe den Exponenten (§. 171.), der den Grad der Potenz ausdrukt, und zwar eine Ziffer, wenn der Grad der Potenz beſtimt, hingegen aber einen Buchſtaben m, n, r, s, und t, wenn er unbeſtimt iſt. Es bedeutet demnach a die Wurzel, oder die erſte Potenz, $a^2 = aa$ die zweite, $a^3 = aaa$ die dritte, $a^4 = aaaa$ die vierte, $a^5 = aaaaa$ die fünfte, $a^6 = aaaaaa$ die ſechſte Dignität, u. ſ. w., a^m, b^n, x^r, y^s, hingegen ſind unbeſtimte Potenzen, a, b, x und y aber ihre Wurzeln, oder die erſten Dignitäten, die alle zum Exponenten 1 haben.

§. 315.

Da man die Gröſen nur neben einander ſezt, wenn man ſie in einander multipliciren ſoll (§. 305.): So bekomt man, wenn man aaa mit aa multipliciren ſoll, aaaaa zum Product, und es iſt alſo $aaa . aa = aaaaa$. Es iſt aber $aaa = a^3$, und $aa = a^2$ und $aaaaa = a^5$, weil die Exponenten eine gleiche

Anzahl

Anzahl Factoren ausdrukken (§. 171.), und daher iſt auch $a^3 . a^2 = a^5$ (§. 25.). Wenn man daher Potenzen, die von einerlei Wurzeln entſtanden ſind, in einander multipliciren ſoll: So hat man nur nötig, daß man ihre Exponenten addiret, und die Summe oben zur rechten Hand über die Wurzel ſezzet. Dieſemnach iſt $a^3 . a^2 = a^5$. Es iſt ferner $a^5 . a = a^6$, $b^n . b^n = b^{2n}$, $y^m . y^r = y^{m+r}$, $x^n . x = x^{n+1}$, $x^n . x^2 = x^{n+2}$, und $x^{n-1} . x = x^{n-1+1} = x^n$.

§. 316.

Da man die Gröſen nur von einander wegnimt, wenn man die eine in die andere dividiren ſoll (§. 306): So iſt auch, wenn man aaa durch aa dividiren ſoll, der Quotient a. Nun iſt aber $aaa = a^3$, und $aa = a^2$ (§. 171. und 314.), und daher iſt auch $a^3 : a^2 = a$ (§. 25.). Soll man alſo eine Potenz durch eine andere, die eben die Wurzel hat, dividiren: So ziehet man nur den Exponenten des Diviſors von dem Exponenten des Dividendi ab, ſo iſt der Unterſcheid der Exponent des Quotienten. Es iſt alſo $a^3 : a^2 = a$. Eben ſo iſt auch $a^5 : a^2 = a^3$, $x^4 : x = x^3$, $x^m : x^n = x^{m-n}$, $y^n : y = y^{n-1}$, $x^{r-1} : x = x^{r-1-1} = x^{r-2}$, und $y^{m+n} : y^n = y^m$.

§. 317.

Wenn man a^3 durch a^3 dividiren ſoll: So iſt der Quotient 1, weil man eine Gröſe durch ſich ſelbſt dividiret.

diret. Weil nun $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$ (§. 316.): So iſt a^0 = Eins. Iſt dieſemnach der Exponent einer Dignität eine negative Gröſe (§. 294.): So iſt er von 0, und weil der Exponent 0 ſo viel als 1 iſt, von 1 abgezogen. Da nun das Subtrahiren der Exponenten die Diviſion anzeigt (§. 316.): So iſt auch der negative Exponent in 1 dividirt. Demnach iſt $a^{-2} = a^0 : a^2$, a^0 aber iſt = 1, und daher iſt $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. Eben ſo iſt $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, und $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$. Geſezt es ſeie $a = 5$: So iſt $a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{25}$.

§. 318.

Es iſt eine iede Dignität eine Gröſe, und eine iede Gröſe kan mit ſich ſelbſt, und das Product wieder mit dieſer Gröſe multiplicirt werden (§. 313.), und daher kan man auch eine iede Dignität, als eine Wurzel annehmen. Multiplicirt man aber eine Potenz mit ſich ſelbſt; ſo addirt man ihren Exponenten zu ſich ſelbſt, und nimt ihn zweimal (§. 315.): Und multiplicirt man mit dieſer Potenz die Wurzel, nemlich die Potenz, die man dazu angenommen hat; So wird der Exponent noch einmal zu ſich ſelbſt addirt, und alſo dreimal genommen u. ſ. w. Wenn man alſo eine Potenz zu einer andern erheben ſoll: So muß man ihre Exponenten mit dem Exponenten der

der Potenz multipliciren, zu welcher ſie erhoben werden ſoll. Soll man alſo a^2 zur Potenz 2, oder zur zweiten Dignität erheben: So iſt $a^{2 \cdot 2} = a^4$, x^m zur Potenz n erhoben, $= x^{m \cdot n} = x^{mn}$, y^n zur Potenz 3 erhoben $= y^{n \cdot 3} = y^{3n}$, und x zur Potenz 4 erhoben $= x^{1 \cdot 4} = x^4$.

§. 319.

Weil die Diviſion wieder aufhebt, was die Multiplication zuſammenſezt, und der eine Factor in das Product dividiret, den anderen Factor gibt (§. 78. und 107.): So wird auch die Wurzel ausgezogen (§. 172.), wenn man den Exponenten der Dignität, woraus man die Wurzel ausziehen ſoll, durch den Exponenten dieſer Wurzel dividiret. Wenn man alſo den Exponenten von a^4 durch den Exponenten der Wurzel 2 dividirt, und alſo die Wurzel der zweiten Dignität geſucht werden ſoll: So iſt $a^{4:2} = a^2$, die Wurzel n aus x^{mn} iſt $x^{mn:n} = x^m$, die Wurzel 3 aus y^{3n} iſt $y^{3n:3} = y^n$, die Wurzel 4 aus x^4 iſt $x^{4:4} = x$. Ferner die Wurzel 2 aus a^6 iſt $a^{6:2} = a^3$, die Wurzel n aus x^m iſt $x^{m:n}$, die Wurzel 4 aus y^{12} iſt $y^{12:4} = y^3$, die Wurzel 2 aus y^3 iſt $y^{3:2}$, und die Wurzel 5 aus $y = y^1$ iſt $y^{1:5}$: Eben ſo gibt die Wurzel 2 aus $a^2 b^8$ die Wurzel $a^{2:2} b^{8:2} = ab^4$, und die Wurzel 4 aus $x^4 b$ gibt die Wurzel $x^{4:4} b^{1:4} = x b^{\frac{1}{4}}$.

§. 320.

Wenn man anzeigen will, daß aus einer Gröſe die Wurzel gezogen werden ſoll (§. 172.): So bedient man ſich eben des Zeichens, das wir in dem 173. §. angegeben haben, man ſchreibt aber oben in die Oefnung dieſes Zeichens eine Zahl, wenn die auszuziehende Wurzel beſtimt, hingegen aber einen Buchſtaben m, n. u. ſ. w., wenn die Wurzel, die ausgezogen werden ſoll, unbeſtimt iſt. Soll man zum Exempel die Quadratwurzel, die Cubikwurzel, oder die Wurzel der vierten, fünften, und ſechſten Dignität aus a, oder die Wurzel der vierten Dignität aus a^3 ziehen; So ſchreibt man dieſes alſo: $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$, und $\sqrt[4]{a^3}$: Und ſoll man die unbeſtimte Wurzel m aus x^n, oder die unbeſtimte Wurzel n aus a^3 ziehen; So ſchreibt man dieſes dergeſtalt $\sqrt[m]{x^n}$, und $\sqrt[n]{a^3}$. Wenn die Gröſe, woraus man die Wurzel ziehen ſoll, eine gebundene Gröſe iſt (§. 294.): So machet man einen Strichen über die Glieder der Gröſe, oder man ſchlieſt ſie in zwei Klammern ein, und ſchreibt davor das Wurzelzeichen mit ſeinem Exponenten. Wenn alſo die Cubikwurzel aus $aa + bb - cc$, oder die Wurzel m aus $ax + 2bc$ ausgezogen werden ſoll; So ſchreibt man dieſes alſo.

$\sqrt[3]{aa + bb - cc}$, oder $\sqrt[3]{}(aa + bb - cc)$, und $\sqrt[m]{ax + 2bc}$ oder $\sqrt[m]{}(ax + 2bc)$.

§. 321.

Die Wurzel n von x^m, die Wurzel 4 oder der vierten Dignität von y^{12}, die Wurzel 2 oder die Quadratwurzel von y^3, und die Wurzel 5 oder der fünften Dignität von y kan man alſo ſchreiben, $x^{m:n}$ (§. 319) oder $\sqrt[n]{x^m}$ (§. 320.), $y^{12:4}$ oder $\sqrt[4]{y^{12}}$, $y^{3:2}$ oder $\sqrt[2]{y^3}$, und $y^{1:5}$ oder $\sqrt[5]{y^1}$, und es iſt einerlei, welcher Art man ſich bedienen will.

§. 322.

Wie man die Wurzel aus einer ungebundenen Gröſe ausziehen ſoll, das iſt aus dem 319. §. klar. Wir wollen alſo noch zeigen, wie man die Quadrat- und die Cubikwurzel aus einer gebundenen Gröſe ziehen ſoll.

§. 323.

Wenn man eine binomiſche Wurzel $a + b$ mit ſich ſelbſt multiplicirt (§. 305, und 315.): So iſt ihr Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$, und hierinnen liegt die Natur und Eigenſchaft des Quadrats von einer binomiſchen Wurzel, es enthält nemlich von der linken nach der rechten Hand das Quadrat des gröſeren Teils, das zweifache Product aus dem gröſeren in

den kleineren Teil, und das Quadrat des kleineren Teils (§. 179.). Dieſe Wahrheit läſt ſich aber auch von einer ieden polynomiſchen Wurzel behaupten (§. 181.): Denn wenn die Wurzel $a+b+c$ iſt, und man nimt $a+b$ vor den erſten Teil a, c aber vor den zweiten Teil b an; So iſt das Quadrat des erſten Teils $a^2=(a+b)^2$, das zweifache Product aus dem erſten in den andern Teil $2ab=2(ac+bc)$, und das Quadrat des zweiten Teils $b^2=c^2$, folglich das Quadrat von $a+b+c=(a+b)^2+2(ac+bc)+c^2$: Oder, da $(a+b)^2$ in das Quadrat erhoben $=a^2+2ab+b^2$, $2(ac+bc)=2ac+2bc$, und $c^2=c^2$, das Quadrat von der Wurzel $a+b+c=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$, welches auch heraus komt, wenn man $a+b+c$ mit $a+b+c$ multipliciret, und in das Quadrat erhebt.

§. 324.

Soll man dieſemnach aus einer gebundenen Gröſe die Quadratwurzel ausziehen, ſo verfahre man eben ſo, wie §. 187. gewieſen worden, und nehme dabei in Acht, was wir von der Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion der Gröſen gelehrt haben (§. 303. 304. 305. und 306.), wenn ſich hingegen die Wurzel nicht ausziehen läſt, ſo ſezze man davor das Wurzelzeichen der Quadratwurzel (§. 320.).

Exem:

Exempel.

	$a^2 + 2ab + b^2 \mid a + b$
das Quadrat von a	a^2
der Reſt	$a^2 + 2ab + b^2 - a^2$
der folgende Teil nach der Reduction	$2ab + b^2$
der Diviſor, das Duplum von $a = 2.\ a = 2a$	$2a$
das Product aus 2a in b	$2ab$
das Quadrat von $b = b^2$	$+ b^2$
die Summe dieſer Producte	$2ab + b^2$
der Reſt	$2ab + b^2 - 2ab - b^2 = 0$

§. 325.

Wenn man eine binomiſche Wurzel $a + b$ in den Cubum erhebt (§. 305. und 315.): So iſt ihr Cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und hierinnen liegt die Natur und Eigenſchaft des Cubi einer binomiſchen Wurzel, er enthält nemlich von der linken nach der rechten Hand den Cubum des gröſeren Teils, das dreifache Product aus dem Quadrat des gröſeren Teils in den kleineren Teil, das dreifache Product aus dem gröſeren Teil in das Quadrat des kleineren Teils, und den Cubum des kleineren Teils (§. 183.). Es läſt ſich aber auch dieſe Wahrheit von allen polynomiſchen Wurzeln behaupten (§. 185.): Denn, wenn die Wurzel $a + b + c$ iſt, und man nimt $a + b$

vor den erſten Teil a, und c vor den andern Teil b an; So iſt der Cubus des erſten Teils $a^3 = (a+b)^3$, das dreifache Product aus dem Quadrat des erſten Teils in den zweiten Teil $3a^2b = 3(a+b)^2.c$, das dreifache Product aus dem erſten Teil in das Quadrat des andern Teils $3ab^2 = 3(a+b).c^2$, und der Cubus des andern Teils $b^3 = c^3$, folglich der Cubus von $a+b+c = (a+b)^3 + 3(a+b)^2.c + 3(a+b).c^2 + c^3$. Oder, da $(a+b)^3$ in den Cubum erhoben $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $3(a+b)^2.c$ wenn man $a+b$ in das Quadrat erhebt $= a^2 + 3ab + b^2.c.^3 = 3a^2c + 6abc + 3b^2c$, und $3(a+b).c^2 = a+b.c^2.3 = 3ac^2 + 3bc^2$, endlich aber $c^3 = c^3$, der Cubus von der Wurzel $a+b+c = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$, und eben dieſes Quadrat komt auch heraus, wenn man $a+b+c$ in den Cubum erhebt. Wir merken hierbei noch an, daß man durch das Multipliciren gar leicht die Eigenſchaften einer ieden höheren Dignität von einer zweiteiligen Wurzel erfinden kan.

§. 326.

Soll man dieſemnach aus einer gebundenen Gröſe die Kubikwurzel ausziehen: So verfahre man wie in Zahlen, und nehme die Regeln der vier Rechnungsarten wol in acht (§. 193. 303. 304. 305. und 306.), wenn ſich aber die Wurzel nicht aus-

ziehen

ziehen läſt, ſo ſezze man davor das Wurzelzeichen der Kubikwurzel (§. 320.):

Exempel.

	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a + b$
der Cubus von a	a^3
der Reſt	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3$
der folgende Teil nach der Reduction	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$
der Diviſor, oder das dreifache Quadrat von dem erſten Teil $a = a.a.3 = a^2.3 = 3a^2$	$3a^2$
das Product aus $3a^2$ in den andern Teil $b = 3a^2b$	$3a^2b$
das Product aus dem erſten Teil dreimal genommen, aus $3.a = 3a$ in das Quadrat des andern Teils in $b.b = b^2 = 3ab^2$	$+ 3ab^2$
der Cubus des andern Teils $b.b.b = b^3$	$+ b^3$
Sum̃e dieſer Producte	$3a^2b + 3ab^2 + b^3$
der Reſt	$3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = 0$

§. 327.

§. 327.

Es iſt von ſelbſt klar, daß die Quadratwurzel aus dem Bruche $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$, ferner aus $\frac{bbcc}{ddxx} = \frac{bc}{dx}$, und aus $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{yyxx} = \frac{a-b}{yx}$, eben ſo iſt die Kubikwurzel aus dem Bruch $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b}$, und aus $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{x^3} = \frac{a+b}{x}$ (§. 191.). Wenn ferner die $\sqrt[m]{}$ aus $\frac{a^n\, c^r}{b\; e^s}$ gezogen werden ſoll: So iſt die Wurzel $\frac{a^{n:m}\, c^{r:m}}{b^{l:m}\, e^{s:m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}\, c^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{l}{m}}\, e^{\frac{s}{m}}}$, oder $\sqrt[m]{\frac{a^n\, c^r}{b\; e^s}}$ (§. 319. 320. und 321.).

§. 328.

Eine Gröſe, woraus eine verlangte Wurzel nicht genau ausgezogen werden kan, heiſt eine Irrationalgröſe (§. 174. und 175.). Man ſchreibt davor das Wurzelzeichen, wenn die Wurzel ausgezogen werden ſoll, und dieſe Gröſen nent man **Wurzelgröſen**, auch Irrationalgröſen.

§. 329.

Wenn man aus einer Gröſe eine verlangte Wurzel ziehen ſoll: So geſchiehet dieſes, wenn man den

Expo-

Exponenten der verlangten Wurzel in den Exponenten der Dignität dividirt (§. 319.). Wenn daher die Dignität eine Irrationalgröſe iſt, woraus dieſe Wurzel nicht gezogen werden kan: So gibt der Exponent der Dignität einen Bruch, wovon der Exponent dieſer Dignität der Zähler, der Exponent der verlangten Wurzel aber der Nenner iſt. Dieſemnach kan man zwei Irrationalgröſen, weil ihr Exponent allemal ein Bruch iſt, unter einerlei Benennung, oder die Exponenten der Wurzeln auf einerlei Gröſe bringen, wenn man die Brüche, die ihre Exponenten ausmachen, unter einerlei Benennung bringt (§. 131.). Es ſeien zum Beiſpiel die Irrationalgröſen $\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[3]{a^4}$ unter einerlei Benennung zu bringen: So iſt $\sqrt{a^3} = a^{3:2}$ und $\sqrt[3]{a^4} = a^{4:3}$ (§. 319.). Bringt man nun von $a^{3:2}$ und $a^{4:3}$ die Exponenten $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ unter einerlei Benennung, und multiplicirt alſo den Zähler und den Nenner eines ieden Exponenten der einen Dignität durch den Nenner des Exponenten der andern Dignität (§. 131.): So iſt $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ ſo viel als $\frac{9}{6}$ und $\frac{8}{6}$ und alſo $a^{3:2} = a^{9:6}$, und $a^{4:3} = a^{8:6}$, oder $\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[6]{a^9}$ und $\sqrt[6]{a^8}$. Eben ſo iſt $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ und $\sqrt[3]{y} = y^{1:3}$: Wenn man nun von $x^{m:n}$ und $y^{1:3}$ die Exponenten $\frac{m}{n}$ und $\frac{1}{3}$

unter

unter einerlei Benennung bringt: So iſt $\frac{m}{n}$ und $\frac{1}{3}$ ſo viel als $\frac{3m}{3n}$ und $\frac{n}{3n}$, und demnach $x^{m:n} = x^{3m:3n}$ und $y^{1:3} = y^{n:3n}$ oder $\sqrt[n]{x^m}$ und $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3n]{x^{3m}}$ und $\sqrt[3n]{y^n}$.

§. 330.

Wenn man aus einem Teil einer Wurzelgröſe eine vollkommene Wurzel ausziehen, und daher die Wurzelgröſe einfacher ausdrükken will: So zerfälle man die Wurzelgröſe, wenn ſie aus Zahlen beſtehet, in ihre Factores, aus dem, woraus ſich die Wurzel ausziehen läſt, die der Exponent der Wurzel angibt, ziehe man die Wurzel, und ſchreibe ſie vor das Wurzelzeichen, wie ein Coefficient, den anderen Factor hingegen laſſe man unter dem Wurzelzeichen unverändert ſtehen. Es iſt alſo $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$, und $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2} = 2\sqrt[3]{2}$ Iſt die Wurzelgröſe nicht in Zahlen, ſondern in Buchſtaben gegeben: So ziehe man aus den Teilen der gegebenen Dignität die geſuchte Wurzel (§. 310.) ſo weit, wie es möglich iſt, und ſchreibe dieſe vor das Wurzelzeichen, darhinter aber die Teile, aus den ſich die geſuchte Wurzel nicht ausziehen läſt. Es iſt alſo $\sqrt{ab^2} = a^{1:2}\, b^{2:2}$. Weil nun von $b^{2:2}$ die Wurzel b, und $a^{1:2}$ woraus ſich die Wurzel nicht ziehen

ziehen läſt, $= \sqrt{a}$ iſt (§. 319. 320. und 321.): So iſt $a^{1:2}\, b^{2:2} = b\sqrt{a}$. Eben ſo iſt $\sqrt[m]{x^m\, y^n} = x^{m:m}\, y^{n:m}$. Da nun von $x^{m:m}$ die Wurzel x, und $y^{n:m} = \sqrt[m]{y^n}$ iſt (§. 319. 320. und 321.): So iſt auch $x^{m:m}\, y^{n:m} = x\sqrt[m]{y^n}$.

Erhebet man dieſemnach die Gröſe vor dem Wurzelzeichen in die Dignität, welche der Exponent der Wurzel anzeigt, und multiplicirt dieſe Dignität mit der Gröſe unter dem Wurzelzeichen: So wird die Gröſe vor dem Wurzelzeichen wieder aufgehoben, und unter das Wurzelzeichen gebracht. Es iſt alſo $3\sqrt{2} = \sqrt{9.2} = \sqrt{18}$, $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8.2} = \sqrt[3]{16}$, $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2.a} = \sqrt{ab^2}$, und $x\sqrt[m]{y^n} = \sqrt[m]{x^m\, y^n} = \sqrt[m]{x^m\, y^n}$.

§. 331.

Wenn man Irrational- oder Wurzelgröſen addiren, oder ſubtrahiren ſoll (§. 328.); So addire, oder ſubtrahire man ihre Coefficienten (§. 303. und 304.), wenn die Wurzelexponenten, und die Gröſen unter dem Wurzelzeichen gleich ſind: Iſt aber dieſes nicht; So verbinde man ſie mit dem Zeichen der Addition, oder der Subtraction (§. 75. und §. 77.).

1. Exempel.

$2\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Oder

$2\sqrt{2}$ von $4\sqrt{2}$ abgezogen $= 2\sqrt{2}$.

2. Exem-

2. Exempel.

$3\sqrt{2}$ und $6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt[3]{2}$.

Oder

$2\sqrt{2}$ von $5\sqrt[3]{2}$ abgezogen $= 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{2}$, und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{8}$ abgezogen $= \sqrt{8} - \sqrt{3}$.

3. Exempel.

$$\begin{array}{ll} & 2\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} - 4\sqrt{3} \\ & \sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 3\sqrt{3} \\ \hline \text{die Summe} & 3\sqrt{2} + 8\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4} - 7\sqrt{3} \end{array}$$

Und

$$\begin{array}{ll} & 3a\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} + a\sqrt[n]{y} - 5\sqrt[m]{x} \\ & a\sqrt{2} + x\sqrt[n]{y} + 3\sqrt[m]{x} \\ \hline \text{die Summe} & 4a\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} + (a+x)\sqrt[n]{y} - 2\sqrt[m]{x} \end{array}$$

Oder

$$\begin{array}{ll} & 3\sqrt{2} + 8\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4} - 7\sqrt{3} \\ & \sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 3\sqrt{3} \\ \hline \text{der Reſt} & 2\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} - 4\sqrt{3}. \end{array}$$

Und

$$\begin{array}{ll} & 4a\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} + (a+x)\sqrt[n]{y} - 2\sqrt[m]{x} \\ & a\sqrt{2} + x\sqrt[n]{y} + 3\sqrt[m]{x} \\ \hline \text{der Reſt} & 3a\sqrt{2} + 2\sqrt[3]{3} + a\sqrt[n]{y} - 5\sqrt[m]{x} \end{array}$$

§. 332.

Soll man Irrationalgröſen in einander multipliciren, oder dividiren; So bringe man die Irrationalgröſen unter einerlei Benennung, wenn ſie ver:

verſchieden ſind (§. 329.), und multiplicire, oder dividire alsdann, wie gewöhnlich (§. 305. und 309.): Und wenn die Diviſion nicht angehet; So ſchreibe man ſie bruchsweiſe unter einander.

1. Exempel.

$\sqrt{4} . \sqrt{2} = \sqrt{8}$, $2\sqrt[3]{4} . 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{8}$, $a\sqrt[m]{x} . b\sqrt[m]{y} = ab\sqrt[m]{xy}$, und $\sqrt[6]{2^3} . \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{(2^3 . 4^2)}$ (§. 81.) und $2a\sqrt{bc} . 3a\sqrt{bc} = 6a^2\sqrt{b^2c^2}$.

Ferner

$\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{4} = 2^{1:2}$ und $4^{1:3} = 2^{3:6}$ und $4^{2:6}$ (§. 329.) $= \sqrt[6]{2^3}$ und $\sqrt[6]{4^2}$ (§. 321.), und daher $\sqrt[6]{2^3} . \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{(2^3 . 4^2)}$.

2. Exempel.

$\sqrt{16} : \sqrt{2} = \sqrt{8}$ und $6\sqrt[3]{2ab} : 2\sqrt[3]{2a} = 3\sqrt[3]{b}$.

Nunmehr kommen wir zur eigentlichen Algebra.

Der zweette Tittel
von der
Vergleichung der Gröſen.

§. 333.

Wenn man zwei gleiche Gröſen durch verſchiedene Zeichen ausdrükt, und mit dem Zeichen der Gleichheit verbindet: So nent man dieſen Ausdruk eine Gleichung, oder eine Aequation. Es ſind alſo

$8+2=10$, $8+4-2=10$, $8+2=12-2$, $a+b=m+n$, und $a+b-c=x$ Gleichungen, und die Gröſen, welche vor dem Zeichen der Gleichheit ſtehen, heiſen die vorderen, die aber, welche dahinter ſind, die hinteren Glieder.

§. 334.

Wenn in einer Gleichung die unbekante Gröſe von der erſten Potenz iſt: So heiſt ſie eine einfache Gleichung, oder eine Gleichung von dem erſten Grad. Es iſt alſo $x=2b+c$ eine ſolche Gleichung.

§. 335.

Eine Gleichung, worinnen nur eine unbekante Gröſe geſucht wird, heiſt überhaupt eine beſtimte Gleichung. Iſt nun in einer Gleichung die unbekante Gröſe eine höhere, als die erſte Potenz: So heiſt ſie eine höhere beſtimte Gleichung. Dieſe erhalten den Namen von dem Grad der Potenz, und es heiſt eine Gleichung, worinnen die unbeſtimte Gröſe von der zweiten Potenz eine quadratiſche Gleichung, oder eine Gleichung vom zweiten Grad, eine Gleichung, worinnen die unbekante Gröſe von der dritten Dignität, eine kubiſche Gleichung, oder eine Gleichung vom dritten Grad, und eine Gleichung, worinnen die unbekante Gröſe von der vierten Dignität, eine Glei-

chung von dem vierten Grad, u. ſ. w. Eine Gleichung von der erſten Art iſt $x^2 = 2ab - b$, von der andern Art $x^3 = a + b^2 - 3c$, und von der dritten Art $x^4 = 2a + 3bc - 4d$.

§. 336.

Wenn in einer beſtimten Gleichung allein die höchſte Potenz der unbekanten Gröſe enthalten, dieſe Potenz aber dem Grad der Gleichung gemäs iſt; So ſagt man, daß ſie rein, oder eine Aequatio pura ſei: Sind hingegen noch niedrigere und mehrere darinnen begriffen; So bedienet man ſich des Ausdruks, daß ſie unrein, oder eine Aequatio adfecta ſei. Es ſind alſo $x^2 = a + b - 2cd$, und $x^3 = a + 2ab - b^2$ reine, $x^3 - ax = c^3 + bc - 2d$, und $x^3 + ax^2 = 2ab + 3c^2 - 2d$ unreine Gleichungen. Hieraus iſt leicht zu begreifen, was eine reine und unreine quadratiſche Gleichung ſei. Iſt nemlich allein das Quadrat der unbekanten Gröſe darinnen enthalten; So iſt ſie rein: Wenn aber auſer dieſer auch noch die erſte Potenz darinnen enthalten iſt; So iſt ſie unrein. Es iſt demnach $x^2 = a + b - c$ eine reine, $x^2 + ax = cd$, und $x^2 - ax = bd$ hingegen ſind unreine quadratiſche Gleichungen.

§. 337.

Wenn man in einer Gleichung eine unbekante Gröſe mit dem Zeichen + allein in ein Glied der

Gleichung, oder auf eine Seite, die bekanten Gröſen aber auf die andere Seite bringt: So ſagt man, daß man dieſe Gröſe in der Gleichung reducire, und den Werth derſelben beſtimme. In der Gleichung $x = 2a + b$ iſt alſo x reducirt. Wir wollen uns hiermit vor allen Dingen etwas genau bekant machen.

§. 338.

Eine unbekante Gröſe in einer Gleichung durch die Addition zu reduciren (§. 337.).

Auflöſung.

Man addire die bekanten Gröſen, die — haben, und bei der unbekanten ſtehen, auf beiden Seiten: So iſt das verlangte geſchehen und die Summe noch eine Gleichung (§. 85. 303. und 333.).

1. Exempel.

$$a + b = x - c$$

add. $c = c$ (§. 27.)

So iſt die Summe $a + b + c = x$ (§. 85. 303. und 333.).

2. Exempel.

$$a + 2b + c = x - d - f$$

add. $d = d$ (§. 27.)

So iſt die Summe $a + 2b + c + d = x - f$ (§. 85. und 303.)

add. $f = f$ (§. 27.)

So iſt die Sum̃e $a + 2b + cd + f = x$ (§. 85. und 303.).

§. 339.

Man hat alſo weiter nichts nötig, als daß man die Glieder auf der einen Seite, die − haben, mit dem entgegen geſezten Zeichen auf die andere Seite bringt.

§. 340.

Eine unbekante Gröſe in einer Gleichung durch die Subtraction zu reduciren (§. 337.).

Auflöſung.

Man ſubtrahire die bekanten Gröſen, die + haben, und auf der Seite der unbekanten Gröſe ſtehen, zu beiden Seiten, oder hänge ſie nur auf der anderen Seite mit dem entgegen geſezten Zeichen, nemlich mit − an: So machen die Reſte noch eine Gleichung, und das verlangte iſt geſchehen (§. 87. 304. und 333.).

1. Exempel.

$y + a = b - cd$

Subt. $a = a$ (§. 27.)

So bleibt $y = b - cd - a$ (§. 87. 304. und 333.).

2. Exempel.

$x + 2a + b = cd - 2f$

Subt. $2a = 2a$ (§. 27.)

So bleibt $x + b = cd - 2f - 2a$ (§. 87.)

Subt. $b = b$ (§. 27.)

So bleibt $x = cd - 2f - 2a - b$ (§. 87.).

§. 341.

Bringt man alle Glieder, die auf einer Seite ſind, auf die andere: So wird die Gleichung auf o reducirt.

Exempel.

$$aa + cb = bd - dd$$

Add. $dd = dd$ (§. 27.)

So iſt die Summe $aa + cb + dd = bd$ (§. 338.)

Subt. $bd = bd$ (§. 27.)

So bleibt $aa + cb + dd - bd = 0$ (§. 340.).

§. 342.

Eine unbekante Gröſe in einer Gleichung, die durch eine bekante dividirt iſt, durch die Multiplication zu reduciren (§. 337.).

Auflöſung.

Man multiplicire beide Glieder der Gleichung durch den Diviſor, wodurch die unbekante Gröſe dividiret iſt: So machen die Producte noch eine Gleichung aus, und die Gröſe iſt reducirt (§. 89. 107. 305. und 333.).

1. Exempel.

$$a + b - c = \frac{x}{a}$$

Mult. $a = a$ (§. 27.)

So iſt $aa + ab - ac = x$ (§. 89. 107. 305. und 333.).

2. Exempel.

$$a - b = x : c + d$$

Mult. $c + d = c + d$ (§. 27.)

So iſt $(a-b).(c+d) = ac + ad - bc - bd = x$ (§. 89. 107. 305. und 333.).

§. 343.

Man kan nach dieſer Auflöſung alle Brüche aus einer Gleichung herausbringen, wenn man alle Glieder der Brüche durch die Nenner dieſer Brüche multiplicirt.

1. Exempel.

$$a + b - \frac{c}{d} = f + g$$

Mult. $d = d$ (§. 27.)

So iſt $ad + bd - c = fd + dg$

2. Exempel.

$$a + \frac{b}{c} = d + \frac{e}{d}$$

Mult. $c = c$

So iſt $ac + b = cd + \frac{ce}{d}$

Mult. $d = d$

So iſt $acd + bd = cdd + ce$

3. Exempel.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{c} + \frac{y}{e}$$

Mult. $b = b$

So iſt $a + \frac{bc}{d} = \frac{bb}{c} + \frac{by}{e}$

Mult. $d = d$

So iſt $ad + bc = \frac{bbd}{c} + \frac{bdy}{e}$

Mult. $c = c$

So iſt $adc + bcc = bbd + \frac{bcdy}{e}$

Mult. $e = e$

So iſt $acde + bcce = bbde + bcdy.$

§. 344.

Eine unbekante Gröſe in einer Gleichung, die mit einer bekanten multiplicirt iſt, durch die Diviſion zu reduciren (§. 337.).

Aufloſung.

Man dividire beide Glieder der Gleichung durch die bekante Gröſe, wodurch die unbekante multiplicirt iſt: So machen die Quotienten noch eine Gleichung aus (§. 91. 107. 306. und 333.).

1. Exem-

1. Exempel.

$$ax = ac + ad$$

div. $a = a$ (§. 27.)

So iſt $x = c + d$ (§. 91. 107. 306. und 333.).

2. Exempel.

$$ay = 2b - cd$$

div. $a = a$ (§. 27.)

So iſt $y = \frac{2b - cd}{a}$ (§. 91. 107. 306. und 333.).

3. Exempel.

$$2ax = 2ab + cd - 2ac$$

div. $2a = 2a$ (§. 27.)

So iſt $x = b + \frac{cd}{2a} - c$ (§. 91. 107. 306. und 333.).

4. Exempel.

$$ax + bx = ac + bc$$

div. $a + b = a + b$ (§. 27.)

So iſt $x = c$ (§. 91. 107. 306. und 333.).

5. Exempel.

$$y^3 = ay^2$$

div. $y^2 = y^2$ (§. 27.)

So iſt $y = a$ (§. 91. 107. 316. und 333.).

6. Exempel.

$$x^4 = ax^3 + 2bx^3$$

div. $x^3 = x^3$ (§. 27.)

So iſt $x = a + 2b$ (§. 91. 107. 316. und 333.).

§. 345.

Eine unbekante Gröſe, die zu einer Dignität erhoben iſt, in einer Gleichung durch die Ausziehung der Wurzel zu reduciren (§. 337.).

Die erſte Auflöſung.

Man ziehe aus beiden Gliedern der Gleichung die Wurzel, die aus der unbekanten Gröſe ausgezogen werden kan: So machen dieſe Wurzeln noch eine Gleichung aus (§. 319. und 333.), alsdann aber reducire man die unbekante Gröſe.

1. Exempel.

$$x^2 = a^2$$

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$ (§27.)

So iſt $x = a$

2. Exempel.

$$x^3 = ab + c$$

Ausgezogen die $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{}$ (§. 27.)

So iſt $x = \sqrt[3]{ab + c}$

3. Exempel.

$$xx - 2ax + aa = cc$$

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$

So iſt $x - a = c$

add. $a = a$ (§. 27.)

So iſt $x = a + c$ (§. 338.)

4. Exempel.

$$y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 = bc + dd$$

Ausgezogen die $\sqrt[3]{} = \sqrt[3]{}$

So iſt $x + a = \sqrt[3]{bc + dd}$

Subt. $a = a$ (§. 27.)

So iſt $x = \sqrt[3]{bc + dd} - a$ (§. 340.)

5. Exempel.

$$y^2 + a - c = 3bd$$

Subt. $a = a$

So iſt $y^2 - c = 3bd - a$

Add. $c = c$

So iſt $y^2 = 3bd - a + c$

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$

So iſt $y = \sqrt{(3bd - a + c)}$.

6. Exempel.

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$$

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$

So iſt $y - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$

Add. $\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$

So iſt $y = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)} + \frac{a}{2}$

Die

Die zweite Auflöſung.

Wenn ſich die Wurzel nicht ausziehen läſt, und das Glied in der Gleichung, worinnen die unbekante Gröſe iſt, keine vollkommene Potenz und unrein iſt (§. 174. und 336.): So ergänze man dieſe Potenz, indem man ihr den Teil zuſezt, der ihr fehlt, man addire nemlich denſelben auf beiden Seiten der Gleichung, alsdann aber ziehe man die Wurzel aus, und reducire die unbekante Gröſe nach den vorhergehenden Aufgaben. Soll man zum Exempel eine unreine quadratiſche Gleichung auflöſen (§. 335. und 336.), oder den Werth der unbekanten Gröſe in dieſer Gleichung finden, und es iſt dieſe Gleichung $x^2 + ax = bc$; So muß die Wurzel von $x^2 + ax$ wenigſtens zwei Teile haben, und dieſemnach müſten drei Teile in dem erſten Glied der Gleichung ſein (§. 323.). Stelt man ſich nun vor, daß x^2 das Quadrat des erſten Teils, und ax das zweifache Product aus dem erſten in den andern Teil ſei: So muß, da x der erſte Teil iſt, x in ax dividirt den doppelten andern Teil a, die Hälfte davon aber, nemlich $\frac{1}{2}a$ den andern Teil geben. Es beſtehet aber ein iedes Quqdrat aus dem Quadrat des erſten Teils, aus dem zweifachen Product des erſten in den andern Teil, und dem Quadrat des anderen Teils, und daher darf man nur $\frac{1}{2}a$ in das Quadrat $\frac{1}{4}a^2$ erheben, und dieſes beiderſeits in der Glei,

Gleichung addiren: So hat man ein vollkommenes Quadrat (§. 174.). Ziehet man nun aus der Gleichung zu beiden Seiten die Wurzel, und reducirt die unbekante Gröſe: So iſt das verlangte geſchehen.

Exempel.

$x^2 + ax = bc$

Add. $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 27.)

So iſt $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = bc + \frac{1}{4}a^2$

Ausgezogen die $\surd = \surd$ (§. 27.)

So iſt $x + \frac{1}{2}a = \surd(bc + \frac{1}{4}a^2)$.

Subt. $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$ (§. 27.)

So iſt $x = \surd(bc + \frac{1}{4}a^2) - \frac{1}{2}a$ (§. 340.)

Oder

$x^2 + x = c$

Add. $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (§. 27.)

So iſt $x^2 + x + \frac{1}{4} = c + \frac{1}{4}$ (§. 338.)

Ausgezogen die $\surd = \surd$ (§. 27.)

So iſt $x + \frac{1}{2} = \surd(c + \frac{1}{4})$

Subt. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (§. 27.)

So iſt $x = \surd(c + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}$ (§. 340.).

§. 346.

Eine unbekante Gröſe in einer Gleichung, woraus die Wurzel gezogen iſt, durch die Erhebung in die Dignität zu reduciren (§. 337.)

Auflö-

Aufloſung.

Weil die unbekante Gröſe, wenn ein Wurzelzeichen davor ſtehet, ſchon eine Dignität, und nur das Wurzelzeichen davor geſezt iſt: So befreie man es von dem Wurzelzeichen, man laſſe es nemlich weg; So iſt die Wurzelgröſe in die Dignität erhoben, die der Exponent der Wurzel angibt, iezt aber erhebe man auch das andere Glied in eben die Dignität, welche der Exponent der Wurzel anzeigt: So iſt das verlangte geſchehen (§. 89.), und man kan alsdann die unbekante Gröſe reduciren (§. 337.).

1. Exempel.

$$\sqrt{\frac{ax}{b}} = c - d$$

Mult. $\sqrt{\frac{ax}{b}} = c - d$ (§. 27.)

So iſt $\frac{ax}{b} = c^2 - 2cd + d^2$

Mult. $b = b$

So iſt $ax = c^2 b - 2cbd + bd^2$

Div. $a = a$

So iſt $x = \frac{c^2 bb - cbd + bd^2}{a}$

2. Exem:

2 Exempel.

$$\sqrt[3]{ay} = b + c$$

Mult. $\sqrt[3]{ay} = b + c$

So iſt $ay = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

Div. $a = a$

So iſt $y = \frac{b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3}{a}$

§. 347.

In die Stelle einer unbekanten Gröſe in einer Gleichung den Werth zu ſezzen (§. 337.).

Auflöſung.

I. Wenn die unbekante Gröſe, an deren Stelle man ihren Werth ſezzen will, mit keiner andern verknüpft iſt: So ſezze man vor ſie in der Gleichung nur dieſen Werth mit dem ihr zugehörigen Zeichen (§. 25.).

II. Wenn die unbekante Gröſe, in deren Stelle man ihren Werth ſezzen ſoll, mit einer bekanten Gröſe multiplicirt iſt: So multiplicire man den Werth der unbekanten Gröſe durch dieſe Gröſe, und ſezze das Product mit dem Zeichen der unbekanten Gröſe vor die leztere Gröſe (§. 25. und 89.).

III. Iſt die unbekante Gröſe, in deren Stelle man eine andere ſezzen ſoll, durch eine bekante Gröſe dividirt: So dividire man den Werth der unbekanten Gröſe durch dieſe Gröſe, und ſezze den Quotient mit dem Zeichen der unbekanten Gröſe vor die leztere Gröſe (§. 25. und 91.).

IIII. Wenn

IIII. Wenn die unbekante Gröſe, vor die man ihren Werth ſezzen will, in der Gleichung zu einer Dignität erhoben, und der Werth ihrer Wurzel bekant iſt: So erhebe man den Werth der Wurzel in die Dignität, welche die unbekante Gröſe in der Gleichung hat, und ſezze dieſe mit dem Zeichen der Dignität der unbekanten Gröſe vor die leztere Gröſe (§. 25.).

Exempel vom erſten Fall.

$$a + x = y - b$$

Der Werth von $y = d$

und daher iſt $a + x = d - b$ (§. 25.).

Exempel vom zweiten Fall.

$$ay + b^2 - c^2 = d^2 + x^2$$

Der Werth von $y = d + e$

und daher iſt $ay = (d + e) . a = ad + ae$

folglich $ad + ae + b^2 - c^2 = d^2 + x^2$ (§. 25.)

Oder

$$a^2 + b^2 + x = by - cd$$

Der Werth von $y = \frac{a_2 + e}{f}$

und daher iſt $by = \frac{a^2 + e}{f} . \frac{b}{1} = \frac{a^2 b + be}{f}$ (§. 89. u. 311.)

folglich $a^2 + b^2 + x = \frac{a^2 b + be}{f} - cd$ (§. 25.).

Exem-

Exempel vom dritten Fall.

$$a + x^2 = 2a + \frac{y}{b}$$

Der Werth von $y = c - d$

Und daher iſt $\frac{y}{b} = \frac{c-d}{b}$

folglich $a + x^2 = 2a + \frac{c-d}{b}$

Oder

$$2ab + x = bc + \frac{dy}{a-e}$$

Der Werth von $y = f + g$

Und daher iſt $\frac{dy}{a-e} = \frac{(f+g).d}{a-e} = \frac{df+dg}{a-e}$ (§. 89. und 311.)

folglich $2ab + x = bc + \frac{df+dg}{a-e}$ (§. 25.).

Exempel vom vierten Fall.

$$x^2 + ab = 2ay - d^2$$

Der Werth von der Wurzel $x = c - e$

und derohalben $x^2 = c^2 - 2ce + e^2$ (§ 313.).

folglich $c^2 - 2ce + e^2 + ab = 2ay - d^2$ (§. 25).

Oder

$$y^3 + ab^2 = abx$$

Der Werth der Wurzel $y = c + d$

Und daher die dritte Dignität $y^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$ (§. 313).

folglich $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + ab^2 = abx$ (§. 25).

§. 348.

Wenn man aus bekanten Gröſen den Werth der unbekanten finden ſoll (§. 337.): So nent man dieſen Saz eine algebraiſche Aufgabe.

§. 349.

Die Verhältniſſe, worinnen die bekanten und die unbekanten Gröſen ſtehen, nent man die Bedingungen der algebraiſchen Aufgabe.

§. 350.

Die Zeichen, womit man die Bedingungen einer algebraiſchen Aufgabe ausdrukt, heiſen die Benennung.

§. 351.

Wenn man den Werth der unbekanten Gröſen in einer algebraiſchen Aufgabe findet: So ſagt man, daß man eine algebraiſche Aufgabe auflöſe.

§. 352.

Man ſagt, daß eine Aufgabe unbeſtimt ſei, wenn die Gleichung, wodurch ſie aufgelöſt wird, zwei oder mehrere unbekante Gröſen enthält, in einer ſolchen Aufgabe aber kan man den Werth der einen unbekanten Gröſe nach Gefallen annehmen, wie aus Exempeln klar wird.

§. 353.

Eine Aufgabe algebraiſch aufzulöſen (§. 348. und 351.).

Aufloͤſung.

Man benenne die gegebenen bekanten Gröſen mit den erſten Buchſtaben des kleinen Alphabets a, b, c u. ſ. w., oder mit den Anfangsbuchſtaben des Worts, welches die bekante Gröſe ausdrukt, oder mit Zahlen, wenn Zahlen gegeben ſind, die unbekanten Gröſen hingegen mit den lezten Buchſtaben des Alphabets, und mit x, y, z (§. 291. und 350.), dabei aber nehme man dieſes wol in Acht. Man laſſe einerlei Buchſtaben alzeit einerlei Gröſe in einer Rechnung andeuten, und verändere ſie niemals während dieſer Rechnung: Man benenne die Gröſen, die eine gewiſſe Verhältnis zu einander haben, mit einerlei Buchſtaben, als das Doppelte von a, nenne man 2a, und $\frac{1}{3}$ von x nenne man $\frac{1}{3}$x, eben ſo nenne man eine Gröſe, die um 5 gröſer iſt als a mit a + 5.

2) Man mache aus den Umſtänden und den Bedingungen der Aufgabe ſo viele Gleichungen, als unbekante Gröſen da ſind, weil man eben ſo viele unbekante Gröſen finden ſoll (§. 333. und 349.).

3) Sind die Gleichungen gefunden, und auf beiden Seiten dieſer Gleichungen bekante und unbekante Gröſen unter einander: So reducire man die Gleichungen, nachdem man zuerſt die kürzeſte reducirt

hat, und zwar ſo lang durch Addiren, durch Subtrahiren, durch Multipliciren, durch Dividiren, durch Ausziehen der Wurzeln, durch Erhebung in die Dignitäten, und durch die an die Stelleſezzung des Werths einer unbekanten Gröſe, bis man die unbekante Gröſe in jeder Gleichung allein auf eine Seite, auf die andere aber lauter bekante Gröſen, und alſo den Werth der unbekanten Gröſen bekomt (§. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. und 351.).

§. 354.

Dieſes iſt alſo die algemeine Auflöſung einer algebraiſchen Aufgabe, und man hat bei ihr auf drei Hauptſtükke zu ſehen, auf die **Benennung**, die **Gleichung**, und die **Reduction**, die **Auswikkelung**, oder die **Ausführung**. Nunmehr wollen wir das, was wir in der Kürze von der Algebra vorgetragen haben, nur noch auf verſchiedene Aufgaben in der Arithmetik anwenden, weil man ſchon daraus ihren groſen Nuzzen einſehen, und ſich in dieſen Rechnungen üben kan, wir aber mehr nicht zu unſerem Zwekke nötig haben.

§. 355.

Eine Zahl zu finden, wovon die Hälfte, ein Drittel und ein Viertel zuſammen genommen, um Eins gröſer iſt, als dieſe Zahl.

Aufloͤſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die zu ſuchende Zahl = x.

II. Die Gleichung.

Weil die halbe Zahl, das Drittel, und das Viertel derſelben um Eins groͤſer iſt, als die Zahl ſelbſt, die Zahl aber x iſt (N. I.): So iſt auch $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$.

III. Die Reduction.

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$ (N. II.)

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{26x}{24}$ (§. 309.)

Und daher iſt $\frac{26x}{24} = + 1$ (§. 25.).

Mult. $24 = 24$ (§. 27.)

So iſt $26x = 24^x + 24$ (§. 342.).

Subt. $24x = 24x$ (§. 27.)

So iſt $2x = 24$ (§. 340.).

Div. $2 = 2$ (§. 27.)

So iſt $x = 12$ (§. 344.).

Oder

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$ (N. II.)

Mult. $2 = 2$ (§. 27.)

So iſt $x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x = 2x + 2$ (§. 343.)

Mult. $3 = 3$ (§. 27.)

So iſt $3x + 2x + \frac{6}{4}x = 6x + 6$ (§. 343.)

Mult. $4 = 4$ (§. 27.)

So iſt $12x + 8x + 6x = 24x + 24$ (§. 343.)

$12x + 8x + 6x = 26x$ (§. 303.)

Und daher iſt $26x = 24x + 24$ (§. 347.)

Subt. $24x = 24x$ (§. 27.)

Und daher iſt $2x = 24$ (§. 340.)

Div. $2 = 2$ (§. 27.)

So iſt $x = 12$ (§. 344.)

Und allein die Zahl 12 hat die in der Aufgabe enthaltene Eigenſchaft.

§. 356.

Zwei Zahlen zu finden, die zuſammen 300 ausmachen, die eine aber um 66 gröſer iſt, als die andere.

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Wir nehmen an, es ſei die kleinere Zahl $= y$: So iſt die gröſere $= y + 66$.

II. Die

II. Die Gleichung.

Weil y die eine, und $y + 66$ die andere Zahl, und 300 die Summe iſt (N. I.): So iſt $y + y + 66 = 2y + 66 = 300$.

III. Die Reduction.

	$2y + 66 = 300$ (N. II.)
Subt.	$66 = 66$ (§. 27.)
So iſt	$2y = 234$ (§. 340.)
Div.	$2 = 2$
So iſt	$y = 117$ (§. 344.).

Dieſemnach iſt 117 die eine, und $117 + 66 = 183$ die andere Zahl, und $117 + 183 = 300$.

§. 357.

Eine Zahl zu finden, wovon der ſechſte Teil um 8 gröſer iſt, als der neunte.

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die zu ſuchende Zahl $= x$.

II. Die Gleichung.

Weil der ſechſte Teil um 8 gröſer iſt, als der neunte: So iſt $\frac{x}{6} = \frac{x}{9} + 8$.

III. Die Reduction.

$$\frac{x}{6} = \frac{x}{9} + 8$$

und $\frac{9x}{54} = \frac{6x}{54} + 8$ (§. 308.)

Subt. $\frac{6x}{54} = \frac{6x}{54}$ (§. 27.)

So iſt $\frac{3x}{54} = 8$ (§. 340.)

Mult. $54 = 54$ (§. 27.)

So iſt $3x = 432$ (§. 342.)

Div. $3 = 3$ (§. 27.)

So iſt $x = 144$ (§. 344.)

Es iſt alſo 144 die verlangte Zahl, und hiervon iſt der ſechſte Teil um 8 gröſer, als der neunte.

§. 358.

Eine Zahl zu finden, die wenn man 12 dazu addirt, und die Summe mit 6 dividirt, den Quotienten 8 gibt.

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die Zahl $= x$: So iſt die Zahl x um 12 vermehrt $= x + 12$, und dieſe um 12 vermehrte Zahl $x + 12$ dividirt durch 6 $= \frac{x + 12}{6}$

II. Die

II. Die Gleichung.

Weil die um 12 vermehrte, und durch 6 dividirte Zahl der Zahl 8 gleich ſein ſoll: So iſt $\frac{x+12}{6} = 8$.

III. Die Reduction.

$$\frac{x+12}{6} = 8 \text{ (N. II.)}$$

Mult. $6 = 6$ (§. 27.)

Und daher iſt $x + 12 = 48$ (§. 342.)

Subt. $12 = 12$ (§. 27.)

So iſt $x = 36$ (§. 340.)

Wenn man alſo zu 36 die Zahl 12 addirt, und die Summe durch 6 dividiret: So iſt der Quotient 8.

§. 359.

Ein Häuer ſagt zu dem andern, ich habe 4 Schichten mehr, als wie du, der dritte, ich habe 6 Schichten mehr, als wie ihr beide, und der vierte, ich habe 22 und ſo viele Schichten, als ihr drei (§. 145. und 146. der Grubenbaukunſt). Jezt fragt man, wie viele Schichten hat ein ieder?

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Wenn man die Zahl der Schichten des andern Häuers weis: So iſt die ganze Aufgabe aufgelöſt, die nun wollen wir y nennen.

II. Die Gleichung.

Da der erſte Häuer 4 Schichten mehr hat, als wie der andere: So iſt die Zahl der Schichten des erſteren Häuers $= y + 4$, und die Zahl der Schichten des dritten Häuers, der ſo viele Schichten, als wie der erſte und der andere, und noch 6 mehr hat $= y + y + 4 + 6 = 2y + 4 + 6$, endlich die Zahl der Schichten des vierten, der ſo viele Schichten hat, als alle drei $= y + y + 4 + 2y + 4 + 6 = 4y + 14$. Weil nun der vierte 22 und ſo viele Schichten hat, als alle drei Häuer: So iſt $4y + 14 = 22$.

III. Die Reduction.

	$4y + 14 = 22$	(N. II.)
Subt.	$14 = 14$	(§. 27.)
So iſt	$4y = 8$	(§. 340.)
Div.	$4 = 4$	(§. 27.)
So iſt	$y = 2$	(§. 344.)

Es iſt alſo die Zahl der Schichten des anderen Häuers 2. Addirt man nun dazu die 4 Schichten, die der erſte mehr hat, als der andere; So hat derſelbe 6 Schichten: Und addirt man zu den Schichten des erſten und des andern die 6 Schichten, die der dritte mehr hat, als die beiden erſtern; So hat der dritte 14 Schichten, der vierte aber 22, und die Schichten des erſten, des zweiten und dritten, nemlich 6, 2, und 14 zuſammen genommen.

§. 360.

Ein Häuer ſagt zu dem andern, wenn du mir eine von deinen Schichten gibſt: So habe ich ſo viele Schichten, als wie du alsdann haſt, der andere aber antwortet, gebe du mir eine von deinen, ſo habe ich noch einmal ſo viele Schichten, als wie du hernach haſt (§. 145. und 146. der Grubenbauk.). Nun fragt man, wie viele Schichten ein ieder gehabt hat?

Auflöſung.

I. Benennung.

Es ſei die Zahl der Schichten des erſten Häuers $= y$, die Zahl der Schichten des andern aber $= z$.

II. Die Gleichung.

Wenn der erſte eine von den Schichten des andern bekomt: So hat er ſo viele Schichten, als wie der andere, der andere aber eine weniger, beide inzwiſchen gleich viele Schichten. Da nun y die Zahl der Schichten des erſten, und z die Zahl der Schichten des andern iſt (N. I.): So iſt $y + 1 = z - 1$. Wenn der andere eine von den Schichten des erſten bekomt: So hat er noch einmal ſo viele Schichten, als wie der erſtere, der erſte aber eine weniger, und nur noch halb ſo viele Schichten, als wie der andere. Weil nun z die Schichten des andern, und y die Schichten des erſten ſind (N. I.): So iſt $z + 1 = y - 1 + y - 1 = 2y - 2$.

III. Die

III. Die Reduction.

1) $y + 1 = z - 1$ (N. II.)

Add. $1 = 1$ (§. 27.)

So iſt $y + 2 = z$ (§. 338.)

2) $z + 1 = 2y - 2$ (N. II.)

$z = y + 2$ (N. 1.)

Und daher iſt $y + 2 + 1 = 2y - 2$ (§. 347.)

$2 + 1 = 3$ (§. 30.)

Und daher iſt $y + 3 = 2y - 2$ (§. 25.)

Add. $2 = 2$ (§. 27.)

So iſt $y + 3 + 2 = 2y$ (§. 338.)

$3 + 2 = 5$ (§. 30.)

Und daher iſt $y + 5 = 2y$ (§. 25.)

Subt. $y = y$ (§. 27.)

So iſt $5 = y$ (§. 340.).

3) $y + 2 = z$ (N. 1.)

$y = 5$ (N. 2.)

Und daher iſt $5 + 2 = z$ (§. 347.)

$5 + 2 = 7$ (§. 30.)

Und alſo iſt $7 = z$ (§. 25.)

Es iſt alſo die Zahl der Schichten des erſten Häuers 5 (N. 2.), und die Zahl der Schichten des andern Häuers 7 (N. 3.).

§. 361.

Es haben drei Häuer in einem Gedinge 6 Gulden Ueberſchuß (§. 145. und 150. der Grubenbauk.), davon nun ſoll der andere noch einmal ſo viel bekommen, als wie der erſte, und der dritte dreimal ſo viel, als wie der andere; es enſtehet alſo die Frage, wie viel ein ieder von den 6 Gulden bekomt?

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Der Ueberſchuß, welchen der erſte Häuer bekomt, ſei $=x$: So iſt, weil der andere noch einmal ſo viel bekomt, als wie der erſte, der Ueberſchuß des anderen $=2x$, und der Ueberſchuß des dritten Häuers, weil er dreimal ſo viel bekomt, als wie der andere, $=6x$.

II. Die Gleichung.

Weil der Ueberſchuß des erſten, des andern, und des dritten Häuers dem ganzen Ueberſchuß gleich iſt: So iſt $x+2x+6x=9x=6$.

III. Die Reduction.

$9x=6$ (N. II.)

Div. $9=9$ (§. 27.)

Und daher $x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ (§. 128. und 344.).

Es

Es bekomt alſo der erſte, da x ſein Ueberſchuß iſt, $\frac{2}{3}$ Gulden, der andere, der noch einmal ſo viel bekomt $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ Gulden, und der dritte, welcher dreimal ſo viel bekomt, als der andere, $\frac{12}{3}$ oder 4 Gulden, und es macht der Ueberſchuß des erſten, des andern, und des dritten, den ganzen Ueberſchuß von 6 Gulden aus.

§. 362.

Man hat unter eine gewiſſe Zahl Häuer ein Geſchenke verteilet: Wenn man nun einem 2 Gulden gegeben hat; So hat man 12 Gulden übrig gehabt: Hat man hingegen einem 3 Gulden gegeben; So hat man 58 Gulden zu wenig gehabt. Nun fragt man, wie viele Häuer es geweſen ſind, und wie gros das Geſchenke war?

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Die Zahl der Häuer ſeie $= x$.

II. Die Gleichung.

Wenn einer 2 Gulden bekomt; So iſt das Geſchenk, wenn man 2 Gulden in die Zahl der Häuer x multipliciret, und noch 12 dazu addirt, $= 2x + 12$: Wenn hingegen ein Häuer 3 Gulden bekomt; So iſt das Geſchenke, wenn man 3 Gulden in die Zahl der Häuer x multipliciret, und 58 davon abziehet, $= 3x - 58$, und dieſemnach iſt $2x + 12 = 3x - 58$.

III. Die

III. Die Reduction.

	$2x + 12 = 3x - 58$ (N. II.)
Subt.	$2x = 2x$ (§. 27.)
So iſt	$12 = x - 58$ (§. 340.)
Addirt	$58 = 58$ (§. 27.)
So iſt	$70 = x$ (§. 338.).

Es ſind alſo, da x die Zahl der Häuer iſt, 70 Häuer geweſen. Da nun, wenn ein ieder 2 Gulden bekommen hat, das Geſchenke $= 2x + 12$ geweſen (N. II.), und $x = 70$ iſt; So wäre das Geſchenke $70.2 + 12 = 140 + 12 = 152$: Und da, wenn ein Häuer 3 Gulden bekommen hat, das Geſchenke $= 3x - 58$ geweſen (N. II.), und $x = 70$ iſt; So wäre das Geſchenke $70.3 - 58 = 210 - 58 = 152$.

§. 363.

Ein Häuer, ein Haſpelknecht, und ein Junge ſchlagen ein Gedinge in 27 Schichten heraus (§. 145. 146. und 150. der Grubenbauk.), und es bekomt der erſte die Schicht 18 ≠, der andere 12 ≠, und der dritte 9 Kreuzzer, einer aber ſo viel Geld, wie der andere. Man fragt daher, wie viele Schichten ein ieder gearbeitet hat?

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Die Zahl der Schichten des erſten ſei $= x$, ſo bekomt er, weil ſein Schichtlohn 18 iſt, $18x$, und

die

die Zahl der Schichten des andern $=y$, ſo bekomt er, da ſein Schichtlohn 12 iſt, $12y$. Dieſemnach iſt die Zahl der Schichten des dritten, weil er nur den Reſt von 27 Schichten gethan hat, $=27-x-y$, und wenn man dieſe Zahl mit dem Schichtlohn 9 multiplicirt, ſo bekomt er $(27-x-y).9$.

II. Die Gleichung.

Weil ein Bergmann, ſo viel wie der andere bekomt: So iſt $18x=12y$, und $12y=(27-x-y).9$ (N. I.).

III. Die Reduction.

	1) $18x=12y$ (N. II.)
Div.	$18=18$ (§. 27.)
So iſt	$x=\frac{12y}{18}=\frac{2y}{3}$ (§. 107. u. 144)
	2) $12y=(27-x-y).9$ (N. II.)
	$x=\frac{2y}{3}$ (N. 1.)
Und daher iſt	$12y=(27-\frac{2y}{3}-y).9$ (§. 347.)
	$(27-\frac{2y}{3}-y).9=243-6y-9y$ (§. 311)
Und daher iſt	$12y=243-6y-9y$ (§. 25.)
Add.	$6y=6y$ (§. 27.)
So iſt	$18y=243-9y$ (§. 338.)
Add.	$9y=9y$ (§. 27.)
So iſt	$27y=243$ (§. 338.)
Div.	$27=27$ (§. 27.)
So iſt	$y=9$ (§. 344.)

3) x

$$3)\ x = \frac{2y}{3} \quad (\text{N. 1.})$$

Mult. $y = 9$ (N. 2.)

Und daher iſt $x = \frac{2.9}{3} = \frac{18}{3} = 6$ (§. 142. u. 347.)

Es hat alſo der Häuer, weil er x genent worden, 6, und der Haſpelknecht, weil er y heiſet, 9 Schichten gearbeitet: Und weil die Zahl der Schichten des Jungen $= 27 - x - y$, x aber $= 6$, und $y = 9$ iſt; So hat der Junge $27 - 6 - 9$ Schichten, und alſo 12 Schichten gearbeitet. Es macht alſo der Lohn des erſten von 6 Schichten zu 18 Kreuzzer 1 Gulden 48 Kreuzzer, der Lohn des andern von 9 Schichten zu 12 Kreuzzer 1 fl. 48 Kreuzzer, und der Lohn des Jungens von 12 Schichten zu 9 Kreuzzer 1 fl. 48 Kreuzzer.

§. 364.

Man hat drei Haufen Erz, welche 2365 Centner ausmachen, in dem erſten iſt eine unbekante Centnerzahl, in dem zweiten ſind 500 Centner weniger, als wie in dem erſten, und in dem dritten ſind 800 Centner weniger, als wie in dem andern. Nun fragt man, wie viele Centner in einem ieden Haufen Erz ſind?

Aufloͤſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die Zahl des erſten Haufen $= x$: So iſt die Zahl des zweiten, weil in ihm 500 Centner weniger ſind, als wie in dem erſten, $= x - 500$, und die Zahl des dritten, weil in ihm 800 Centner weniger ſind, als wie in dem andern, $= x - 500 - 800$.

II. Die Gleichung.

Weil die Zahl des erſten Haufens $= x$, des andern $= x - 500$, und des dritten $= x - 500 - 800$, die Zahl aller drei Haufen aber $= 2365$ iſt (N. I.): So iſt $x + x - 500 + x - 500 - 800 = 3x - 1800 = 2365$.

III. Die Reduction.

	$3x - 1800 = 2365$	(N. II.)
Add.	$1800 = 1800$	(§. 27.)
So iſt	$3x = 4165$	(§. 338.)
Div.	$3 = 3$	(§. 27.)
So iſt	$x = 1388\frac{1}{3}$	(§. 344.).

In dem erſten Haufen ſind alſo $1388\frac{1}{3}$ Centner: Ziehet man nun von dieſen 500 ab, weil der zweite 500 weniger hat; So bekomt man $888\frac{1}{3}$ Centner vor den zweiten Haufen: Und ziehet man von dieſen, weil der dritte 800 weniger hat, als der zweite, 800 ab; So erhaͤlt man endlich $88\frac{1}{3}$ Centner vor den dritten Haufen, und es machen

$1388\frac{1}{3} + 888\frac{1}{3} + 88\frac{1}{3}$ die ganze Centnerzahl 2365 aus.

§. 365.

Aus der gegebenen Summe zweier Zahlen, und ihrer Differenz, dieſe beiden Zahlen zu finden (§. 74. und 76.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die bekante Summe $= a$, die bekante Differenz $= b$, und die kleinere unbekante Gröſe, deren Werth man finden ſoll $= x$: So iſt die groſe unbekante Zahl $= x + b$ (§. 76.).

II. Die Gleichung.

Weil die Summe der kleinen, und der groſen unbekanten Zahl gleich iſt (§. 30.): So iſt $a = x + x + b = 2x + b$.

III. Die Reduction.

1) $a = 2x + b$ (N. II.)

Subt.	$b = b$	
So iſt	$a - b = 2x$	(§. 340.)
Div.	$2 = 2$	(§. 27.)
So iſt	$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = x$	(§. 344.).

Die kleine Zahl iſt alſo die halbe Summe weniger dem halben Unterſcheid. Wenn man daher von der halben Summe den halben Unterſcheid abziehet: So bekomt man die kleine Zahl.

 2) Die

2) Die groſe Zahl iſt $= x + b$ (N. I.)
$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (N. III.)

Und daher iſt die groſe Zahl $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + b$ (§. 347.)
Weil aber $b - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b$ (§. 302.)

So iſt die groſe Zahl $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

Die groſe Zahl iſt alſo die halbe Summe addirt zur halben Differenz. Addirt man daher die halbe Differenz zur halben Summe: So bekomt man die groſe Zahl.

Iſt alſo die Summe, und die Differenz zweier Zahlen gegeben: So kan man die groſe, und die kleine Zahl von dieſen Zahlen leicht finden.

§. 366.

Aus dem gegebenen Product, und der Summe zweier Zahlen, dieſe Zahlen zu finden (§. 74. und 78.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſeie das Product $= a$, die Summe $= b$, und die unbekante halbe Differenz dieſer Zahlen $= y$, weil man, wenn dieſe bekant iſt, aus ihr und der gegebenen Summe die Zahlen leicht finden kan (§. 365.): So iſt die gröſere Zahl $= \frac{1}{2}b + y$, und die kleinere $= \frac{1}{2}b - y$.

II. Die

II. Die Gleichung.

Weil $\frac{1}{2}b+y$ die groſe, und $\frac{1}{2}b-y$ die kleine Zahl, a aber das Product dieſer Zahlen iſt (N. I.): So iſt $(\frac{1}{2}b+y).(\frac{1}{2}b-y)=a$ (§. 79.).

III. Die Reduction.

Wenn man die gröſere Zahl $\frac{1}{2}b+y$
multiplicirt mit der kleinen $\frac{1}{2}b-y$

$$-\tfrac{1}{2}by-yy$$
$$\tfrac{1}{4}bb+\tfrac{1}{2}by$$

So iſt das Product $\frac{1}{4}bb-yy=(\frac{1}{2}b+y).(\frac{1}{2}b-y)$ (§. 305)
$(\frac{1}{2}b+y).(\frac{1}{2}b-y)=a$ (N. II.)

Und daher $\frac{1}{4}bb-yy=a$ (§. 25.)
Add. $yy=yy$ (§. 27.)

So iſt $\frac{1}{4}bb=a+yy$ (§. 338.)
Subt. $a=a$ (§. 27.)

So iſt $\frac{1}{4}bb-a=yy$ (§. 340.)
Ausgezogen die $\sqrt{}=\sqrt{}$ (§. 27.)

So iſt $\sqrt{(\frac{1}{4}bb-a)}=y$ (§. 345.)

Wenn man alſo die gegebene Summe quadrirt, und davon den vierten Teil nimt, von dieſem aber das gegebene Product abziehet: So bekomt man die halbe Differenz. Weil nun dieſe und die Summe bekant iſt: So kan man auch die geſuchten Zahlen leicht finden, und zwar die gröſere, wenn man die halbe Differenz zu der halben Summe addirt, hingegen aber die klei-

nere, wenn man die halbe Differenz von der halben Summe abziehet (§. 365.).

§. 367.

Aus der gegebenen Summe, und dem Quotienten zweier Zahlen, dieſe Zahlen zu finden (§. 74. und 80.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die gegebene Summe der beiden Zahlen $=a$, und der gegebene Quotient $=b$, die eine unbekante Zahl $=x$, die andere aber $=y$.

II. Die Gleichung.

Weil x die eine, und y die andere unbekante Zahl, die Summe aber a iſt; So iſt auch $a=x+y$ (N. I. und §. 30.): Und weil x die eine, y aber die andere, und der Quotient dieſer Zahlen b iſt; So iſt auch $b=x:y$ (N. I. und §. 80.).

III. Die Reduction.

	1) $x+y=a$ (N. II.)
Subt.	$y=y$ (§. 27.)
So iſt	$x=a-y$ (§. 340.).

	2) $x:y=b$ (N. II.)
Mult.	$y=y$ (§. 27.)
So iſt	$x=by$ (§. 342.).

3) x

$$3)\ x = a - y \quad (\text{N. }1.)$$
$$x = by \quad (\text{N. }2.)$$

Und daher iſt $by = a - y$ (§. 347.)
Add. $y = y$ (§. 27.)

So iſt $by + y = a$ (§. 338.)
$by + y = (b + 1).y$ (§. 305.)

Und daher iſt $(b + 1).y = a$ (§. 25.)
Div. $b + 1 = b + 1$ (§. 27.)

So iſt $y = \frac{a}{b+1}$ (§. 344.).

$$4)\ x = by \quad (\text{N. }2.).$$
$$y = \frac{a}{b+1} \quad (\text{N. }3.).$$

Und daher iſt $x = \frac{ab}{b+1}$ (§. 347.).

Wenn man alſo die bekante Summe durch den auch bekanten, aber mit Eins vermehrten Quotienten dividirt; So bekomt man im Quotienten die eine unbekante Gröſe y (N. 3.): Und wenn man die Summe mit dem Quotienten multiplicirt, und das Product durch den um Eins vermehrten Quotienten dividirt; So bekomt man die andere unbekante Zahl x (N. 4.)

§. 368.

Aus dem gegebenen Product, und der Differenz zweier Zahlen dieſe Zahlen zu finden (§. 76. und 78.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Wir nehmen an, es ſeie das Product $= a$, die Differenz $= b$, und die halbe Summe $= y$, weil man, wenn dieſe bekant iſt, aus ihr und der gegebenen Differenz die Zahlen leicht finden kan: So iſt, weil y die halbe Summe, b aber die Differenz iſt, die groſe Zahl $= y + \frac{1}{2}b$, und die kleine $= y - \frac{1}{2}b$ (§. 365.).

II. Die Gleichung.

Weil $y + \frac{1}{2}b$ die groſe, und $y - \frac{1}{2}b$ die kleine Zahl, a aber das Product iſt (N. I.): So iſt $(y + \frac{1}{2}b).(y - \frac{1}{2}b) = a$.

III. Die Reduction.

Wenn man die groſe Zahl $y + \frac{1}{2}b$
multiplicirt mit der kleinen $y - \frac{1}{2}b$

$- \frac{1}{2}by - \frac{1}{4}bb$
$yy + \frac{1}{2}by$

So iſt das Product $yy - \frac{1}{4}bb = (y + \frac{1}{2}b).(y - \frac{1}{2}b)$ (N. II. u. $(y + \frac{1}{2}b).(y - \frac{1}{2}b) = a$ (N. II.) §. 305)

Und daher $yy - \frac{1}{4}bb = a$ (§. 25.)
Addirt $\frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$ (§. 27.)

So iſt $yy = \frac{1}{4}bb + a$ (§. 338.)
Ausgezogen $\sqrt{} = \sqrt{}$ (§. 27.)

So iſt $y = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + a)}$ (§. 345.).

Wenn

Wenn man alſo die gegebene Differenz in das Quadrat erhebet, und daſſelbe durch 4 dividiret, zu dem Quotienten aber das gegebene Product addiret, und daraus die Quadratwurzel ziehet; So bekomt man die halbe Summe: Da nun die Differenz gegeben iſt; So darf man nur die Hälfte davon zur halben Summe addiren, oder davon ſubtrahiren; So bekomt man im erſten Fall die groſe, im andern aber die kleine Zahl (§. 365.).

§. 369.

Aus der gegebenen Differenz, und dem Quotienten zweier Zahlen, dieſe Zahlen zu finden (§. 76. und 80.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die gegebene Differenz $=a$, und der Quotient $=b$, die eine unbekante Zahl aber $=x$, und die andere $=y$.

II. Die Gleichung.

Weil x und y die beiden unbekanten Zahlen ſind, a aber die Differenz iſt (N. I.); So iſt $x-y=a$ (§. 76.): Und weil x und y die unbekante Zahlen ſind, und b der Quotient iſt (N. I.); So iſt $x:y=b$ (§. 80.).

III. Die Reduction.

	1) $x-y=a$	(N. II.)
Add.	$y=y$	(§. 27.)
So iſt	$x=a+y$	(§.338.).
	2) $x:y=b$	(N. II.)
Mult.	$y=y$	(§. 27.)
So iſt	$x=by$	(§. 342.).
	3) $x=by$	(N. 2.)
	$x=a+y$	(N. I.)
Und daher iſt	$a+y=by$	(§. 347.)
Subt.	$y=y$	(§. 27.)
So iſt	$a=by-y$	(§. 340.)
Div.	$b-1=b-1$	(§. 27.)

Und daher iſt $\frac{a}{b-1}=y$ (§. 344.)

4) $x=by$

$y=\frac{a}{b-1}$ (N. 3.)

Und daher iſt $x=\frac{ab}{b-1}$ (§. 347.).

Wenn man alſo die gegebene Differenz durch den ebenwol gegebenen, aber um Eins verminderten Quotienten dividiret; So bekomt man die Gröſe y (N. 3.): Und wenn man die Differenz mit dem Quotienten multiplicirt, und das Product durch den gegebenen, aber um Eins ver-

verminderten Quotient dividiret; So bekomt man die Zahl x (N. 4.).

§. 370.

Aus dem gegebenen Product, und dem Quotienten zweier Zahlen, dieſe Zahlen zu finden (§. 78. und 80.).

Aufloͤſung.

I. Die Benennung.

Das Product nennen wir a, den Quotient b, und die eine Zahl x, die andere aber y.

II. Die Gleichung.

Weil x die eine, und y die andere, a aber das Product iſt (N. I.); So iſt auch $xy = a$ (§. 79.): Und weil x und y die beiden Zahlen ſind, und b der Quotient iſt (N. I.); So iſt $x : y = b$ (§. 80.).

III. Die Reduction.

1) $xy = a$ (N. II.)

Div. $y = y$ (§. 27.)

Und daher iſt $x = a : y$ (§. 344.).

2) $x : y = b$ (N. II.)

Mult. $y = y$ (§. 27.)

Und daher iſt $x = by$ (§. 342.).

3) x

	3) $x = by$ (N. 2.)
	$x = a:y$ (N. 1.)
Und daher	$a:y = by$ (§. 347.)
Mult.	$y = y$ (§. 27.)
Und daher	$a = byy$ (§. 342.)
Div.	$b = b$ (§. 27.)
Und daher	$a:b = yy$ (§. 344.)
ausgezogen die	$\sqrt{} = \sqrt{}$ (§. 27.)
So iſt	$\sqrt{(a:b)} = y$ (§. 345.).

Oder wenn man den Werth von x wiſſen will.

	1) $xy = a$ (N. II.)
Div.	$x = x$ (§. 27.)
Und daher	$y = a:x$ (§. 344.)
	2) $x:y = b$ (N. II.)
Mult.	$y = y$ (§. 27.)
Und daher	$x = by$ (§. 342.)
Div.	$b = b$ (§. 27.)
Und daher	$x:b = y$ (§. 344.).
	3) $y = x:b$ (N. 2.)
	$y = a:x$ (N. 1.)
Und daher	$a:x = x:b$ (§. 39.)
Mult.	$x = x$ (§. 27.)
Und daher	$a = \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{1} = x^2:b$ (§. 311. u. 342)
Mult.	$b = b$ (§. 27.)
Und daher	$ab = x^2$ (§. 342.)
Ausgezogen die	$\sqrt{} = \sqrt{}$ (§. 27.).
Und daher	$\sqrt{ab} = x$ (§. 345.).

Wenn

Wenn man alſo das Product durch den Quotienten dividiret, und aus dieſem Quotienten die Quadratwurzel ziehet; So bekomt man die Zahl y: Und wenn man das Product mit dem Quotienten multipliciret, und daraus die Quadratwurzel ziehet; So bekomt man die Zahl x.

§. 371.

Aus der gegebenen Summe zweier Zahlen, und der gleichfals gegebenen Differenz ihrer Quadrate, dieſe Zahlen zu finden (§. 74. 76. und 168.).

Aufloſung.

I. Die Benennung.

Die gegebene Summe ſei $=a$, die Differenz der Quadrate aber $=b$, und die halbe Differenz der Zahlen $=x$, weil, wenn dieſe gefunden iſt, man alsdann aus ihr, und der gegebenen Summe die verlangte Zahlen leicht finden kan.

Es iſt alſo die groſe Zahl, weil die halbe Differenz der Zahlen x, und die Summe a iſt, $=\frac{1}{2}a+x$, und die kleine $\frac{1}{2}a-x$.

II. Die Gleichung.

Weil die groſe Zahl $=\frac{1}{2}a+x$, und die kleine $\frac{1}{2}a-x$, b aber die Differenz ihrer Quadrate iſt (N. I.): So iſt auch $(\frac{1}{2}a+x).(\frac{1}{2}a+x)-(\frac{1}{2}a-x).(\frac{1}{2}a-x)=b$.

III. Die

III. Die Reduction.

1) Wenn die groſe Zahl $\frac{1}{2}a + x$
multiplicirt wird mit ſich ſelbſt $\frac{1}{2}a + x$

$$+\frac{1}{2}ax + xx$$
$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax$$

So bekomt man das Quadrat der groſen Zahl $\frac{1}{4}aa + ax + xx = (\frac{1}{2}a + x) \cdot (\frac{1}{2}a + x)$
(N. II. und §. 323).

2) Wenn die kleine Zahl $\frac{1}{2}a - x$
multiplicirt wird mit ſich ſelbſt $\frac{1}{2}a - x$

$$-\frac{1}{2}ax + xx$$
$$\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax$$

So bekomt man das Quadrat der kleinen Zahl $\frac{1}{4}aa - ax + xx = (\frac{1}{2}a - x) \cdot (\frac{1}{2}a - x)$
(N. II. und §. 323.)

3) Ziehet man von dem Quadrat $\frac{1}{4}aa + ax + xx = (\frac{1}{2}a + x) \cdot (\frac{1}{2}a + x)$
(N. 1.)

ab das Quadrat $\frac{1}{4}aa - ax + xx = (\frac{1}{2}a - x) \cdot (\frac{1}{2}a - x)$
(N. 2.)

So iſt der Unterſcheid dieſer Quadrate $2ax = (\frac{1}{2}a + x) \cdot (\frac{1}{2}a + x) - (\frac{1}{2}a - x) \cdot (\frac{1}{2}a - x)$
(§. 304.)

$$(\tfrac{1}{2}a + x) \cdot (\tfrac{1}{2}a + x) - (\tfrac{1}{2}a - x) \cdot (\tfrac{1}{2}a - x) = b$$
(N. II.)

Und daher $2ax = b$ (§. 25.)

Div. $2a = 2a$ (§. 27.)

Und daher $x = \frac{b}{2a}$ (§. 344.).

Wenn

Wenn man alſo die gegebene Differenz der Quadrate durch das Doppelte der Summe dividiret: So bekomt man die halbe Differenz der unbekanten Zahlen. Wenn man nun dieſe zu der halben Summe der Zahlen addirt, oder davon ſubtrahirt; So bekomt man im erſten Fall die groſe, im andern aber die kleine Zahl, die man wiſſen wollen (§. 365.).

§. 372.

Aus der gegebenen Differenz zweier Zahlen, und der Summe ihrer Quadrate, dieſe Zahlen zu finden (§. 74. 76. und 168.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Wir nennen die Differenz der Zahlen a, und die Summe ihrer Quadrate b, die halbe Summe dieſer Zahlen aber x, weil man, wenn dieſe bekant iſt, die Zahlen alsdann leicht finden kan, da die Differenz gegeben iſt. Dieſemnach iſt, weil x die halbe Summe, und a die Differenz der Zahlen iſt, die groſe Zahl $x + \frac{1}{2}a$, und die kleine $x - \frac{1}{2}a$.

II. Die Gleichung.

Weil die groſe Zahl $x + \frac{1}{2}a$, und die kleine $x - \frac{1}{2}a$, die Summe ihrer Quadrate aber b iſt (N. 1.): So iſt auch $(x + \frac{1}{2}a).(x + \frac{1}{2}a) + (x - \frac{1}{2}a).(x - \frac{1}{2}a) = b$.

III. Die

III. Die Reduction.

1) Wenn die groſe Zahl $\frac{1}{2}a+x$
multiplicirt wird mit ſich ſelbſt $\frac{1}{2}a+x$

$$+\frac{1}{2}ax+xx$$
$$\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ax$$

So bekomt man das Quadrat der groſen Zahl $\frac{1}{4}aa+ax+xx=(\frac{1}{2}a+x).(\frac{1}{2}a+x)$ (N. II. und §. 323).

2) Wenn die kleine Zahl $\frac{1}{2}a-x$
multiplicirt wird mit ſich ſelbſt $\frac{1}{2}a-x$

$$-\frac{1}{2}ax+xx$$
$$\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ax$$

So bekomt man das Quadrat der kleinen Zahl $\frac{1}{4}aa-ax+xx=(\frac{1}{2}a-x).(\frac{1}{2}a-x)$ (N. II. und §. 323.)

3) Ziehet man von dem Quadrat $\frac{1}{4}aa+ax+xx=(\frac{1}{2}a+x).(\frac{1}{2}a+x)$ (N. 1.)

ab das Quadrat $\frac{1}{4}aa-ax+xx=(\frac{1}{2}a-x).(\frac{1}{2}a-x)$ (N. 2.)

So iſt der Unterſcheid dieſer Quadrate $2ax=(\frac{1}{2}a+x).(\frac{1}{2}a+x)-(\frac{1}{2}a-x).(\frac{1}{2}a-x)$ (§. 304.)

$(\frac{1}{2}a+x).(\frac{1}{2}a+x)-(\frac{1}{2}a-x).(\frac{1}{2}a-x)=b$ (N. II.)

Und daher $2ax=b$ (§. 25.)

Div. $2a=2a$ (§. 27.)

Und daher $x=\frac{b}{2a}$ (§. 344.).

Wenn

Wenn man alſo die gegebene Differenz der Quadrate durch das Doppelte der Summe dividiret: So bekomt man die halbe Differenz der unbekanten Zahlen. Wenn man nun dieſe zu der halben Summe der Zahlen addirt, oder davon ſubtrahirt; So bekomt man im erſten Fall die groſe, im andern aber die kleine Zahl, die man wiſſen wollen (§. 365.).

§. 372.

Aus der gegebenen Differenz zweier Zahlen, und der Summe ihrer Quadrate, dieſe Zahlen zu finden (§. 74. 76. und 168.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Wir nennen die Differenz der Zahlen a, und die Summe ihrer Quadrate b, die halbe Summe dieſer Zahlen aber x, weil man, wenn dieſe bekant iſt, die Zahlen alsdann leicht finden kan, da die Differenz gegeben iſt. Dieſemnach iſt, weil x die halbe Summe, und a die Differenz der Zahlen iſt, die groſe Zahl $x + \frac{1}{2}a$, und die kleine $x - \frac{1}{2}a$.

II. Die Gleichung.

Weil die groſe Zahl $x + \frac{1}{2}a$, und die kleine $x - \frac{1}{2}a$, die Summe ihrer Quadrate aber b iſt (N. 1.): So iſt auch $(x + \frac{1}{2}a) . (x + \frac{1}{2}a) + (x - \frac{1}{2}a) . (x - \frac{1}{2}a) = b$.

III. Die

III. Die Reduction.

1) Wenn man die groſe Zahl $x + \frac{1}{2}a$
multiplicirt mit ſich ſelbſt $x + \frac{1}{2}a$

$$+ \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa$$
$$xx + \frac{1}{2}ax$$

So iſt das Quadrat
der groſen Zahl $xx + ax + \frac{1}{4}aa = (x + \frac{1}{2}a) . (x + \frac{1}{2}a)$
(N. II. und §. 323.).

2) Wenn man die kleine Zahl $x - \frac{1}{2}a$
mit ſich ſelbſt multiplicirt $x - \frac{1}{2}a$

$$- \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa$$
$$xx - \frac{1}{2}ax$$

So iſt das Quadrat
der kleinen Zahl $xx - ax + \frac{1}{4}aa = (x - \frac{1}{2}a) . (x - \frac{1}{2}a)$
(N. II. und §. 323.).

3) Addirt man zu dem
Quadrat $xx + ax + \frac{1}{4}aa = (x + \frac{1}{2}a) . (x + \frac{1}{2}a)$
(N. I.)
das Quadrat $xx - ax + \frac{1}{4}aa = (x - \frac{1}{2}a) . (x - \frac{1}{2}a)$
(N. 2.)

So iſt die Summe dieſer
Quadrate $2xx + \frac{1}{2}aa = (x + \frac{1}{2}a).(x + \frac{1}{2}a) + (x - \frac{1}{2}a).(x - \frac{1}{2}a)$
(§. 303.)
$(x + \frac{1}{2}a).(x + \frac{1}{2}a) + (x - \frac{1}{2}a).(x - \frac{1}{2}a) = b$
(N. II.)

Und

Und daher $2xx + \frac{1}{2}aa = b$ (§. 25.)
Div. $2 = 2$ (§ 27.)

So iſt $xx + \frac{1}{4}aa = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}b$ (§. 344.)

Subt. $\frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa$ (§. 27.)

So iſt $xx = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa$ (§. 340.)

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$ (§. 27.)

So iſt $x = \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)}$ (§. 345.)
$\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(b:2 - aa:4)}$

Und daher $x = \sqrt{(b:2 - aa:4)}$ (§. 25.).

Wenn man alſo die Summe der Quadrate durch 2 dividiret, und von dem Quotienten den vierten Teil von dem Quadrat der Differenz der Zahlen ab-, aus dieſem Reſt aber die Quadratwurzel ziehet; So bekomt man die halbe Summe: Addirt man nun dazu die Hälfte von der gegebenen Differenz; So bekomt man die groſe: Und ſubtrahirt man von der halben Summe die halbe Differenz; So bekomt man die kleine Zahl (§. 365.).

§. 373.

Aus dem gegebenen Gehalt einer Mark Silber, und dem gegebenen Gehalt von einer Mark eines geringern Silbers zu beſtimmen, wie viel man von dem lezteren zu dem erſteren nehmen

muß, damit eine Mark einen verlangten mitt- leren Gehalt bekomt (§. 4. 57. 178. und 197. der Probierk.).

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei der gegebene Gehalt des feineren Silbers $=a$, des geringern $=b$, und der verlangte mittlere Gehalt $=c$. Das Gewicht, oder ein Teil einer Mark von dem feinen Silber, das mit dem ſchlechten gemiſcht werden ſoll, ſei $=x$: So iſt, weil der Teil x von 1 Mark abgezogen, das Gewicht des geringeren Silbers gibt, das Gewicht dieſes Silbers $=1-x$. Weil nun der Gehalt des feinern Silbers $=a$, ſein Gewicht aber $=x$ iſt; So iſt der Gehalt von dem Gewicht x des feineren Silbers $=ax$: Und weil der Gehalt des geringeren Silbers $=b$, ſein Gewicht aber $=1-x$ iſt; ſo iſt der Gehalt von dem Gewicht $1-x$ des geringeren Silbers $=b-bx$.

II. Die Gleichung.

Weil man von beiden Silbern ſo viel nehmen ſoll, daß die Gehalte des in ihnen befindlichen Silbers den verlangten Gehalt in einer Mark ausmachen, der Gehalt von dem Gewicht x des feineren Silbers aber $=ax$, und der Gehalt des feinen Silbers von dem Gewicht $1-x$ des geringeren Silbers

$= b - bx$, c aber der verlangte Gehalt iſt: So iſt auch $ax + b - bx = c$.

III. Die Reduction.

1) $ax + b - bx = c$ (N. II.)

Subt. $b = b$ (§. 27.)

So iſt $ax - bx = c - b$ (§. 340.)

Div. $a - b = a - b$ (§. 27.)

So iſt $x = \frac{c-b}{a-b}$ (§. 344.)

2) $1 - x = 1 - x$ (N. I. und §. 27.)

$x = \frac{c-b}{a-b}$ (N. 2.)

Und daher iſt $1 - x = 1 - \frac{c+b}{a-b}$ (§. 304. u. 347)

$1 - \frac{c+b}{a-b} = \frac{a-b-c+b}{a-b}$ (§. 308.)

Und daher iſt $1 - x = \frac{a-b-c+b}{a-b}$ (§. 25.).

$\frac{a-b-c+b}{a-b} = \frac{a-c}{a-b}$ (§. 302.)

Und daher iſt $1 - x = \frac{a-c}{a-b}$ (§. 25.).

Da nun x das Gewicht des feineren Silbers iſt (N. I.); So bekomt man dieſes, wenn man

von dem verlangten Gehalt den Gehalt des geringeren Silbers, von dem Gehalt des feineren Silbers aber den Gehalt des geringeren Silbers abziehet, und dieſen Reſt in ienen dividiret (N. I.): Und da 1—x das Gewicht des geringeren Silbers iſt (N. I.); So bekomt man dieſes, wenn man von dem Gehalt des feineren Silbers den verlangten Gehalt, von dem Gehalt des feineren Silbers aber den Gehalt des geringeren abziehet, und dieſen Reſt in ienen dividiret. Ziehet man alſo eins von dieſen Gewichten von einer Mark ab: So bekomt man das Gewicht des andern Silbers.

Iſt zum Beiſpiel der Gehalt des feinern Silbers a zwölf- des geringern b aber vier Loth, und man ſoll das erſtere dergeſtalt mit dem anderen vermiſchen, daß der Gehalt c ſechs Loth wird; So ziehet man 4 von 6, und auch 4 von 12 ab: Und dividiret den lezteren Reſt in den erſten; So bekomt man das Gewicht $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ Mark von dem feineren Silber, und wenn man, da das Gewicht des geringeren Silbers $=1-x$ (N. I.), dieſes Gewicht von 1 Mark abziehet, $\frac{3}{4}$ Mark vor das Gewicht des geringeren Silbers, man muß nemlich, da die Mark 16 Loth hat, 4 vom feineren und 12 Loth von dem geringeren Silber nehmen, um 1 Mark zu bekommen, die 6 Loth hält.

§. 374.

§. 374.

Da das Gewicht des feineren Silbers $= \frac{c-b}{a-b}$ oder $= (c-b) : (a-b)$ (§. 373 N. 1.), und das Gewicht des geringeren Silbers $= \frac{a-c}{a-b} = (a-c) : (a-b)$ (§. 373. N. 2.): So verhalten ſich auch die Gewichte von den verſchiedenen Silbern, wie $(c-b) : (a-b)$ zu $(a-c) : (a-b)$, und folglich wie $c-b : a-c$ (§. 212.). Wenn man demnach das feinere, und das geringere Silber ſo unter einander miſcht, daß ſie ſich verhalten, wie die Differenz zwiſchen dem verlangten Gehalt und dem Gehalt des geringeren Silbers, zur Differenz zwiſchen dem Gehalt des feineren Silbers und dem verlangten Gehalt: So bekomt man den geſuchten Gehalt, und nach dieſer Verhältnis kan man ſo viele Mark unter einander miſchen, als man will. Wenn man alſo vor die Verhältnis $c-b : a-c$ die Zahlen ſezt, die wir in dem Exempel des vorigen §. angenommen haben: So iſt $6-4 : 12-6 = 2 : 6 = 1 : 3$ (§. 216.), und demnach muß man dieſe Silber ſo unter einander miſchen, daß ſie ſich verhalten, wie 1 : 3, folglich 1 Teil 12 löthiges, und 3 Teile 4 löthiges Silber unter einander miſchen, wenn man 6 löthiges haben will.

§. 375.

Durch die Aufgabe des 373. §. kan man auch finden, wie viel reines Kupfer man unter das feine Silber miſchen muß, um eine Mark vor einen mittleren Preis geben zu können, wenn der Preis des Silbers und des Kupfers gegeben iſt, und es komt dieſe Aufgabe alſo zu ſtehen: Aus dem gegebenen Preis einer Mark Silber, und dem Preiſe einer Mark Kupfer zu beſtimmen, wie viel man von dem lezteren zu dem erſteren nehmen muß, damit man eine Mark um einen verlangten mittleren Preis geben kan. Wir wollen annehmen, es koſte eine Mark Silber 23 Gulden 15 Weispfennig, oder 705 Weispfennige, und eine Mark Kupfer 9 Weispfennige, und dieſe Dinge ſoll man ſo unter einander miſchen, daß man eine Mark vor einen mittleren Preis, und um 20 Gulden, oder 600 Weispfennige geben kan. Wenn nun der Preis des Silbers a, der Preis des Kupfers b, und der mittlere Preis c iſt: So iſt das Gewicht des Silbers $= \frac{c-b}{a-b}$ (§. 373. N. 1.), und das Gewicht des Kupfers $= \frac{a-c}{a-b}$ (§. 373. N. 2.). Sezt man daher vor die Buchſtaben die angenommene Zahlen; So iſt das Gewicht des Silbers $= \frac{600-9}{705-9} = \frac{591}{696}$,

und

und das Gewicht des Kupfers $= \frac{705-600}{705-9} = \frac{105}{696}$.

Und ſolchemnach muß man $\frac{591}{696}$ Mark Silber und $\frac{105}{696}$ Mark Kupfer nehmen, um die Mark vor 20 Gulden geben zu können, und man muß, da die Verhältnis dieſer unter einander zu miſchenden Dinge iſt $c-b : a-c$, oder wenn man davor die Zahlen ſezt $591 : 105$ (§. 374.), das Silber ſo unter das Kupfer miſchen, daß es ſich zum Kupfer verhält, wie $591 : 105$, und nach dieſer Verhältnis kan man viele Mark unter einander miſchen (§. 260.).

§. 376.

Aus 14 löthigem, aus 12 löthigem, aus 8 löthigem, und aus 4 löthigem Silber ſoll man eine Mark 10 löthiges Silber zuſammen ſchmelzen, und daher fragt es ſich, wie viel Silber man von einem ieden zu einer Mark nehmen muß?

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei das Gewicht, oder der Teil einer Mark von dem 14 löthigen Silber $= x$, das Gewicht von dem 12 löthigen $= y$, und das Gewicht von dem

8 löthigen = z: So iſt das Gewicht des 4 löthigen, weil das Gewicht x, y und z von 1 Mark abgezogen, das Gewicht von dem 4 löthigen ſein muß, $= 1-x-y-z$. Weil nun der Gehalt ſchon in Zahlen benent, und von dem erſteren 14, von dem andern 12, und von dem dritten 8 Loth iſt: So iſt der Gehalt von dem Gewicht x des 14 löthigen Silbers $= 14x$, der Gehalt von dem Gewicht y des 12 löthigen Silbers $= 12y$, der Gehalt von dem Gewicht z des 8 löthigen Silbers $= 8z$, und der Gehalt von dem Gewicht $1-x-y-z$ des 4 löthigen Silbers $= 4-4x-4y-4z$.

II. Die Gleichung.

Weil man von dieſen vier Silbern ſo viel nehmen muß, daß die Gehalte des in ihnen befindlichen Silbers dem verlangten Gehalt in einer Mark gleich werden, und der Gehalt des feinen Silbers von dem Gewicht x des 14 löthigen $14x$, von dem Gewicht y des 12 löthigen $12y$, von dem Gewicht z des 8 löthigen $8z$, und von dem Gewicht $1-x-y-z$ von dem 4 löthigen $4-4x-4y-4z$, 10 aber der verlangte Gehalt iſt: So iſt auch $14x+12y+8z+4-4x-4y-4z=10$, oder $10x+8y+4z+4=10$ (§. 302.).

III. Die

III. Die Reduction.

	1) $10x + 8y + 4z + 4 = 10$	(N. II.)
Subt.	$8y = 8y$	(§. 27.)
So iſt	$10x + 4z + 4 = 10 - 8y$	(§. 340.)
Subt.	$4z = 4z$	(§. 27.)
So iſt	$10x + 4 = 10 - 8y - 4z$	(§. 340.)
Subt.	$4 = 4$	(§. 27.)
So iſt	$10x = 6 - 8y - 4z$	(§. 340.)
Div.	$10 = 10$	(§. 27.)
So iſt	$x = \frac{6}{10} - \frac{8y}{10} - \frac{4z}{10}$	(§. 344.).

Oder $x = \frac{3}{5} - \frac{4y}{5} - \frac{2z}{5}$ (§. 307.)

2) Man nehme das Gewicht y und z von dem 12= und dem 8 löthigen Silber ſo gros in Brüchen an, als man will, doch ſo, daß ſie von $\frac{3}{5}$ abgezogen werden können, und mit dem Gewicht von x zuſammen genommen, noch weniger als 1 Mark ausmachen, weil dieſe drei Gewichte von 1 abgezogen werden müſſen, und noch das Gewicht vor das 4 löthige Silber übrig bleiben muß.

Wir wollen annehmen, es ſeie $y = \frac{1}{6}$ und $z = \frac{1}{8}$, und demnach ſo ſchlieſen

$x = \frac{3}{5} - \frac{4y}{5} - \frac{2z}{5}$ (N. 1.)

$y = \frac{1}{6}$ (vermöge unſerer Bedingung)

Und daher iſt $x = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} - \frac{2z}{5}$ (§. 347.)

$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30}$ (§. 142.)

Und daher iſt $x = \frac{3}{5} - \frac{4}{30} - \frac{2z}{5}$ (§. 25.)

$z = \frac{1}{8}$ (vermöge unſerer Bedingung)

Und daher iſt $x = \frac{3}{5} - \frac{4}{30} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8}$ (§. 347.)

$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{40}$ (§. 142.)

Und daher iſt $x = \frac{3}{5} - \frac{4}{30} - \frac{2}{40}$ (§. 25.)

$\frac{3}{5} - \frac{4}{30} - \frac{2}{40} = \frac{500}{1200} = \frac{5}{12}$ (§. 134. u. 136)

Und daher iſt $x = \frac{5}{12}$ (§. 25.)

3) Es iſt alſo das Gewicht x von dem 14 löthigen Silber $= \frac{5}{12}$, das Gewicht y von dem 12 löthigen Silber $= \frac{1}{6}$, und das Gewicht z von dem 8 löthigen Silber $= \frac{1}{8}$ (N. 2.). Addirt man daher dieſe Gewichte zuſammen, und ziehet ſie von 1 ab: So bekomt man das Gewicht von dem 4 löthigen Silber, und es iſt dieſes Gewicht, da $\frac{5}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{51}{72}$ (§. 128. und 134.), $= 1 - \frac{51}{72} = \frac{72}{72} - \frac{51}{72} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$ (§. 128. und 137.).

4) Man muß dieſemnach nehmen von dem 14 löthigen Silber $\frac{5}{12}$, von dem 12 löthigen $\frac{1}{6}$, von dem 8 löthigen $\frac{1}{8}$, und von dem 4 löthigen $\frac{7}{24}$ Mark, die zuſam-

zuſammen eine Mark ausmachen, und hiernach kan man viele Marke unter einander miſchen, wenn man nur von der ganzen Markzahl $\frac{5}{12}$ von dem 14 löthigen, $\frac{1}{6}$ von dem 12 löthigen, $\frac{1}{8}$ von dem 8 löthigen, und $\frac{7}{24}$ von dem 4 löthigen Silber nimt.

§. 377.

Den Unterſcheid zweier Quadrate zu finden, deren Wurzeln nur um Eins unterſchieden ſind.

Auflöſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die Wurzel des einen Quadrats $= n$: So iſt die Wurzel des anderen, weil ſie um 1 gröſer ſein ſoll, als wie die Wurzel des erſten Quadrats, $= n + 1$.

II. Die Gleichung.

Weil n die eine Wurzel iſt; So iſt $n \cdot n = n^2 =$ dem kleinen Quadrat: Und weil $n + 1$ die Wurzel des gröſeren Quadrats iſt; So iſt, wenn man dieſe mit ſich ſelbſt multiplicirt,

$$\begin{array}{r} n + 1 \\ n + 1 \\ \hline + n + 1 \\ n^2 + n \quad \\ \hline n^2 + 2n + 1 \end{array} = \text{dem groſen Quadrat}$$

III. Die

III. Die Reduction.

Ziehet man iezt
von n^2+2n+1
ab n^2

So iſt $2n+1=n+n+1=$ der Differenz der Quadrate.

Und es iſt alſo der Unterſcheid dieſer Quadrate der Summe der Wurzeln gleich.

§. 378.

Den Unterſcheid zweier Würfel zu finden, deren Wurzeln um Eins unterſchieden ſind.

Aufloͤſung.

I. Die Benennung.

Es ſei die eine Wurzel $=n$: So iſt die andere $=n+1$.

II. Die Gleichung.

Weil n die eine Wurzel iſt; So iſt $n.n.n.=n^3=$ dem kleineren Würfel: Und weil $n+1$ die Wurzel des groͤſeren Würfels iſt; So iſt, wenn man dieſe zum Cubo erhebt,

$$\begin{array}{r} n+1 \\ n+1 \\ \hline +n+1 \\ n^2+n \\ \hline n^2+2n+1 \\ n+1 \\ \hline +n^2+2n+1 \\ n^3+2n^2+n \\ \hline n^3+3n^2+3n+1 \end{array}$$

$n^3+3n^2+3n+1=$ dem groͤſeren Würfel.

III. Die

III. Die Reduction.

Ziehet man iezt

von $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

ab n^3

So iſt $3n^2 + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ und $2n^2 + n =$ der Differenz der Würfel.

Es beſtehet alſo der Unterſcheid zweier Würfel, deren Wurzeln um 1 unterſchieden ſind, in dem Quadrat der groſen Wurzel, dem Quadrat der kleineren Wurzel zweimal genommen, und in der kleinen Wurzel.

§. 379.

Zwei Gröſen zu verändern, daß ſie ihre erſte Verhältnis zu einander behalten.

Aufloſung.

Die eine Gröſe ſei a, und die andere ma; So verhalten ſich dieſe Gröſen, wenn a in ma dividirt wird, da man m bekomt (§. 306.), wie 1 zu m: Denn es iſt ſo oft Eins im Quotienten, als der Diviſor in dem Dividendo ſtekt (§. 80.). Die Veränderungen nun, die ſich hiermit vornehmen laſſen, aber ſo, daß die gefundenen Gröſen noch die erſte Verhältnis behalten, ſind dieſe.

1) Man

1) Man multiplicire dieſe Gröſen mit einerlei Gröſe

$$a : ma$$

$$\text{Mult. } b = b \quad (\S.\ 27.)$$

$$\text{So iſt } ab : mab = \frac{mab}{ab} = m\ (\S.305.\ \text{und } 306.)$$

Und daher $ab : mab = 1 : m$ (§. 80. und 215.).

2) Wenn man die Gröſen durch einerlei Gröſe dividirt.

$$a : ma$$

$$\text{Div. } b = b \quad (\S.\ 27.)$$

$$\text{So iſt } \frac{a}{b} : \frac{ma}{b} = \frac{ma}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{mab}{ab} = m \quad (\S.\ 306\ \text{u. } 312.)$$

Und daher $\frac{a}{b} : \frac{ma}{b} = 1 : m$ (§. 80. und 216.).

3) Wenn man zu den Gröſen zwei andere addiret, die ſich eben ſo verhalten, wie iene Gröſen.

$$a : ma$$

$$\text{Add. } c : mc$$

$$\text{So iſt } a + c : ma + mc = \frac{ma + mc}{a + c} = m\ (\S.\ 303.\ \text{u. } 306.)$$

Und daher iſt $a + c : ma + mc = 1 : m$ (§. 80.).

4) Wenn

4) Wenn man von den Gröſen zwei andere abziehet, die ſich eben ſo verhalten, wie iene Gröſen,

$$a : ma$$

$$\text{Subt.}\quad c : mc$$

So iſt $a - c : ma - mc$ (§. 340.)

$ma - mc = (a-c)m$ (§. 79.)

Und daher iſt $a - c ; (a-c)m$ (§. 25.)

$a - c : (a - c)m$ oder $\frac{(a-c)m}{a-c} = m$ (§. 312)

Und daher iſt $a - c : ma - mc = 1 : m$ (§. 80)

§. 380.

Die Glieder in einer geometriſchen Proportion dergeſtalt zu verändern, daß ſie ſich noch proportional bleiben (§. 217.).

Aufloſung.

Man verändere die Glieder der geometriſchen Proportion durch das Verſezzen der Glieder, und durch das Addiren und das Subtrahiren einer Gröſe ꝛc. ꝛc. doch ſo, daß alzeit das Product der äuſeren Glieder, oder der Name der Verhältnis in den beiden Verhältniſſen gleich iſt (§. 211. 228. und 230.). Das erſte Glied in einer geometriſchen Proportion ſei a, das dritte b, und der Name der Verhältnis m; So iſt $a : ma = b : mb$ (§. 240.), und die zu machende Proportionen ſind dieſe.

a; ma

$$a:ma=b:mb$$

1) $a:b=ma:mb$

2) $ma:a=mb:b$

3) $a+ma:a=b+mb:b$

4) $a+ma:ma=b+mb:mb$

5) $ma-a:a=mb-b:b$

$ma-a:ma=mb-b:mb$

6) $a^2:m^2a^2=b^2:m^2b^2$

7) $a:mac=b:mbc$

8) $a:\frac{ma}{c}=b:\frac{mb}{c}$

9) $ac:ma=bc:mb$

10) $\frac{a}{c}:ma=\frac{b}{c}:mb$

11) $ac:mac=b:mb$

12) $\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=b:mb$

13) $ac:mac=bd:mbd$

14) $\frac{a}{c}:\frac{ma}{c}=\frac{b}{d}:\frac{mb}{d}$

15) $ac:mad=bc:mbd$

16) $\frac{a}{c}:\frac{ma}{d}=\frac{b}{c}:\frac{mb}{d}$

$$a:ma=b:mb$$

$$ma:mna=mb:mnb$$

17) a:

17) $a : mna = b : mnb$

$a : m\,a = b : m\,b$

$ma : mna = \frac{b}{n} : b$

18) $a : mna = \frac{b}{n} : mb.$

Sezt man vor die Buchſtaben die Worte, die ſie bedeuten: So bekomt man 18 Lehrſäzze, die alle von einem ſehr groſen Nuzzen ſind.

§. 381.

Die Eigenſchaften einer arithmetiſchen Progreßion zu unterſuchen (§. 262.).

Auflöſung.

Es ſei das erſte Glied in der Progreßion a, und die Differenz der Glieder d: So ſind, wenn man die Differenz ſtets zu dem erſten Glied addirt (§. 263. und 266.), in der zunehmenden Progreßion die Glieder

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$	$a+6d$	$a+7d$.

Wenn man hingegen in der abnehmenden Progreßion von dem erſten Glied den Unterſcheid ſtets abziehet (§. 263. und 266.): So ſind die Glieder

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII
a	$a-d$	$a-2d$	$a-3d$	$a-4d$	$a-5d$	$a-6d$	$a-7d$.

Es iſt hieraus klar

1) Die Differenz iſt bei iedem Glied um einmal weniger, als die Zahl, welche anzeigt, das wie vielſte Glied es ſei.

2) Die Summe der Glieder, die von den äuſerſten gleich weit weg ſtehen, ſind der Summe des erſten und lezten Glieds gleich.

§. 382.

Die Eigenſchaft einer geometriſchen Progreßion zu unterſuchen (§. 262.).

Auflöſung.

Es ſei das erſte Glied in der Progreßion $=a$, und der Exponent $=m$: So ſind, wenn man den Exponenten ſtets mit dem erſten Glied multipliciret (§. 263. und 267.), in der zunehmenden Progreßion die Glieder

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII
a	am	am^2	am^3	am^4	am^5	am^6	am^7

Wenn man hingegen in der abnehmenden Progreßion das erſte Glied ſtets durch den Exponenten dividirt (§. 263. und 267.): So ſind die Glieder

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII
a	$\frac{a}{m}$	$\frac{a}{m^2}$	$\frac{a}{m^3}$	$\frac{a}{m^4}$	$\frac{a}{m^5}$	$\frac{a}{m^6}$	$\frac{a}{m^7}$

Hieraus iſt klar

1) Es iſt in einem ieden Glied der zunehmenden Progreßion die Dignität von dem Namen der Verhältnis mit dem erſten Glied multiplicirt, in der abnehmenden hingegen in dieſes Glied dividirt, der Exponent dieſer Dignität aber iſt um Eins geringer, als die Zahl, welche anzeigt, das wievielſte dieſes Glied ſei.

2) Das Product der Glieder, die von den äuſerſten gleich weit wegſtehen, iſt dem Product des erſten und des lezten Glieds gleich (§. 315.).

Es könten hier verſchiedene Aufgaben in den Progreßionen aufgelöſt werden, weil wir aber wider unſere Abſicht handeln, und ohne Noth zu weitläuftig werden würden: So übergehen wir ſie.

§. 383.

Die Eigenſchaften der Logarithmorum zu unterſuchen (§. 268.).

Auflöſung.

Es ſei das erſte Glied in der geometriſchen Progreßion 1, und der Name der Verhältnis m, die Differenz der arithmetiſchen Progreßion aber d (§. 269.): So iſt

die geometriſche Progreßion	1	m^1	m^2	m^3	m^4	m^5	m^6
die arithmetiſche aber	0	d	2d	3d	4d	5d	6d

Hieraus nun ſind folgende Wahrheiten klar.

1) Die Exponenten der Dignitäten in den Gliedern der geometriſchen Progreßion ſind die Logarithmi der Glieder, und es machen die Exponenten der Dignitäten der Glieder dieſe Progreßion aus 0 1 2 3 4 5 6 (§. 317.).

2) Der Logarithmus von dem Product zweier Gröſen iſt der Summe der Logarithmorum der in einander multiplicirten Zahlen gleich. So iſt der Logarithmus 5d von dem Product m^2 und $m^3 = m^5$ (§. 315.), die Summe von den Logarithmis 2d und 3d der Gröſen m^2 und m^3.

3) Der Logarithmus des Quotienten iſt der Unterſcheid der Logarithmorum der beiden in einander dividirten Zahlen. Der Logarithmus 3d von m^3 iſt zum Exempel die Differenz zwiſchen den Logarithmis 2d und 5d der in einander dividirten Zahlen m^2 und m^5 (§. 316.).

4) Wenn man den Logarithmum einer Gröſe durch 2, 3, 4, u. ſ. w. dividiret: So bekomt man den Logarithmum von der Wurzel der zweiten, dritten, und vierten Dignität und ſo weiter. So iſt 6d der Logarithmus von m^6: Dividiret man nun 6d mit 2; So bekomt man den Logarithmum 3d von m^3, welches die Quadratwurzel von m^6 iſt (§. 318.).

5) Mul-

5) Multiplicirt man den Logarithmum einer Gröſe mit 2, 3, 4, u. ſ. w.; So bekomt man den Logarithmum der andern, dritten und vierten Dignität u. ſ. w. Multiplicirt man nemlich den Logarithmum 3d von m^3 mit 2: So bekomt man den Logarithmum 6d von m^6, welcher die andere Dignität von m^3 iſt (§. 318.).

6) Der Logarithmus der Wurzel, mit dem Exponenten einer Dignität multiplicirt, iſt der Logarithmus dieſer Dignität. Wenn man den Logarithmum d von der Wurzel m der Dignität m^6 mit dem Exponent 6 dieſer Dignität multipliciret: So bekomt man den Logarithmum 6d von m^6.

Die zwoote Abhandlung
von
der Geometrie.

Einleitung.

§. 384.

Die Geometrie kan man in die eigentliche Geometrie, und in die Trigonometrie teilen, welche allein die Erfindung der Linien, und Winkel

durch das Rechnen, in einem Triangel in ſich begreift, worinnen drei Teile gegeben ſind, unter denen wenigſtens eine Seite iſt. Wir wollen ſie in zween Abſchnitten vortragen.

Der erſte Abſchnitt
von
der Geometrie.

§. 385.

Die Geometrie, welche wir ſchon in dem 2. §. erklärt haben, teilt man überhaupt in die niedere, und in die höhere Geometrie. Jene lehret, wie man gerade Linien meſſen, dieſe aber, wie man krumme Linien gerade machen, oder rectificiren ſoll. Nur die erſtere wollen wir hier abhandeln.

§. 386.

Die niedere Geometrie erſtrekt ſich einmal auf die Eigenſchaften der geraden Linien und des Cirkels, und dann auf die Beſchreibung, Teilung und Ausmeſſung der Längen, Breiten und Dikken auf dem Papier und dem Felde. Jene nent man die ſpeculativiſche, oder die theoretiſche, dieſe aber die practiſche Geometrie.

§. 387.

Ueberhaupt kan man die Geometrie in die Rectimetrie, die Eythimetrie, oder die Longimetrie, in die Planimetrie, oder die Epipedometrie, und in die Stereometrie, oder die Solidometrie einteilen. Die erſte handelt von den Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung und Ausmeſſung der Gröſen in den Längen, die andere von den Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung und Ausmeſſung der Gröſen in den Flächen, und die dritte von den Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung und Ausmeſſung der Gröſen in den Körpern. Zu der erſteren gehört auch die Ausmeſſung der Höhen, und der Tiefen, welche man die Altimetrie nent, und das Waſſerwägen, oder das Nivelliren, wodurch man findet, um wie viel ein Punkt dem Mittelpunkt der Erde näher iſt, als ein anderer. Die Einteilung der Flächen auf dem Felde, die in die Planimetrie gehört, nent man ſonſt auch die Geodeſie. Wir wollen vorerſt im erſten Kapittel von der geometriſchen Ausdehnung überhaupt handeln, und dann in noch drei Kapitteln die Rectimetrie, die Planimetrie, und die Stereometrie vortragen.

Das erſte Kapittel
von der
geometriſchen Ausdehnung überhaupt.

§. 388.

Den Raum, welchen die Teile einer Gröſe einnehmen, die ſich auſer und neben einander befinden, aber dergeſtalt zuſammen hängen, daß da, wo ein Teil aufhört, der andere wieder anfängt, nent man eine geometriſche Ausdehnung.

§. 389.

Eine Ausdehnung, die ſich blos allein in die Länge erſtrekt, heiſt eine Linie.

§. 390.

Es hat alſo die Linie, da ſie weder in die Breite, noch in die Dikke ausgedehnt iſt, keine Breite, und auch keine Dikke.

§. 391.

Weil die Linie keine Breite hat: So können auch viele Linien, die man an einander ſezt, keine Ausdehnung ausmachen, die zugleich in die Breite ausgedehnt iſt.

§. 392.

Man muß alſo von dieſer, der mathematiſchen Linie, die man in Gedanken annimt, um deſto richtiger zu ſchlieſen, die natürliche, oder die phyſiſche Linie, die man mit einem Inſtrument, einem Bleiſtift, oder einer Reisfeder macht, und eine Breite, und eine Dikke hat, ſehr wol unterſcheiden, und dabei bemerken, daß, wenn die Linie eine Breite und Dikke hätte, ſie alsdann keine Linie mehr wäre, und die natürliche Linie nur ein ſinnliches Zeichen von der mathematiſchen Linie iſt.

§. 393.

Das äuſerſte eines Dinges, und das, wo eine Sache aufhört, nent man ſeine Gränze, und die Gränze einer Linie, oder das, wo ſie zu beiden Seiten aufhört, nennt man einen Punkt.

§. 394.

Ein Punkt hat alſo keine Ausdehnung, und keine Länge, weil er ſonſt eine Linie wäre, und nicht die Gränze der Linie ſein könte: Eben darum aber, und weil die Linie keine Breite, und auch keine Dikke hat (§. 390.); So hat auch der Punkt keine Breite, und keine Dikke, und alſo gar keine Teile.

§. 395.

Da der Punkt keine Teile (§. 394.), und alſo auch keine Länge hat: So können auch viele an einander geſezte Punkten keine Ausdehnung in die Länge, und folglich keine Linie ausmachen.

§. 396.

Man muß alſo dieſen, den mathematiſchen Punkt, den man in Gedanken annimt, um deſto richtiger zu ſchlieſen, von dem phyſiſchen, den man mit einem Inſtrument macht, ſehr wohl unterſcheiden, und bemerken, daß, wenn er eine Länge, Breite, und Dikke ausmachte, derſelbe alsdann kein Punkt mehr ſein würde, und der Punkt, den man mit einem Bleiſtift, oder einer Reisfeder macht, nur ein ſinnliches Zeichen von dem mathematiſchen Punkt iſt.

§. 397.

Da man in einer Linie Gränzen annehmen kan, wo man will, und die Gränzen der Linien Punkten ſind (§. 393.): So kan man auch in einer Linie Punkten annehmen, wo man will, und ſich dabei vorſtellen, es entſtehe eine Linie, wenn ſich ein einziger mathematiſcher Punkt nach und nach von einem Ort in den anderen beweget, wobei die Linie aus keinen Punkten zuſammen geſezt ſein kan (§. 395.), weil man ſich bei dieſer Bewegung nichts als den

Weg,

Weg, welchen der Punkt genommen hat, und die Entfernung gedenken kan, die zwiſchen den Orten enthalten iſt, wo die Bewegung anfängt, und wo ſie wieder aufhört.

§. 398.

Damit man dem mathematiſchen Punkt, und der mathematiſchen Linie ſo nahe komme, wie möglich, und in der Ausübung der Geometrie in keine Fehler verfalle: So muß man den natürlichen Punkt, und die natürliche Linie auf dem Papier ſo fein machen, als nur möglich iſt, bei der Ausübung auf dem Felde aber kan man eine Linie durch eine Schnur bezeichnen, weil ihre Dikke mit der Gröſe, die man mißt, in keine Betrachtung komt.

§. 399.

Wenn ſich ein Punkt von einem Ort A nach einem andern B, Tab. I. fig. 1, und zwar dergeſtalt beweget, daß er von dem Wege, den er nimt, weder auf die eine, noch auf die andere Seite abweichet; So nent man die Linie AB, die daher entſtehet, eine gerade Linie: Aendert hingegen ein Punkt die Richtung, die er in ſeinem Wege nimt, in iedem Augenblik; So heiſt die Linie AB, Tab. I. fig. 2, die daher erzeugt wird, eine krumme Linie. Eine vermiſchte Linie nent man endlich die Linie AB,

Tab. I.

Tab. I. fig. 3, welche aus geraden und krummen Linien zugleich beſtehet.

§. 400.

Es kan alſo zwiſchen zweien Punkten nur eine gerade Linie ſein, und dieſe iſt alzeit die kůrzte Linie zwiſchen dieſen Punkten.

§. 401.

Es ſind alle gerade Linien, und alle Punkten einander åhnlich: Denn ſie haben einerlei Merkmale (§. 19.).

§. 402.

Ein ieder ausgedehnter Teil von einer geraden Linie iſt eine Linie, und darum iſt auch ein ieder Teil einer geraden Linie, der ganzen Linie åhnlich.

§. 403.

Wenn ſich eine gerade Linie AB, Tab. I. fig. 4, um den unbeweglichen Punkt A ſo lang herum drehet, bis ſie wieder in ihre vorige Lage komt: So entſtehet ein Kreis, oder ein Cirkel. Wenn die Cirkel A und B einerlei feſten Punkt C haben, woraus ſie beſchrieben werden, Tab. I. fig. 5; So werden ſie concentriſche Cirkel genennet: Haben ſie hingegen nicht einerlei feſten Punkt; So heiſen ſie eccentri-

ſche

ſche Cirkel. Cirkel von der Art ſind A, B, Tab. I, fig. 6, und C, D, Tab. I. fig. 7.

§. 404.

Alle Cirkel ſind einander ähnlich, weil ſie einerlei Entſtehung, und alſo einerlei Merkmale haben (§. 19.); und aus einem ieden Punkt kan ein Cirkel beſchrieben werden.

§. 405.

Ein Stük B C, Tab. I. fig. 4, von dem Cirkel nent man einen Bogen, den Punkt A, woraus der Cirkel beſchrieben wird, den Mittelpunkt, oder das Centrum, eine iede gerade Linie A B, die von dem Mittelpunkt in den Cirkel gezogen wird, den Halbmeſſer, den Semidiameter, oder den Radium, und den Kreis B C D E F und B, welchen der Punkt B beſchreibt, den Umfang, die Peripherie, oder die Circumferenz.

§. 406.

Alle Radii eines Cirkels ſind einander gleich, weil der Cirkel durch eine gerade Linie beſchrieben wird (§. 403.).

§. 407.

Eine Linie D C, Tab. I. fig. 4, die von einem Punkt

der

der Peripherie bis zu einem andern in dieſer Periphe= rie gezogen wird, heiſt eine Sehne, eine Chorda, oder eine Subtenſa, und zwar ein Durchmeſſer, oder ein Diameter, wenn die Sehne EB durch den Mittelpunkt A des Cirkels gehet. Die Linie BH, welche den Cirkel E nur in dem Punkt B berührt, und nicht durchſchneidet, wenn ſie verlängert wird, heiſt eine Tangente von dieſer krummen Linie.

§. 408.

Der Diameter iſt noch einmal ſo gros, als wie der Radius (§. 403. und 405.).

§. 409.

Wenn zwei Linien AB und CD, Tab. I. fig. 8, ſtets einerlei Entfernung von einander behalten, wel= che Entfernung durch die kürzeſte Linie, die zwiſchen ihnen enthalten iſt, beſtimt wird; So nent man ſie gleichlaufende Linien, oder Parallellinien: Und wenn zwei Linien AB und CD, Tab. I. fig. 9, nicht parallel ſind, ſondern in einem Punkt zuſammen kom= men; So heiſen ſie zuſammen laufende, im Gegen= teil aber aus einanderlaufende Linien, wenn ſie nach der Gegend betrachtet werden, worinnen ſie im= mer mehr aus einander gehen.

§. 410.

§. 410.

Man gebraucht dieſes Zeichen ⌗, um anzuzeigen, daß zwei Linien parallel ſind. Wenn alſo zwei Linien AB und CD parallel ſind; So ſchreibt man dieſes ſo: AB⌗CD.

§. 411.

Wenn ſich zwei Linien AB und AC, Tab. I. fig. 10, dergeſtalt zu einander neigen, daß ſie in einem Punkt A zuſammen ſtoſen; So nent man die Neigung dieſer Linien einen Winkel. Der Punkt A, in welchem ſich dieſe Linien berühren, heiſt die Spizze, oder der Scheitel des Winkels, und die Linien AB und AC, welche den Winkel ausmachen, die Schenkel des Winkels, oder die *Crura*, der Raum zwiſchen ihnen aber die Oefnung des Winkels.

§. 412.

Man benent einen Winkel, um ihn von andern Dingen zu unterſcheiden, mit den Buchſtaben BAC, oder CAB, Tab. I. fig. 10, und zwar ſo, daß der Buchſtabe an der Spizze in die Mitte komt. Zuweiln bezeichnet man ihn auch nur allein mit dem Buchſtaben A, der an der Spizze ſtehet, und nicht ſelten ſchreibt man in die Oefnung des Winkels einen kleinen Buchſtaben m, n, o, x u. ſ. w.

§. 413.

Wenn zwei Winkel CAB und CAD, Tab. I. fig. 11, einen Schenkel AC mit einander gemein haben, und die beiden anderen Schenkel AB und AD eine gerade Linie DAB machen: So nent man dieſe Winkel **Nebenwinkel**.

§. 414.

Wenn eine gerade Linie AB, Tab. I. fig. 12, eine andere ſolche Linie DC dergeſtalt in dem Punkt B berühret, daß die Nebenwinkel ABC, und ABD zu beiden Seiten gleich ſind: So wird geſagt, daß die Linie AB auf der Linie DC ſenkrecht, lothrecht, oder perpendicular, im Gegenteil aber, daß AC ſchief auf der Linie DB ſtehe, Tab. I. fig. 11, wenn die Nebenwinkel ungleich ſind. Iſt die Lage der Linie DC, Tab. I. fig. 12, ſo beſchaffen, daß die Nebenwinkel, die ein Faden mit einem Gewicht, oder eine Linie, die durch den Mittelpunkt der Erde gehet, mit dieſer Linie macht, einander gleich ſind: So wird dieſe Linie eine Horizontallinie, oder eine wagrechte, bei den Bergleuten aber eine ſölige Linie, oder die Sohle genennet, die Linie hingegen, die der Faden macht, oder eine iede Linie, die durch den Mittelpunkt der Erde gehet, heiſt eine Perpendicularlinie, bei den Bergleuten eine ſeigere Linie, oder die Seigerteufe (§. 43. der oberird. Erdbeſchr.). Zuweiln deu-

tet

tet man durch dieſes Zeichen $\perp$ an, daß eine Linie auf der andern perpendicular ſtehet.

§. 415.

Wenn ein Schenkel AB eines Winkels ABC, Tab. I. fig. 13, auf dem andern Schenkel BC perpendicular ſtehet: So heiſt ein ſolcher Winkel ein rechter Winkel. Iſt ein Winkel BAC, Tab. I. fig. 14, gröſer, als ein rechter Winkel; So heiſt er ein ſtumpfer Winkel: Und iſt ein Winkel BAC, Tab. I. fig. 15, kleiner, als ein rechter Winkel; So wird er ein ſpizzer Winkel genent. Beide heiſen ſchiefe Winkel.

§. 416.

Es macht alſo eine gerade Linie AB, Tab. I. fig. 12, die auf einer andern Linie DC perpendicular ſtehet, zu beiden Seiten zwei rechte Winkel x und y.

§. 417.

Weil die Nebenwinkel auf einer geraden Linie ſtehen: So machen ſie auch ſtets zwei rechte Winkel aus (§. 413. und 416.). Man bezeichnet einen Winkel mit dieſem Zeichen $\angle$.

§. 418.

Eine Ausdehnung, die ſich zugleich in die Länge, und in die Breite erſtrekt, aber keine Dikke hat, heiſt

t geſchnitten und jedes an ſeinen behörigen Ort, ſtatt jenen,

eine Fläche, und einen ſolchen von Linien umſchloſſenen Raum nent man eine Figur. Die Teile von einer Art, welche in ihr einerlei Lage haben, nent man die gleichnamigen Teile. Dergleichen Teile ſind die Linien und Winkel in einer Figur.

§. 419.

Da zwei gerade Linien entweder parallel ſind, oder einen Winkel machen (§. 409. und 411.): So können ſie auch keinen Raum einſchlieſen.

§. 420.

Wenn man in alle Punkten einer Fläche ABCD, Tab. II. fig. 16, nach der Länge und Breite gerade Linien EF und GH ziehen kan, ſo, daß die Punkten dieſer Linien alle in dieſer Fläche liegen: So nent man eine ſolche Fläche eine **Ebene**, eine **ebene Fläche**, oder eine **ebene Oberfläche**. Wenn hingegen kein Teil in einer Fläche eben iſt; So wird die Fläche eine **krumme Fläche**, und zwar eine **erhabene** genent, wenn ſie ſich über die Ebene erhebt, hingegen aber eine **hohle**, wenn ſie ſich unter dieſe Ebene vertieft. Wenn eine iede Linie, die man in einer ebenen Fläche ABCD, Tab. II. fig. 17, ziehet, horizontal iſt (§. 414.): So heiſt ſie eine **horizontale**, bei den Bergleuten aber eine **ſöhlige Fläche**: Und wenn eine Fläche EFGH, Tab. II. fig. 17, dergeſtalt auf einer andern Fläche

ABCD

ABCD aufgerichtet iſt, daß die Linie, welche auf der erſteren in einen Punkt des Durchſchnitts EF perpendicular gezogen wird, mit der Linie, die auf der leztern Fläche in eben dieſen Punkt ſenkrecht auf FE gezogen worden, einen rechten Winkel ausmacht; So nent man iene Fläche eine perpendiculare, oder eine verticale Fläche, bei den Bergleuten aber eine ſeigere Fläche. Iſt hingegen eine Fläche ABCD, Tab. II. fig. 18, dergeſtalt auf einer andern Fläche EFGH aufgerichtet, daß der gedachte Winkel, den ſie mit einander machen, und die Neigung, oder den Neigungswinkel dieſer Flächen ausmacht, ſchief iſt: So heiſt iene Fläche eine ſchiefe Fläche, bei den Bergleuten aber eine donlege Fläche. Parallelflächen ABCD und EFGH, Tab. II. fig. 19, ſind endlich die, welche auf allen Seiten gleich weit von einander abſtehen, zuſammen laufend, oder aus einander laufend ſind hingegen die Flächen, wenn ſie in einer Linie zuſammen kommen, oder nach einer Gegend immer mehr aus einander laufen, dergleichen ſind ABCDE, und FGHI, Tab. II. fig. 20.

§. 421.

Wenn eine Fläche von geraden Linien umſchloſſen iſt: So heiſt ſie eine geradlinigte, und wenn ſie von krummen Linien umſchloſſen wird, eine krumlinigte Figur, eine vermiſchtlinigte Figur aber,

wenn ſie von geraden und krummen Linien zugleich umſchloſſen iſt.

§. 422.

Wenn alle Linien, die eine Fläche einſchlieſen, und ihre Seiten heiſen, gleich ſind: So nent man dieſelbe eine gleichſeitige, hingegen aber eine ungleichſeitige Figur, wenn dieſe Linien ungleich ſind.

§. 423.

Sind die Winkel in einer Figur alle einander gleich: So heiſt ſie eine gleichwinkelichte, iſt dieſes aber nicht, eine ungleichwinkelichte Figur.

§. 424.

Wenn endlich alle Winkel in einer Figur aus rechten Winkeln beſtehen: So wird ſie eine rechtwinkelichte, hingegen aber eine ſchiefwinkelichte Figur genennet, wenn ihre Win kel ſchief ſind (§. 415.).

§. 425.

Wenn eine Figur lauter gleiche Seiten, und gleiche Winkel hat, und alſo gleichſeitig, und gleichwinkelicht zugleich iſt: So wird ſie eine reguläre, oder eine ordentliche, und wenn dieſes nicht iſt, eine irreguläre, oder eine unordentliche Figur genennet.

§. 426.

Wenn drei Seiten eine Fläche einſchlieſen; So heiſt die Figur ein **Dreiek**, oder ein Triangel: Schlieſen vier Seiten eine Figur ein; So heiſt die Figur überhaupt ein **Viereck**, oder eine vierſeitige Figur: Und umſchlieſen mehr, als vier Seiten eine Figur; So nent man dieſelbe ein **Vielek**, ein **Polygon**, oder eine vielſeitige Figur, die nach der Zahl der Seiten ein **Fünfek**, ein Sechsek, ein Siebenek, und ein Achtek heiſt, u. ſ. w.

§. 427.

Wenn in einem Triangel (§. 426.) alle drei Seiten AB, BC und AC, Tab. II. fig. 21, einander gleich ſind; So wird er ein gleichſeitiger Triangel, ein Triangulum *aequilaterum* genennet: Sind in einem Triangel nur zwei Seiten AC und BC, Tab. II. fig. 22, einander gleich; So heiſt er ein gleichſchenkelichter Triangel, ein Triangulum *aequicrurum*: Und iſt von den Seiten AB, BC und AC, Tab. II. fig. 23, keine der andern gleich; So heiſt er ein ungleichſeitiger Triangel, ein Triangulum *ſcalenum*.

§. 428.

Wenn in einem Triangel (§. 426.) ABC, Tab. II. fig. 24. ein rechter Winkel A iſt: So wird er ein

rechtwinkelichter Triangel genent, ein Triangulum rectangulum, und in dieſem heiſen die Linien AC und AB, welche den rechten Winkel einſchlieſen, die Catheti, die Linie BC aber, welche dem rechten Winkel entgegen ſtehet, die Hypothenuſa, bei den Bergleuten heiſt die Hypothenuſe eine donlege Linie, wenn die Linie AC ſeiger, und AB ſöhlig iſt (§. 414.). Wenn in einem Triangel ABC, Tab. II. fig. 25, ein ſtumpfer Winkel A iſt; So heiſt er ein ſtumpfwinkelichter Triangel, ein Triangulum obtusangulum: und wenn in einem Triangel ABC, Tab. II. fig. 21. 22. und 23. lauter ſpizze Winkel ſind; So nent man ihn einen ſpizwinkelichten Triangel, ein Triangulum acutangulum (§. 415.). Man zeigt den Triangel überhaupt durch dieſes Zeichen, nemlich △ an.

§. 429.

Wenn in einem Vierek ABCD, Tab. III. fig. 26, alle Seiten gleich, und alle Winkel rechte Winkel ſind (§. 415. und 426.): So heiſt daſſelbe ein Quadrat. Wenn in einem Vierek ABCD, Tab. III. fig. 27, die einander gegen über ſtehende Seiten AB und DC, und AD und BC gleich, und alle Winkel rechte Winkel ſind: So nent man daſſelbe ein Rechtek, ein Oblongum, oder ein Rectangulum. Sind in einem Vierek ABCD, Tab. III. fig. 28, die

die Seiten gleich, alle Winkel aber ſchief (§. 415.); So heiſt daſſelbe eine Raute, oder ein Rhombus: Und ſind in einem Vierek ABCD, Tab. III. fig. 29, nur die einander gegen über ſtehende Seiten AB und DC, und AD und BC gleich, alle Winkel aber ſchief; So heiſt ein ſolches Vierek eine länglichte Raute, oder ein Rhomboides. Alle Vierekke, worinnen ſtets zwei einander gegen über ſtehende Seiten gleich, und parallel ſind, nent man überhaupt Parallelogramma. Ein iedes anderes Vierek ABCD, Tab. III. fig. 30, heiſt endlich ein Trapezium, und zwar ein Paralleltrapezium, oder ſchlechtweg ein Trapezium, wenn zwei Seiten AB und CD, Tab. III. fig. 31, einander parallel ſind, hingegen ein Trapezoides, wenn dieſes nicht iſt.

§. 430.

Wenn in einem Vielek alle Seiten und Winkel einander gleich ſind (§. 425. und 426.): So heiſt es ein reguläres, und, wenn dieſes nicht iſt, ein irreguläres Vielek, und hieraus iſt leicht zu begreifen, was ein reguläres, oder ein irreguläres Fünf-, und ein reguläres, oder ein irreguläres Sechsek ſei, u. ſ. w. So iſt ABCDE, Tab. III. fig. 32, ein reguläres, ABCDE aber, Tab. III. fig. 33, ein irreguläres Fünfek. Den Winkel ABC in einem regulären Vielek, Tab. III. fig. 32, den zwei

Seiten AB, und BC mit einander machen, nent man den **Polygonwinkel**, oder den **Winkel im Vielek**.

§. 431.

In einer ieden Figur nent man die unterſte Linie AB, Tab. III. fig. 32, die **Grundlinie**, oder die **Baſis**, die Spizze D des Winkels EDC, welche der Grundlinie AB entgegen ſtehet, die **Spizze der Figur**, und die Linie DF, welche aus der Spizze D auf die Grundlinie AB ſenkrecht gezogen wird, die **Höhe der Figur**.

§. 432.

Da man eine Figur von verſchiedenen Seiten betrachten kan: So kan man auch eine iede Seite zur Grundlinie annehmen, alsdann aber verändert ſich auch ihre Höhe.

§. 433.

Wenn man in einer Figur von einer Spizze eines Winkels bis zu der gegen über ſtehenden Spizze eines andern Winkels eine gerade Linie EB ziehet, Tab. III. fig. 33: So heiſt dieſe Linie eine **Diagonallinie**.

§. 434.

Eine iede geradlinigte Figur, die mehr, als drei Seiten hat, kan durch Diagonallinien in zwei Tri-

angel

angel weniger geteilt werden, als die Zahl der Seiten ausmacht. Und ein iedes Vielek, ia eine iede Figur, die mehr, als drei Seiten hat, kan aus einem innerhalb derſelben angenommenen Punkt, in ſo viele Triangel zerteilt werden, als ſie Seiten hat.

§. 435.

Wenn ſich alle Spizzen von den Winkeln einer Figur in einer Cirkellinie endigen: So ſagt man, daß dieſe Figur in einem Cirkel beſchrieben ſei.

§. 436.

Den Raum ACBEHGDA, Tab. III. fig. 34, welchen eine Cirkellinie einſchlieſt (§. 403.), nent man eine Cirkelfläche. Ein Stück ACB von der Cirkelfläche, das von einer Sehne AB, und einem Bogen ACB eingeſchloſſen wird (§. 405. und 407.), nent man einen Abſchnitt, oder ein Segmentum, und zwar einen halben Cirkel DACBEFD, wenn die Sehne DE ein Diameter iſt, ein Stük DFGD von der Cirkelfläche hingegen, das von zweien Halbmeſſern FG und FD, und einem Bogen DG umſchloſſen iſt, einen Ausſchnitt, oder einen Sector, und zwar einen Quadrant EFHE, wenn der Bogen EH den vierten Teil des Cirkels ausmacht. Den Raum, welcher zwiſchen zweien concentriſchen Cirkeln enthalten iſt, nent man einen Ring, den Raum

BEFC aber, Tab. V. fig. 69, welcher von den Radiis AB und AC von dem Ring abgeſchnitten wird, einen Ausſchnitt eines Ringes.

§. 437.

Ein Winkel, der zwiſchen mehr, als zwei Linien, wovon ſtets zwei in einer Ebene liegen, an dem Punkt, wo dieſe Linien zuſammen kommen, enthalten iſt, und alſo von etlichen Flächen, die in einem Punkt zuſammen kommen, eingeſchloſſen wird, heiſt ein körperlicher Winkel, ein Angulus ſolidus. Ein dergleichen Winkel iſt zwiſchen AB, AC, und AD enthalten, Tab. III. fig. 35.

§. 438.

Eine Ausdehnung, die ſich zugleich in die Länge, die Breite, und die Dikke erſtrekt, und einen Raum einnimt, der von Flächen eingeſchloſſen wird, heiſt ein mathematiſcher Körper.

§. 439.

Wenn die Flächen, die einen Körper einſchlieſen, gerade ſind: So heiſt er ein geradlinigter, und wenn ſie krum ſind, ein krumlinigter Körper, der hingegen, welcher von geraden und krummen Flächen zugleich umſchloſſen iſt, ein vermiſchtlinigter Körper.

§. 440.

§. 440.

Sind alle parallele Durchſchnitte mit der unterſten Fläche, der Grundfläche, in einem Körper einander gleich: So wird er ein gleichdikker, hingegen aber ein ſpizzer Körper genent, wenn die Flächen, die auf allen Seiten an die Grundfläche anſchlieſen, ſich in einem Punkt über dieſer Grundfläche endigen, und iede aus der Spizze in die Peripherie der Grundfläche gezogene gerade Linie, in der Seitenfläche liegt.

§. 441.

Wenn ein Körper von gleichen und regulären Flächen von einerlei Art, die in den Ekken gleiche körperliche Winkel machen (§. 437.), eingeſchloſſen wird: So heiſt er ein regulärer, oder ein ordentlicher, und wenn dieſes nicht iſt, ein irregulärer Körper. Im engern Verſtand nent man auch einen irregulären Körper, einen ſolchen, deſſen Gröſe der Ausdehnung man nicht durch gemeſſene Linie beſtimmen kan.

§. 442.

Ein gleichdikker Körper, der unten und oben zwiſchen zwei ebenen parallelen Flächen, die gleich, und Flächen von einerlei Art ſind, um und um aber zwiſchen ſo vielen Parallelogrammis, die ſeine Seitenflächen

flächen heiſen, enthalten iſt, als die Grundflächen Seiten haben, wird ein Prisma, genent. Man unterſcheidet das Prisma nach der Zahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, und es heiſt ein Prisma ABCDE und F, Tab. III. fig. 36, deſſen Grundfläche ABC ein Dreiek iſt, ein dreiekkiges Prisma, ein Prisma ABCDEF und G, Tab. III. fig. 37, deſſen Grundfläche ABC aus einem Parallelogrammo beſtehet, ein Parallelopipedum, ein Prisma ABCDEFGH und I, Tab. III. fig. 38, deſſen Grundfläche ABCD ein Fünfek iſt, ein fünfekkigtes Prisma, und ſo ein ſechsekkigtes Prisma u. ſ. w. Stehen bei allen dieſen gleichdikken Körpern die Seitenflächen auf den Grundflächen ſenkrecht (§. 420.): So heiſt das Prisma ein ſenkrechtes, und wenn ſie ſchief darauf ſtehen, das Prisma ABCDEF, Tab. III. fig. 39. ein ſchiefes Prisma. Beſtehen die Grundflächen eines ſenkrechten Parallelopipedi aus Quadraten, oder Rechtekken; So heiſen ſie rechtwinkelichte Prismata, beſonders heiſt das ein Parallelopipedum, welches von lauter Rectangulis eingeſchloſſen iſt. Eine iede Perpendicularlinie, die man aus einem Punkt in der Fläche, die der Grundfläche entgegen ſtehet, auf die Ebene fält, worinnen die Grundfläche liegt, heiſt die Höhe des Prismatis.

§. 443.

§. 443.

Ein Prisma entſtehet alſo, wenn ſich eine ebene geradlinigte Fläche an einer ſenkrechten, oder ſchiefen Linie parallel herunter beweget, und zwar ſo, daß iede von einer Peripherie der Grundfläche bis zu der Peripherie der andern Grundfläche gezogene gerade Linie, in der Seitenfläche liegt.

§. 444.

Ein gleich dikker Körper ABCD, Tab. III. fig. 40, welcher oben und unten von zwei gleichen parallelen Cirkelflächen AB und DC, zur Seite aber von einem gekrümten Parallelogrammo umſchloſſen iſt, heiſt ein Cylinder, oder eine Walze, und zwar eine ſenkrechte ABCD, Tab. III. fig. 40, oder eine ſchiefe, ABCD, Tab. III. fig. 41, wenn die Seitenfläche auf der Grundfläche perpendicular, oder ſchief ſtehet. Die Höhe des Cylinders iſt eben die Höhe, die wir §. 442. bei dem Prisma erklärt haben, die Linie CB, ſeine Seite, und die Linie, die von einem Mittelpunkt der Grundfläche bis zu dem Mittelpunkt der andern Grundfläche gezogen wird, ſeine Axe.

§. 445.

Die Walze entſtehet eben ſo, wie das Prisma, aber durch die Bewegung einer Cirkelfläche.

§. 446.

Ein ſpizzer Körper (§. 440.), welcher eine ebene geradlinigte Figur zur Grundfläche, ſo viele Triangel

aber

aber zu ſeinen Seitenflächen hat, als die Zahl der Seiten der Grundfläche iſt, heiſt eine Pyramide. Nach der Zahl der Seiten der Grundfläche, oder nach der Zahl der Seitenflächen erhält die Pyramide verſchiedene Namen, und es heiſt eine Pyramide ABCD, Tab. IIII. fig. 42, welche einen Triangel ABC zur Grundfläche hat, eine dreiekkigte, eine Pyramide ABCD, Tab. IIII. fig. 43, welche ein Vierek zur Grundfläche hat, eine vierekkigte, und eine Pyramide ABCDE, Tab. IIII. fig. 44, welche ein Fünfek zur Grundfläche hat, eine fünfekkigte Pyramide, und ſo weiter. Wird eine Pyramide ABCD, Tab. IIII. fig. 45, in der Fläche EGF mit der Grundfläche ABC parallel durchſchnitten: So heiſt die Pyramide ABCGEF eine abgeſchnittene, eine abgekürzte, oder eine abgeſtuzte Pyramide. Wenn die gerade Linie, die man aus der Spizze der Pyramide auf den Mittelpunkt der Grundfläche ziehet, perpendicular iſt; So heiſt die Pyramide ABCD, Tab. IIII. fig. 42, eine ſenkrechte: Und wenn die Perpendicularlinie aus der Spizze der Pyramide auſerhalb dem Mittelpunkt der Grundfläche, ia ſelbſt auſerhalb der Grundfläche fället: So heiſt die Pyramide ABCD, Tab. IIII. fig. 46, eine ſchiefe Pyramide, und zwar eine abgekurzte ſchiefe ABCDEF, Tab. IIII. fig. 47, wenn ſie parallel mit der Grundfläche durchſchnitten iſt. Man nent dieſe Perpendicularlinie,

nie, welche aus der Spizze der Pyramide perpendicular auf die Ebene der Grundfläche gezogen wird, die **Höhe der Pyramide.**

§. 447.

Ein ſpizzer Körper (§. 440.) ABC, Tab. IIII. fig. 48, welcher eine Cirkelfläche zur Grundfläche hat (§. 436.), wird ein Kegel, oder ein Conus genennet. Wird ein Kegel ABC, Tab. IIII. fig. 49, in der Fläche DE mit der Grundfläche AB parallel durchſchnitten: So heiſt der Kegel ABDE ein abgeſchnittener, ein abgekürzter, oder ein abgeſtuzter Kegel, ein Conus truncatus. Die gerade Linie, welche man aus der Spizze des Kegels auf den Mittelpunkt der Grundfläche fält, heiſt die Axe des Kegels, die gerade Linie hingegen, die man aus der Spizze des Kegels in einen Punkt in der Peripherie der Grundfläche ziehet, die Seite des Kegels. Fält die Axe auf den Mittelpunkt der Grundfläche lothrecht; So heiſt der Kegel ABC, Tab. IIII. fig. 48, ein ſenkrechter, wenn ſie hingegen ſchief auf dieſen Mittelpunkt fält, ſo heiſt der Kegel, ABC Tab. IIII. fig. 50, ein ſchiefer Kegel, und zwar ein abgekürzter ſchiefer ABCD, Tab. IIII. fig. 51, wenn er parallel mit der Grundfläche durchſchnitten iſt. Der ſenkrechte Kegel heiſt auch ein gleichſeitiger, und der ſchiefe ein ungleichſeitiger Kegel.

§. 448.

§. 448.

Wenn ſich ein rechtwinkelichter Triangel CBD um ſeine Höhe CD bewegt, und zwar ſo lang, bis er wieder in ſeine vorige Lage komt: So entſtehet ein ſenkrechter Kegel.

§. 449.

Der Durchſchnitt EGF, Tab. IIII. fig. 48, welcher der Grundfläche AB parallel iſt, iſt ein Cirkel, weil die Linie, welche durch den Punkt E ſenkrecht auf die Axe CD gezogen wird, einen Cirkel beſchreibt (§. 403. 420. 436.).

§. 450.

Ein regulärer Körper (§. 441.) ABCD, Tab. IIII. fig. 52, welcher von vier gleichſeitigen Triangeln umſchloſſen wird, heiſt ein Tetraedrum, ein regulärer Körper ABCD, Tab. IIII. fig. 53, der von acht ſolchen Triangeln umſchloſſen wird, ein Octaedrum, und ein regulärer Körper ABCDEFA, Tab. IIII. fig. 54, der von zwanzig ſolchen Triangeln umſchloſſen wird, ein Icoſaedrum, ein regulärer Körper ABCDEFAG, Tab. IIII. fig. 55, der von ſechs Quadraten umſchloſſen wird, heiſt ein Hexaedrum, ein Würfel, oder ein Cubus, und ein regulärer Körper ABCDEFGHIKA, Tab. IIII. fig. 56, der von zwölf regulären Fünfekken umſchloſſen iſt, ein Dodecaedrum, und dieſes ſind alle die regulären Körper.

§. 451.

Wenn ein Körper entſtehet, in dem ſich ein halber Cirkel ADBC, Tab. IIII. fig. 57, um ſeinen Durchmeſſer AC herum bewegt, und zwar ſo lang bis er wieder in ſeine erſte Stellung komt, oder alle Punkten in der Fläche, die einen Körper umſchlieſen, von dem Mittelpunkt des Körpers gleich weit weg ſind: So heiſt dieſer Körper eine Kugel. Der Durchmeſſer AC der Kugel, der von einem Punkt der Peripherie, bis zu einem gegen über ſtehenden, durch den Mittelpunkt gezogen wird, heiſt die Axe, die Punkten A und C die Pole, und die Fläche, welche die Kugel umgibt, die Kugelfläche. Bewegt ſich der halbe Cirkel ACB, Tab. IIII. fig. 58, nicht in dem ganzen Kreis herum, ſondern nur bis in ADB: So heiſt der Körper ACBDA ein Ausſchnitt von einer Kugel. Wenn ſich ein Quadrät ABC, Tab. IIII. fig. 59, um den Radium AC, und zwar ſo lange bewegt, bis er wieder in ſeine vorige Stellung komt; So beſchreibt er eine halbe Kugel ABCDA, oder ein Hemiſpherium: Bewegt ſich der Quadrant ABC, Tab. IIII. fig. 60, nicht im ganzen Kreis herum, ſondern nur bis in ADC; So heiſt der Körper ABDCAD ein Ausſchnitt von einer halben Kugel. Ein Stük ADGFA, oder FGDBCEF von einer Kugel, das von einer ebenen Fläche abgeſchnitten wird, die nicht durch den Mittelpunkt ge-

het, heiſt ein Abſchnitt von einer Kugel. Das Stük FGDBE einer Kugel, welches zwiſchen zweien parallelen Cirkeln FD und EB enthalten iſt, heiſt eine Zona, oder ein Gürtel.

§. 452.

Alle Kugeln ſind einander ähnlich, weil ſie auf einerlei Art erzeugt werden, und alſo einerlei Merkmale haben (§. 19. und 404.).

§. 453.

Alle Radii einer Kugel, die aus der Peripherie in den Mittelpunkt gezogen werden, ſind einander gleich (§. 406.), und alle Axen einer Kugel ſind auch einander gleich (§. 408.).

§. 454.

Ein ieder Durchſchnitt DGF einer Kugel, Tab. IIII. fig. 57, welcher der Axe EB gleichlaufend iſt, iſt eine Cirkelfläche (§. 420. und 436.). Denn die Linie, welche aus dem Punkt D ſenkrecht auf die Axe gezogen wird, beſchreibt bei der Beſchreibung der Kugel einen Cirkel (§. 403.).

Das zweete Kapittel
von
den Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung, und Ausmeſſung der Gröſen in den Längen.

§. 455.

Wenn man zwei Ausdehnungen auf einander legt, und es fallen nicht nur die Gränzen der einen auf die Gränzen der andern Ausdehnung, ſondern auch die Teile, die zwiſchen den Gränzen der erſteren liegen, auf die Teile, die zwiſchen den Gränzen der andern enthalten ſind: So ſagt man von dieſen Ausdehnungen, daß ſie einander dekken.

§. 456.

Gerade Linien, die einander dekken, ſind ſich gleich.

Beweis.

Gerade Linien, die einander dekken, fallen in ihren Gränzen, und den zwiſchen ihnen enthaltenen Teilen auf einander (§. 455.). Sie haben alſo einerlei Ausdehnung, und folglich einerlei Gröſe, und in dieſem Betracht können ſie vor einander geſezt werden (§. 21.), eben daher aber ſind auch gerade Linien, die einander dekken, einander gleich.

§. 457.

Gerade Linien, die einander gleich ſind, dekken einander.

Beweis.

Sind gerade Linien einander gleich: So haben ſie einerlei Ausdehnung, und folglich einerlei Gröſe (§. 21.). Wenn man daher die eine auf die andere legt: So müſſen ſie einander dekken (§. 455.), und daher müſſen auch Linien, die einander gleich ſind, einander dekken.

§. 458.

Weil alle Cirkellinien einander ähnlich ſind (§. 404.): So ſind auch Cirkel, die einander dekken, einander gleich, und alle Cirkel, die einander gleich ſind, dekken einander.

§. 459.

Durch zwei Punkte eine gerade Linie zu ziehen.

Erſte Auflöſung.

Wenn man eine gerade Linie AB, Tab. I. fig. 1, auf dem Papier ziehen ſoll: So lege man an die beiden Punkten A und B ein Lineal, das nach einer geraden Linie abgerichtet worden, und ziehe alsdann an dem Lineal her, ohne daß man zur Linken, oder zur Rechten abweichet, von einem Punkt bis zu dem

andern

andern mit einer mit Tuſche gefülten Reisfeder, oder einem Bleiſtift eine gerade Linie, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Andere Auflöſung.

Soll man auf dem Felde eine gerade Linie ziehen: So ſtekke man in die beiden Punkten A und B, Tab. V. fig. 61, in die ſie gezogen werden ſoll, Stäbe AC und BD, und ziehe von dem einen bis zu dem andern eine Schnur, nach welcher man ein Gräbgen in die Erde machen kan (§. 398.). Geſchiehet es hierbei, daß die Linie AB ſehr lang iſt, und man zwiſchen den erſten und andern Stab einen dritten EF ſtekken ſoll, aber ſo, daß alle drei Stäbe AC, EF und BD in einer geraden Linie ſtehen: So ſtelle man ſich vor den erſten Stab AC, und laſſe den Stab EF, der zwiſchen ihn und den andern Stab BD zu ſtehen kommen ſoll, ſo lang zur Linken und Rechten rükken, bis man, wenn man mit dem Auge G nach dem andern Stab BD ſiehet, dieſen Stab vor dem dazwiſchen geſtekten Stab EF nicht ſehen kan, alle Stäbe ſtekke man inzwiſchen lothrecht (§. 414.), weil ſonſt die Punkten, an den man wegſiehet, nicht in die Grundfläche der Stäbe fallen, folglich die abgeſtekte Linie AEB nicht gerade iſt. So nun kan man zwiſchen zwei Stäbe ſehr viele andere ſtekken, wenn man ſtets den dazwiſchen geſtekten Stab als den erſten annimt.

§. 460.

Mit einer geraden Linie AB, Tab. I. fig. 4, einen Cirkel zu beſchreiben.

Erſte Auflöſung.

Auf dem Papier nehme man einen Cirkel mit einer Reis- oder Bleifeder, und ſezze den einen Fus in A, den andern mit der Feder aber thue man auf bis in B, und fahre damit im Kreis herum: So iſt das Verlangte geſchehen.

Andere Auflöſung.

Soll man auf dem Felde einen Cirkel beſchreiben: So ſchlage man in den Punkt A, Tab. V. fig. 62, einen Pfahl, an dieſen binde man eine Schnur, doch ſo, daß ſie ſich um den Stab herum drehen kan, alsdann aber ziehe man die Schnur bis in den Punkt B, in dieſem Punkt nun binde man an dieſe Schnur einen ſpizzen Pfahl, und fahre mit dieſem im Kreiſe BCDEB herum, ſo daß man ein Gräbgen in die Erde macht; So iſt geſchehen, was man verlangt hat.

§. 461.

Weil eine iede gerade Linie AB, Tab. V. fig. 63, in zwei gleiche Teile AC und CB geteilt, und dieſe Linie als der Diameter, CB aber als der Radius angeſehen werden kan (§. 405. und 407.): So kan man auch über eine iede gerade Linie AB einen

halben

halben Cirkel beſchreiben, wenn man AB in C in zwei gleiche Teile teilet, und von B bis in A einen halben Cirkel BDAB beſchreibet.

§. 462.

Eine ausgedehnte Gröſe, wornach man die Gröſe der Ausdehnung in einer ieden andern ausgedehnten Gröſe beſtimmen, und alſo anzeigen kan, wie vielmal iene in dieſer enthalten iſt, heiſt ein **Maas**, oder ein **Maasſtab**. **Eine ausgedehnte Gröſe meſſen** iſt alſo nichts anders, als beſtimmen, wie oft das Maas in einer gegebenen Gröſe enthalten iſt.

§. 463.

Das Maas, und die Teile der ausgedehnten Gröſe, die man meſſen ſoll, müſſen Dinge von einerlei Art ſein: Denn das Maas etlichemal genommen, muß die zu meſſende Gröſe ausmachen (§. 80.), und nur Dinge von einerlei Art machen eine Gröſe aus (§. 15.).

§. 464.

Weil ein ieder ausgedehnter Teil einer geraden Linie eine gerade Linie iſt (§. 402.), und das Maas, und die Teile der ausgedehnten Gröſe Dinge von einerlei Art ſein müſſen: So muß man auch zu dem Maas der geraden Linien eine gerade Linie annehmen. Es ſtehet alſo in unſerer Willkühr, wie gros man

dieſes Maas annehmen will. Da man inzwiſchen ſchon in allen Ländern eine gewiſſe Länge zum Maasſtab der geraden Linien angenommen hat, und die Menſchen einmal daran gewöhnt ſind: So kan man auch nunmehr von dem Maas eines Landes nicht abgehen.

§. 465.

Wenn man unterſuchet, wie oft das Maas der Linie in der ganzen Linie, die man meſſen ſoll, enthalten iſt: So iſt die gerade Linie gemeſſen.

§. 466.

Die gerade Linie, welche man zum Maasſtab aller Längen angenommen hat, nent man eine Ruthe. Man teilt ſie, um alles deſto genauer meſſen, und rechnen zu können, in zehn ſtets kleinere, aber gleiche Teile, und eben darum nent man ſie eine Decimalruthe, oder eine geometriſche Ruthe, ihre Teilung aber iſt dieſe. Man teilt die Ruthe in zehn gleiche Teile, und ein ſolcher Teil heiſt ein Schuh, oder ein Fus, den Schuh teilt man in zehn gleiche Teile, und ein ſolcher Teil heiſt ein Zoll, den Zoll teilt man in zehn gleiche Teile, und ein ſolcher Teil heiſt ein Gran, oder eine Linie, die Linie teilt man in zehn gleiche Teile, und ein ſolcher Teil heiſt ein Scrupel, den Scrupel teilt man endlich wieder in zehn gleiche Teile, und ein ſolcher Teil heiſt ein zweiter Scrupel u. ſ. w., und dieſes iſt das ſo genannte Decimalmaas.

Es hat alſo eine Ruthe 10 Schuh, oder 100 Zoll, oder 1000 Linien, oder 10000 Scrupel, oder 100000 zweite Scrupel u. ſ. w. (§. 104.).

§. 467.

Die Ruthe bezeichnet man mit 0, die Schuhe mit I, die Zoll mit II, die Linien mit III, die Scrupel mit IIII, und die zweite Scrupel mit V. Man ſchreibt alſo 22 Ruthen, 3 Schuh, 5 Zoll, 7 Linien, 9 Scrupel, und 8 zweite Scrupel ſo: $\overset{0}{22}\ \overset{I}{3}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{7}\ \overset{IIII}{9}\ \overset{V}{8}$, und fült, wenn zwiſchen zwei Kennziffern eine Zahl fehlt, die Stelle mit einer Null aus (§. 156. u. 162.).

§. 468.

In dem gemeinen Leben teilt man die Ruthe bald in 12, bald in 15, und bald in 16 Schuhe, doch iſt die Teilung in 12 und 16 Schuh die gewöhnlichſte. Einen Schuh teilt man durchgehends in 12 Zoll, einen Zoll in 12 Linien, und die Linie bei uns in 12, bei den Franzoſen aber in 10 Scrupel ein. Die Ruthe, die alſo in 12 Schuhe geteilt wird, hat 12 Schuhe, oder 144 Zoll, oder 1728 Linien, oder 20736 Scrupel, die Ruthe aber, die in 16 Schuhe geteilet wird, 16 Schuh, oder 192 Zoll, oder 2304 Linien, oder 27648 Scrupel (§. 104), und dieſes iſt das gemeine Maas. Dieſe Teilung, die ſo viele Beſchwerlichkeit im Rechnen macht, gebraucht man

bei der Ausübung der Geometrie heut zu Tage nicht mehr, ſondern man teilt an dem Orte, wo man meſſen ſoll, die Ruthe in Decimalmaas ein (§. 466).

§. 469.

Weil alle gerade Linien eine Verhältnis zu einander haben, und alſo zwiſchen zwei verſchiedenen Maſſen eine gewiſſe Verhältnis iſt (§. 204.): So muß ſich auch ſo wie ſich ein Maas, womit gemeſſen worden, zu einem andern Maas verhält, eine nach dem erſten Maas gemeſſene Länge zu der Länge verhalten, die heraus gekommen wäre, wenn man nach dem andern Maas gemeſſen hätte (§. 217.), und daher kan man durch die Regel Detri leicht finden, was vor eine Gröſe, eine Länge, die nach dem geometriſchen, oder dem gemeinen Maas gemeſſen worden, in dem gemeinen, oder in dem geometriſchen Maas ausmacht (§. 244.), man darf nemlich nur ſagen, wie ſich verhält das Maas, womit gemeſſen worden, zu dem Maas, womit man iezt meſſen ſoll, ſo verhält ſich auch die nach dem erſten Maas gemeſſene Gröſe zu der vierten geometriſchen Proportionalzahl (§.244.). Soll man zum Beiſpiel $\overset{0}{3}\ \overset{I}{4}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{6}$ Decimalmaas in gemeines Maas verwandeln, deſſen Ruthe in 12 Schuhe geteilet iſt; So verfahre man ſo: Man laſſe nemlich die Ruthen, weil ſie im Decimal- und gemeinen Maas gleich gros ſind, in der Rechnung weg

(§.468.),

(§. 468.), und ſage, weil Linien in der gemeſſenen Långe ſind, wie ſich verhalten im Decimalmaas 1000 Linien zu 1728 Linien im gemeinen Maas; So verhalten ſich auch $\overset{I}{4}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{6}$ Decimalmaas zu den Linien im gemeinen zwölfteiligen Maas, und dieſe Rechnung iſt die folgende

$$1000 - 1728 - 456$$

```
        456
     ------
      10368
      8640
     6912
   --------
     787968|787
     xxxøøø
```

Verwandelt man nun die gefundenen 787 Linien durch die Diviſion mit 12 in Zoll und Schuhe (§. 108.): So bekomt man $\overset{I}{5}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{7}$, und noch $\frac{968}{1000}$ Linien, die man, als eine Kleinigkeit, weglaſſen, oder in Scrupel verwandeln kan (§. 153), und es machen aſo $\overset{0}{3}\ \overset{I}{4}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{6}$ Decimalmaas im 12ſchůhigen gemeinen Maas $\overset{0}{3}\ \overset{I}{5}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{7}$ aus. Wenn man im Gegenteil $\overset{0}{5}\ \overset{I}{7}\ \overset{II}{8}$ gemeines Maas, wovon die Ruthe 12 Schuh hat, in Decimalmaas verwandeln ſoll: So laſſe man, wie vorhin, die Ruthen weg, und verwandele $\overset{I}{7}\ \overset{II}{8}$ in Dinge von der kleinern Art, und alſo in 92 Zoll (§. 104.), iezt aber ſage man, weil Zolle bei der gemeſſenen Långe ſind, wie ſich verhalten 144 Zolle im gemei-

gemeinen Maas zu 100 Zollen im Decimalmaas, ſo verhalten ſich 92 Zoll gemeines zwölfteiliges Maas zu den Zollen im Decimalmaas, da dann die Rechnung dieſe iſt.

144 — 100 — 92
100
――――
9200

(1
~~1~~(2
~~34~~(8
~~3888~~ | $6^{I}\,3^{II}$
~~9200~~ |
~~1444~~ |
~~14~~

Es geben alſo, wenn man den Bruch nicht in Dinge von der kleineren Art verwandeln will (§. 153.), $7^{I}\,8^{II}$ gemeines 12ſchühiges Maas $6^{I}\,3^{II}$ Decimalmaas, und es machen demnach $5^{0}\,7^{I}\,8^{II}$ gemeines zwölfſchühiges Maas $5^{0}\,6^{I}\,3^{II}$ Decimalmaas.

§. 470.

Weil das Maas der Längen willkührlich iſt (§. 464.): So iſt es auch geſchehen, daß man nicht in allen Landen, ia oft nicht einmal in allen Orten eines Landes, einerlei Länge zu dem Schuh in dem gemeinen Maas angenommen hat, eben daher aber, und von der verſchiedenen Einteilung der Ruthe (§. 268), komt die Verſchiedenheit des gemeinen Schuhes, und der Ruthe der Länder. Teilt man zum

zum Beiſpiel, um die Verhältnis der verſchiedenen Schuhen deſto genauer zu finden, den pariſer Schuh in 1440 Teile: So hat von dieſen Teilen

der londiſche	1350
der rheinländiſche	$1391\frac{3}{10}$
der däniſche	$1403\frac{2}{5}$
der ſchwediſche	1320
der venetianiſche	1540
der nürnberger	$1346\frac{3}{4}$
der conſtantinopolitaniſche	3140
der ſtrasburger	$1282\frac{3}{4}$
der bononiſche	$1682\frac{2}{5}$
der danziger	$1271\frac{1}{2}$
und der halliſche, welcher dem römiſchen gleich iſt,	1320

Weil die Teile zweier Schuhe ſtets eine Verhältnis ausmachen: So kan man auch hier die nach dem einen Maas gemeſſene Gröſe leicht in eine Gröſe von einem andern Maas verwandeln, wenn man nur ſagt, wie ſich die Teile des Schuhes, womit man meſſen ſollen, zu den Teilen des Schuhes, womit man gemeſſen hat, verhalten, eben ſo verhält ſich auch die nach dem andern Maas gemeſſene Länge zu der Länge, die herausgekommen wäre, wenn man nach dem erſten Maas gemeſſen hätte. Wir wollen annehmen, man habe nach dem halliſchen Maas 232 Schuhe gemeſſen, und man wolte wiſſen, wie viel

viel ſolche in dem londiſchen Maas machten: So rechnet man ſo.

```
                                1350 — 1320 — 232
                                              1320
                                              ----
   (1                                         4640
  1 3                                         696
  3 9(1                                       232
1 4 0 4                 (5     (2            ------
3 0 6 2(4 0 | 226 1140/1350 | 228/270 | 114/135       306240
1 3 8 0 0 0 |
  1 3 8 8
    1 3
```

Es machen alſo 232 halliſche $226\frac{114}{135}$ londiſche Schuhe aus.

§. 471.

Man gebraucht zu dem Meſſen der geraden Linien auf dem Felde **Meßruthen, Meßketten,** und **Meßſchnüre.** Wie ſie gemacht werden, das wollen wir kürzlich zeigen.

§. 472.

Eine Meßruthe, oder Meßſtange zu machen.

Aufloſung.

1) Man nehme eine tannene rund gehobelte Stange, die ſich nicht ſo leicht ziehet, und trage auf dieſelbe die Länge der Ruthe, wornach man eine Meßruthe machen ſoll, an den Endpunkten dieſer Länge laſſe man dieſelbe abſchneiden, und beſchlage ſie an

den

den Enden, damit ſie ſich nicht abnuzzen kan, mit eiſernen Ringen.

2) Man teile dieſe Meßruthe in 10 gleiche Teile, und alſo in ſo viele Decimalſchuhe, als die Ruthe geteilt iſt, und bemerke die Schuhe mit kleinen Någeln, die man in die Ruthe ſchlågt, einen Fus an dem einen Ende aber teile man in 10 gleiche Teile, und alſo in ſo viel Zolle, als der Schuh Zolle hat, auch dieſe aber bemerke man mit kleinen Någeln, endlich teile man einen Zoll in ſeine 10 Linien ein: So iſt das Verlangte geſchehen.

§. 473.

Eine Meßkette zu machen.

Aufloſung.

1) Man laſſe aus ungeglůetem eiſernen Drate, welcher die Dikke eines ſtarken Strohalmens hat, eine Kette machen, die 5 Ruthen lang iſt, man hånge aber die Glieder dieſer Kette, die in unſerer Figur nur $\overset{\circ}{1}$ lang iſt, Tab. V. fig. 64, dergeſtalt in kleine meſſingene Ringe a b c d e f g h und i zuſammen, daß ſtets ein Glied a b von dem einen Mittel des Ringes bis zu dem andern einen Decimalfus ausmachet, an die Ende hingegen mache man zwei andere Ringe k und l, aber ſo, daß die Långe von a bis k und i bis l ein Decimalſchuh iſt, dieſe Kette nun

nun hänge man in dieſe Ringe mit einem Wirbel, damit ſie ſich nicht ſo leicht verdrehen kan. Jezt

2) hänge man mit Drat an die 5° lange Kette von k nach l an den Ring der erſten zehn Schuhe ein meſſingenes Blättgen mit einem Loch, oder laſſe dieſen Ring zum Unterſchied der andern gleich Anfangs etwas gröſer machen, an den Ring der zweiten zehn Schuh aber hänge man ein ſolches Blättgen mit zwey Löchern, und ſo weiter, ſo bezeichnen dieſe Dinge 1, 2, 3, 4 und 5 Ruthen, und die Kette iſt fertig, zu dieſer Kette laſſe man endlich von hartem ebenem Holz, das ſich nicht ziehet, einen Schuh machen, und teile dieſen in Zolle und Linien.

§. 474.

Eine Meßſchnur zu machen.

Auflöſung.

1) Man laſſe ſich aus gutem Hanf eine 5 Ruthen lange Schnur, aber wiederſinnig drehen, und koche dieſelbe in Leinöhl, alsdann aber beſtreiche man ſie etliche mal mit Wachs, damit ſie keine Näſſe annimt.

2) Man teile ſie, wie die Kette, vermittelſt zarten Drates, oder ſeidener Faden, in Schuhe und Ruthen ein: So iſt das Verlangte geſchehen.

Es werden die Meßſchnüre, ohngeachtet man ſie in Oehl kocht, und mit Wachs beſtreicht, bei feuchtem

Wetter

Wetter etwas kürzer, und bei trokkenem verlängern ſich dieſelbe, ihr Gebrauch iſt alſo mit vielen Fehlern verknüpft. Auch die Meßketten verwikkeln ſich gern, auſer dem aber machen ſie Bäuche, wenn man ſie über eine Vertiefung ziehet, und daher ſind ſie zum Meſſen eben wol ſehr unbequem. Der Gebrauch der Meßſtange iſt daher ſtets der ſicherſte.

§. 475.

Ein Längenmaas, wornach man die Linien an einer Figur auf dem Papier eben ſo aufträgt, als wie ſolche auf dem Felde in dem Groſen an einer ähnlichen Figur gemeſſen worden (§. 418.), nent man einen **veriüngten Maaſtab**.

§. 476.

Einen veriüngten Maaſtab zu machen.

Aufloſung.

Man trage auf eine gerade Linie A 5 Tab. V. fig. 65, mit einer beliebigen Eröfnung des Cirkels aus A in B zehn gleiche Teile vor die Schuhe, ſo iſt AB eine Ruthe, dieſe nun trage man aus B in 1, 2, 3, 4, 5, u. ſ. w. ſo iſt, weil ſich auf dieſem Maasſtab die Schuhe zur Ruthen eben ſo, wie die Schuhe zur Ruthe im Groſen verhalten, das Verlangte geſchehen, und es ſind von B nach 5 die Ruthen, von B

nach A aber die Schuh enthalten. Wir wollen, wenn wir noch mehrere Gründe vorausgeſezt haben, zeigen, wie man einen ſolchen Maasſtab auf eine noch andere Art machen kan.

§. 477.

Eine gerade Linie zu meſſen.

Erſte Auflöſung.

1) Wenn man eine gerade Linie AB, Tab. V. fig. 66, auf dem Papier meſſen ſoll: So ſezze man den einen Cirkelfus in A, und thue den andern auf bis in B, und faſſe alſo die Linie AB.

2) Man ſezze den einen Cirkelfus in den Teilungspunkt 5 der Ruthen, ſo wird der andere Cirkelfus auf den Teilungspunkt 9 der Schuhe zutreffen, und alſo die Linie 5 Ruthen und 9 Schuh enthalten, und ſo meſſe man alle Linien auf dem Papier.

Andere Auflöſung.

1) Wenn man eine gerade Linie auf dem Feld meſſen ſoll: So ſtekke man in die beiden Endpunkten A und B der zu meſſenden Linie AB Tab. V. fig. 61, zwei Stäbe, und zwiſchen dieſe wieder andere, wenn die Meßruthe, die Kette, oder die Schnur nicht von einem Ende der Linie bis zu dem andern reicht (§. 459.).

2) Will man nun mit der Meßruthe meſſen: So überſchlage man dieſelbe von dem einen Stabe

A bis

A bis zu dem andern Stabe B, und zähle von dem einem bis zu dem andern die Ruthen, Schuhe und Zolle zuſammen, der ganzen Länge aber ſezze man ſo viele Ruthendikken zu, als man die Ruthe überſchlagen hat, oder man lege zwei Ruthen von einem Ende der zu meſſenden Linie bis zu dem andern ſtets in gerader Linie vor einander, ſo, daß man immer die hinterſte aufhebt, dieſe zählet, und vor die vordere leget, dadurch aber die Ruthen, Schuhe und Zolle der ganzen Länge zuſammen zählet. Will man

3) mit einer Kette, oder Schnur meſſen: So ziehe man die Meßkette, oder die Schnur von dem einen Stabe A bis zu dem andern B, nach und nach aus, oder man ſtekke in die Endringe der Kette zwei Stäbe, oder binde die Meßſchnur an zwei ſolche Stäbe an, und ziehe die Kette, oder die Schnur von dem einen Ende der zu meſſenden Linie nach dem andern dergeſtalt nach und nach aus, daß man den hintern Stab ſtets in den Ort ſezzet, worinnen der vordere geſtanden hat, die zwei Stäbe der Kette, oder der Schnur aber mit dem Stab, der auf dem Endpunkt der Linie ſtehet, wohin man miſſet, ſtets in eine gerade Linie richtet (§. 459.).

Beweis.

Wenn man eine gerade Linie meſſen ſoll: So muß man durch Hülfe des Maaßſtabes angeben, wie viele Ruthen, Schuhe, und Zolle in derſelben ent-

 halten

halten ſind (§. 462. 465. und 466.). Nun iſt aber bekant, daß Linien, die einander dekken, einander gleich ſind (§. 456.), und daher darf man nur den Maasſtab, die Meßſtange, die Kette, oder die Schnur auf die zu meſſende Linie legen, um dieſe Linie auszumeſſen, und ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle als in dieſer Linie von dem Maasſtab gedekt werden, ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle hält auch dieſelbe.

§. 478.

Wir merken hierbei an, daß man die Meßſtangen ſtets horizontal legen, auch die Meßketten, und die Meßruthen eben ſo ausziehen muß (§. 414.), weil man ſonſt eine krumme, und keine gerade Linie meſſen würde, die alzeit kürzer, als wie iene iſt (§. 400.). Soll man eben daher eine gerade Linie AC, Tab. V. fig. 67, über den Berg AIC meſſen: So muß man die Stäbe AD, EF, GH, KL, MN und OC ſtets ſenkrecht halten, und auf dieſe die Ruthe DE, FG, HI, IK, LM und NO horizontal legen (§. 414.), das ohne einen merklichen Fehler zu begehen, nach dem Auge, oder beſſer nach einer Blei- oder einer Sezwage geſchehen kan, Tab. V. fig. 68, die ſo eingerichtet iſt, daß die Linie DC, worauf das Loth E einſchlagen muß, auf der Linie AB perpendicular ſtehet (§. 414.).

§. 479.

§. 479.

Die Bogen BC und EF, Tab. V. fig. 69, von zwei concentriſchen Cirkeln, die zwiſchen den Radiis AB und AC enthalten ſind (§. 403. und 405.), haben zu den Peripherien der Cirkeln, wovon ſie abgeſchnitten worden, einerlei Verhåltnis.

Beweis.

Wenn man den Radium AB um den Punkt A bewegt: So beſchreibt der Punkt B den Bogen BC, und der Punkt E den Bogen EF (§. 303.). Sie werden alſo aus åhnlichen Linien AE und AB, auf einerlei Art erzeuget (§. 401.), eben darum aber haben ſie einerlei Merkmale, und ſie ſind folglich åhnliche Stůkke von den Peripherien ihrer Cirkel. So wie ſich alſo der Bogen EF zu der Peripherie ſeines Cirkels verhålt, ſo verhålt ſich auch der Bogen BC zu der Peripherie ſeines Cirkels, eben darum aber haben ſie zu ihren Peripherien einerlei Verhåltnis (§. 204. u. 211.), ſo viele Teile nemlich der Bogen EF von ſeiner Peripherie hat, ſo viele Teile hat auch der Bogen BC von ſeiner Peripherie, wenn man die eine wie die andere Peripherie in gleich viele Teile teilet.

§. 480.

Weil alle Cirkel einander åhnlich ſind (§. 404.), und die Bogen, die in concentriſchen Cirkeln zwiſchen zwei Radiis enthalten ſind, zu ihren Peripherien ei-

 nerlei

nerlei Verhältnis haben (§. 479.): So hat man die Peripherie eines ieden Cirkels in 360 gleiche Teile geteilet, und gerade dieſe Zahl angenommen, weil ſie ſich durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 und 180 genau teilen läſſet (§. 35.). Man teilet einen ſolchen Teil durch 60 in ſtets kleinere Teile, und das ſo lange, bis ſolche Teile heraus kommen, die gegen die ganze Peripherie unendlich klein ſind. Den 360ten Teil von dem ganzen Cirkel nun nent man einen **Grad**, den 60ten Teil von einem Grad eine **Minute**, den 60ten Teil von einer Minute eine Secunde, den 60ten Teil von einer Secunde eine Tertie, u. ſ. w.

§. 481.

Man bezeichnet, weil dieſe Gröſen Sexageſimalbrüche ſind (§. 163.), die Grade mit o, die Minuten mit I, die Secunden mit II, die Tertien mit III, u. ſ. w. (§. 165.). Man ſchreibt alſo 30 Grad 15 Minuten, 6 Secunden und 59 Tertien ſo $30^{o}\ 15^{I}\ 6^{II}\ 59^{III}$.

§. 482.

Die Bogen BC und DE, Tab. V. fig. 70, welche aus der Spizze A des **Winkels** BAC von einem Schenkel bis zu dem andern mit verſchiedenen Erőfnungen des Cirkels beſchrieben werden, haben gleich viele Grade.

Beweis.

Beweis.

Die Cirkelbogen BC und DE ſind aus einerlei Mittelpunkt A beſchrieben, und die Schenkel AB und AC des Winkels BAC ſind Radii eines Cirkels (§. 405.), eben daher aber ſind die Bogen BC und DE Bogen von concentriſchen Cirkeln (§. 479.). Nun haben aber die Bogen concentriſcher Cirkel zu ihren Peripherien einerlei Verhältnis (§. 479.), und die Peripherie eines ieden Cirkels iſt in 360 Grade geteilt (§. 480.), und derohalben haben auch die Bogen BC und DE, welche zwiſchen den Schenkeln AB und AC eines Winkels BAC mit verſchiedener Eröfnung des Cirkels beſchrieben werden, gleich viele Grade.

§. 483.

Weil man dieſemnach alle Winkel anſehen kan, als wenn ſie entſtanden wären, indem man aus dem Mittelpunkt nach der Peripherie gerade Linien gezogen hätte, und die Bogen, die zwiſchen dieſen Linien enthalten ſind, die Gröſe der Eröfnung des Winkels angeben, dieſe Eröfnung aber die Gröſe des Winkels iſt; So beſtimt auch der Bogen, welcher zwiſchen den Schenkeln eines Winkels beſchrieben wird, die Gröſe des Winkels: Und weil dieſe Bogen nach Graden gemeſſen werden, alle Bogen aber, die zwiſchen den Schenkeln eines Winkels mit verſchiedener

Eröfnung des Cirkels beſchrieben werden, gleich viele Grade haben; So iſt auch die Zahl der Grade, die ein ieder Bogen enthält, den man zwiſchen den Schenkeln eines Winkels beſchreibt, das Maas des Winkels. Es iſt dieſemnach einerlei, ob man in den Winkeln BAC, FKG, und LPM, Tab. V. fig. 70. 71. und 72, den Bogen BC, oder ED, den Bogen FG, oder HI, und den Bogen LM, oder NO miſſet.

§. 484.

Es werden dieſemnach die Winkel durch Grade ausgemeſſen, und weis man die Zahl dieſer Grade, ſo weis man ihre Gröſe, ſie ſind aber gros, wenn ſie viele, hingegen aber klein, wenn ſie wenige Grade haben, und überhaupt verhalten ſich die Winkel, wie die Zahl der Grade der Bogen, die zwiſchen ihren Schenkeln enthalten ſind.

§. 485.

Wenn alſo zwei Winkel einerlei Anzahl von Graden, oder einerlei Maas haben; So ſind ſie einander gleich: Und wenn zwei Winkel einander gleich ſind; So haben ſie gleich viele Grade, und einerlei Maas. Es ſind aber auch gleiche Winkel ähnliche Winkel, und ähnliche Winkel gleiche Winkel, weil beide einerlei Eröfnung, und alſo einerlei Merkmale haben (§. 19.).

§. 486.

§. 486.

Wenn Winkel einander dekken: So ſind ſie ſich gleich.

Beweis.

Wenn Winkel einander dekken: So fallen ſie in ihren Schenkeln auf einander (§. 455.). Sie haben alſo einerlei Eröfnung (§. 411. und 415.), folglich einerlei Gröſe ((§. 21.), und daher ſind ſie auch einander gleich.

§. 487.

Wenn Winkel einander gleich ſind: So dekken ſie einander.

Beweis.

Sind Winkel einander gleich: So haben ſie einerlei Eröfnung (§. 411. und 415.), und derohalben fallen die Schenkeln des einen auf die Schenkeln des andern, und dekken alſo einander (§. 455.).

§. 488.

Einen Winkel zu meſſen.

Erſte Auflöſung.

1) Wenn man auf dem Papier einen Winkel meſſen ſoll: So nehme man einen aus Meßing verfertigten Transporteur ABC, Tab. VI. fig. 73, der, wie die Figur zeigt, in 180° eingeteilt iſt, und

lege denſelben dergeſtalt auf den Winkel FDE, daß der Mittelpunkt D an die Spizze des Winkels, das Lineal DB aber an den Schenkel DF des Winkels FDE zu liegen komt. Jezt

2) zähle man auf dem Transporteur die Grade des Bogens, welche zwiſchen den Schenkeln FD, und ED enthalten ſind: So iſt das Verlangte geſchehen (§. 484. und 485.).

Andere Auflöſung.

1) Wenn man auf dem Felde einen Winkel meſſen ſoll: So ſezze man das Aſtrolabium, oder den Winkelmeſſer mit ſeinem Fus, oder dem Stativ ſenkrecht in die Spizze A des Winkels BAC, Tab. VI. fig. 74, und wende daſſelbe ſo, daß die Punkten D und E des unbeweglichen Lineals mit dem Punkt C eine gerade Linie DEC ausmachen, wenn man durch die auf dieſem Lineal befindliche Dioptern viſiret. Nunmehr

2) drehe man das bewegliche Lineal FG ſo lange, bis die Punkten FGB eine gerade Linie ausmachen, wenn man durch die auf dieſem Lineal befindliche Dioptern viſiret. Endlich

3) zähle man die Grade, die zwiſchen den Schenkeln BA, und CA des Winkels BAC befindlich ſind: So iſt der Winkel gemeſſen (§. 484. und 485.).

Dritte Auflöſung.

1) Man ſezze ein Meßtiſchgen, die Menſula prätoria

toria, die man zuvor mit Papier überzogen hat, in die Spizze A des Winkels CAB, den man auf dem Felde meſſen ſoll, Tab. VI. fig. 75, und ſchlage ſenkrecht über der Spizze des Winkels A eine Nadel in das Meßtiſchgen, an dieſe Nadel nun lege man das Diopternlineal DE, und drehe es an dieſer Nadel ſo lang, bis die Punkten DAEB in eine gerade Linie, und in den Schenkel AB zu liegen kommen, wenn man durch die auf dem Lineal befindliche Dioptern viſiret, an dieſem Lineal aber, und auf der Seite, wo es an der Nadel lieget, ziehe man mit Bleiſtift eine Linie. So nun

2) verfahre man auch auf der andern Seite, und mit dem Schenkel CA; So wird der Winkel CAB auf den Meßtiſch getragen: Und wenn man dieſen mit dem Transporteur miſſet (erſte Auflöſ.); So bekomt man den verlangten Winkel.

§. 489.

Die Nebenwinkel x und y, Tab. VI. fig. 76, welche auf einer geraden Linie AB ſtehen (§. 413.), machen zuſammen 180°.

Beweis.

Man kan über die Linie AB aus dem Mittelpunkt C einen halben Cirkel beſchreiben (§. 461.), und derohalben iſt ein halber Cirkel das Maas der

Winkel

Winkel x und y (§. 483. und 484.). Nun hält aber der halbe Cirkel 180° (§. 480.), und daher iſt auch das Maas zweier Nebenwinkel x und $y = 180^{\circ}$.

§. 490.

Wenn alſo der eine Nebenwinkel bekannt iſt, und man ziehet dieſen von 180° ab: So bekomt man den andern Nebenwinkel (§. 98.).

§. 491.

Alle Winkel ABC, CBD, DBE, EBF und FBA, Tab. VI. fig. 77, die um einen Punkt B herum liegen, machen zuſammen 360° aus: Denn man kan über ſie einen Cirkel beſchreiben, und dieſer hat 360° (§. 403. und 480.).

§. 492.

Wenn ſich zwei Linien AB und CD, Tab. VI. fig. 78, in einem Punkt o durchſchneiden: So ſind die Verticalwinkel, oder die an der Spizze einander gegen über ſtehende Winkel m und o, und x und y einander gleich.

Beweis.

Der Winkel $o + x = 180^{\circ}$, und der Winkel $x + m = 180^{\circ}$ (§. 489.), und daher iſt der Winkel $o + x$

$= x + m$

$=x+m$ (§. 39.), Nun iſt aber der Winkel $x=x$ (§. 27.), und daher iſt, wenn man von $o+x$, und $x+m$ den Winkel x beiderſeits wegnimt, der Winkel $o=m$ (§. 87.). Ferner der Winkel $x+o=180^{\circ}$, und der Winkel $o+y=180^{\circ}$ (§. 489.), und daher iſt $x+o=o+y$ (§. 39.). Nun iſt aber der Winkel $o=o$ (§. 27.), und daher iſt, wenn man von $x+o$, und $o+y$ den Winkel o beiderſeits wegnimt, $x=y$ (§. 87.).

§. 493.

Wenn dieſemnach bei Wechſelswinkeln der Winkel o bekant iſt; So weis man auch den Winkel m: Und wenn y gegeben iſt; So iſt auch der Winkel x bekant: Und wenn man den Winkel o von 180° abziehet: So bekomt man den andern Wechſelswinkel x: Ziehet man hingegen y von 180° ab; So bekomt man den Winkel m (§. 490.).

§. 494.

Ein rechter Winkel hat zu ſeinem Maas den vierten Teil eines Cirkels, oder einen Quadranten, und alſo 90°.

Beweis.

Das Maas der Winkel $x+y$, Tab. I. fig. 12, iſt,

iſt = 180° (§. 489.), es ſind aber x + y rechte Winkel, und dieſe ſind einander gleich (§. 414. 415. und 416.), und daher iſt der Winkel $x = \frac{180^{\circ}}{2}$, und der Winkel $y = \frac{180^{\circ}}{2}$. Nun iſt aber $180^{\circ} = \frac{360}{2}$, und derohalben iſt auch $\frac{180^{\circ}}{2}$ der vierte Teil von einem Cirkel (§. 480.), folglich ein Quadrant, oder 90° (§. 436.).

§. 495.

Aus dem Vorhergehenden flieſet, daß alle rechte Winkel einander gleich ſind, und daß alle Winkel, die einem rechten Winkel gleich ſind, auch rechte Winkel ſind; Denn ſie alle haben einerlei Maas (§. 485.).

§. 496.

Die Winkel, welche mehr als wie 90° zu ihrem Maas haben, ſind ſtumpfe Winkel, und die, welche weniger, als wie 90° zu ihrem Maas haben, ſind ſpizze Winkel (§. 415.).

§. 497.

Einen Winkel zu machen, der einem gegebenen gleich iſt.

Erſte

Erſte Auflöſung.

1) Man beſchreibe aus der Spizze A des gegebenen Winkels BAC, Tab. VI. fig. 79, mit einer gefälligen Eröfnung des Cirkels einen Bogen DE (§. 482.).

2) Man ziehe eine gerade Linie FH, und beſchreibe aus F mit der vorigen Eröfnung des Cirkels einen Bogen IG.

3) Man ſezze den einen Cirkelfus in D, und thue den andern auf bis E, und faſſe alſo die Weite DE.

4) Man ſchneide aus I mit dieſer Eröfnung des Cirkels von dem Bogen IG den Bogen IL ab. Endlich

5) ziehe man durch F und L eine gerade Linie FK: So iſt der Winkel KFH dem gegebenen Winkel BAC gleich (§. 483. und 485.)

Andere Auflöſung.

Iſt der Winkel nicht in Linien, ſondern in Graden gegeben: So ziehe man

1) eine gerade Linie DF, Tab. VI. fig. 73, und lege den Transporteur an dieſe Linie, ſo daß der Mittelpunkt an den Punkt D der Linie DB zu liegen komt.

2) Von B nach C zähle man ſo viele Grade auf dem Transporteur ab, als der gegebene Winkel hat, und mache mit dem Cirkelfus an dem lezten Teilungspunkt G dieſer Grade einen zarten Punkt. Jezt

3) neh-

3) nehme man den Transporteur weg, und ziehe von D durch G eine gerade Linie: So iſt EDF der verlangte Winkel (§. 485.).

Dritte Auflöſung.

Soll man einen in Graden gegebenen Winkel einem andern auf dem Felde gleich machen: So verfahre man ſo.

1) Man ſtelle den Winkelmeſſer mit ſeinem Stativ in die Spizze A des Winkels, den man einem andern gleich machen ſoll, Tab. VI. fig. 74, und richte das unbewegliche Lineal DC, indem man durch ſeine Dioptern viſiret, nach dem angenommenen, oder gegebenen einen Schenkel AC des Winkels, worauf man in C einen Pfahl ſchlagen laſſen.

2) Das bewegliche Lineal FG verſchiebe man ſo lang, bis es die Anzahl der Grade abſchneidet, die der gegebene Winkel hat. Jezt

3) viſire man durch die Dioptern auf dieſem Lineal, und laſſe in die Linie AGB einen Pfahl ſchlagen, eben einen ſolchen Pfahl ſchlage man aber auch in die Spizze des Winkels, und den Ort A, wo das Stativ ſtehet: So iſt das Verlangte geſchehen (§. 485.).

§. 498.

Figuren, die einander dekken, ſind ſich gleich, und ähnlich.

Beweis.

Beweis.

Figuren, die einander dekken, fallen in ihren Gränzen, und den zwiſchen ihnen liegenden Teilen auf einander (§. 455.), und ſchlieſen alſo einerlei Raum ein. Sie haben demnach auch einerlei Merkmale und einerlei Gröſe (§. 19. und 21.), und derohalben ſind auch Figuren, die einander dekken, einander gleich und ähnlich.

§. 499.

Figuren, die einander gleich und ähnlich ſind, dekken einander.

Beweis.

Sind Figuren einander gleich und ähnlich: So haben ſie einerlei Merkmale, und einerlei Gröſe (§. 19. und 21.), und kommen völlig mit einander überein, eben daher aber müſſen ſie auch in ihren Gränzen, und den dazwiſchen liegenden Teilen auf einander fallen, und folglich einander dekken (§. 455.).

§. 500.

In alle den Figuren, die einander dekken, ſind auch die gleichnamigen Stükke, das iſt die gleichnamigen Winkel, und die gleichnamigen Seiten einander gleich (§. 418. 456. und 486.

§. 501.

In einem ieden Triangel ABC, Tab. VI. fig 80, ſind zwei Seiten zuſammen genommen gröſer, als die dritte.

Beweis.

Wenn AC und BC eben ſo gros, oder kleiner ſind, als wie AB: So fallen ſie, da zwiſchen zweien Punkten nur eine Linie, und dieſe alzeit die kürzeſte zwiſchen ihnen iſt (§. 400.), in die Linie AB, und ſie ſtoſen nicht mehr in dem Punkt C zuſammen. Iſt aber dieſes: So ſchlieſen ſie keinen Raum ein (§. 418.), und derohalben ſind auch in einem jeden Triangel zwei Linien zuſammen genommen gröſer, als wie die dritte, es iſt alſo $AC + CB > AB$, $CB + BA > AC$, und $BA + AC > CB$.

§. 502.

Wenn man alſo, da zwei Linien in einem Triangel auf einer dritten über einander fallen, aus dem Punkt B, Tab. VI. fig. 80, mit der Linie BC einen Bogen DCE, und aus A mit der Linie AC einen Bogen FCG beſchreibet: So müſſen ſich dieſe Bogen in einem Punkt, und zwar in dem Punkt C durchſchneiden, wo der äuſerſte Punkt des Radii AC, und des Radii BC in ihren Kreiſen, in welche ſie fallen, zuſammen kommen (§. 403. und 405.).

§. 503.

Wenn in zwei Triangeln ABC und DEF, Tab. VI. fig. 81, die gleichnamigen Seiten AB und DE, und AC und DF, auſer dem aber die Winkel A und D, welche von den Seiten AB und AC, und DE und DF eingeſchloſſen werden, einander gleich ſind: So ſind dieſe Triangel, und ihre gleichnamigen Stükke einander gleich und ähnlich (§. 19. und 20.).

Beweis.

Wenn man ſich in Gedanken vorſtelt, daß der Triangel ABC auf den Triangel DEF gelegt werde, ſo, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die Linie DE fält: So muß auch, da AB = DE, die Linie AB die Linie DE dekken, und folglich der Punkt B auf den Punkt E fallen (§. 455. und 457.). Weil der Winkel A dem Winkel D gleich iſt, und Winkel, die einander gleich ſind, einander dekken (§. 487.): So muß auch der Winkel A den Winkel D dekken, und der Schenkel AC auf den Schenkel DF, folglich der Punkt C in die Linie DF, und weil AC = DF, der Punkt C gerade auf F fallen. Es fält alſo der Punkt B auf E, und der Punkt C auf F, eben darum aber fält auch die Linie BC auf die Linie FE. Dieſemnach fält AB auf DE, AC auf DF, und CB auf FE, und es dekken ſich alſo die ganzen Triangel ABC und DEF (§. 455.),

Triangel aber, die einander dekken, ſind ſich gleich (§. 498.), und derohalben ſind auch die Triangel ABC und DEF, worinnen zwei gleichnamige Seiten, und die Winkel, welche dieſe Seiten einſchlieſen, gleich ſind, ſich ſelbſt, und auch ihre gleichnamige Stükke einander gleich und ähnlich, und es iſt CB = FE, der Winkel B = dem Winkel E, und der Winkel C = dem Winkel F (§. 500.).

§. 504.

Wenn alſo zwei Seiten und der Winkel, den dieſe beide Seiten einſchlieſen, gegeben ſind: So kan man daraus einen Triangel machen.

§. 505.

Wenn in zwei Triangeln ABC und DEF, Tab. VI. fig. 82, eine gleichnamige Seite AB und CD, und die Winkel A und D, und B und E, welche auf dieſen Seiten ſtehen, einander gleich ſind: So ſind dieſe Triangel und ihre gleichnamige Stükke einander gleich und ähnlich (§. 19. und 21.).

Beweis.

Wenn man den Triangel ABC dergeſtalt auf den Triangel DEF leget, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die Linie DE zu liegen komt: So muß auch die Linie AB die Linie DE dekken,

dekken, weil ſie einander gleich ſind (§. 457.), und folglich der Punkt B auf den Punkt E fallen (§. 455.). Da der Winkel A dem Winkel D gleich iſt, und Winkel, die einander gleich ſind, einander dekken (§. 487.): So muß der Winkel A den Winkel D dekken, und der Schenkel AC auf den Schenkel DF, folglich der Punkt C in die Linie DF fallen. Weil ferner der Winkel B dem Winkel E gleich iſt, und dergleichen Winkel einander dekken (§. 487.): So muß auch der Winkel B den Winkel E dekken, und der Schenkel BC auf den Schenkel EF, eben darum aber der Punkt C in die Linie EF fallen. Nun kommen aber die Linien AC und BC in dem Punkt C zuſammen, und es fält der Punkt C ſowol in die Linie DF, als in die Linie EF, und derohalben muß der Punkt C in den Punkt F fallen, welcher ſowol in der Linie DF, als in der Linie EF enthalten iſt, das iſt, auf den Punkt, wo ſich beide Linien durchſchneiden (§. 502.), und es muß daher die Linie BC der Linie EF gleich ſein. Weil alſo der Punkt A auf D, der Punkt B auf E, und der Punkt C auf F fält: So dekken ſich auch die Triangel ABC und DEF (§. 455.), und derohalben ſind auch zwei Triangel, worinnen eine gleichnamige Seite, und die Winkel, die auf dieſer Seite ſtehen, gleich ſind, einander gleich und ähnlich (§. 498.), und es iſt der Winkel C=F, BC=EF, und AC=DF (§. 500.).

§. 506.

Wenn demnach eine Linie, und zwei darauf ſtehende Winkel gegeben ſind: So kan man daraus einen Triangel machen.

§. 507.

Wenn in zwei Triangeln ABC und DEF, Tab. VII. fig. 83, alle gleichnamige Seiten einander gleich ſind, und alſo AB=DE, AC=DF, und BC=EF: So ſind auch die ganzen Triangel, und die gleichnamigen Stükke dieſer Triangel einander gleich und ähnlich (§. 19. und 21.).

Beweis.

Wenn man den Triangel ABC ſolchergeſtalt auf den Triangel DEF leget, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die Linie DE fället: So muß, weil AB=DE, die Linie AB die Linie DE dekken (§. 457.), und folglich der Punkt B auf den Punkt E fallen (§. 455.). Beſchreibt man iezt mit AC aus D den Bogen x, und mit BC aus E den Bogen y: So muß der Punkt C von der Linie AC in den Bogen x, und der Punkt C von der Linie BC in den Bogen y, und folglich, da AC =DF, und BC=EF, der Punkt C in den Punkt F fallen, worinnen ſich die Bogen x und y durchſchneiden (§. 502.). Weil alſo der Punkt A auf den Punkt D, der Punkt B auf den Punkt E, und der

Punkt

Punkt C auf den Punkt F fält: So müſſen ſich auch dieſe Triangel dekken (§. 455.), eben darum aber ſind Triangel, worinnen alle gleichnamige Seiten gleich ſind, einander gleich und ähnlich (§. 498.), und es iſt der Winkel A = dem Winkel D, der Winkel B = dem Winkel E, und der Winkel C = dem Winkel F (§. 500.).

§. 508.

Wenn alſo drei Seiten eines Triangels gegeben ſind: So kan man daraus einen Triangel machen.

§. 509.

Wenn in zwei rechtwinkelichten Triangeln ABC und DEF, Tab. VII. fig. 84, zwei gleichnamige Seiten AC und DF, und CB und FE, auſer dem aber die Winkel A und D gleich ſind: So ſind auch die ganzen Triangel einander gleich und ähnlich (§. 19. und 21.).

Beweis.

Wenn man den Triangel ABC dergeſtalt auf den Triangel DEC leget, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AC auf die Linie DF fället: So muß, weil AC = DF, die Linie AC die Linie DF dekken (§. 457.), und alſo der Punkt C auf F fallen. Weil der Winkel A = dem Winkel D, und Winkel, die einander gleich ſind, einander

dekken (§. 487.): So muß auch der Winkel A den Winkel D dekken, und der Schenkel AB auf den Schenkel DE, folglich der Punkt B in die Linie DE fallen. Beſchreibt man nun mit der Linie CB=FE aus dem Punkt F einen Cirkelbogen x; So muß, da BC=FE, der Punkt B in dieſen Bogen (§. 403. und 405.), und weil B in DE fält, in den Punkt E fallen, wo ſich der Bogen x und die Linie DE durchſchneiden (§. 502.), eben dieſer Punkt aber iſt der Punkt B, und daher fält auch der Punkt B auf E. Da alſo der Punkt A auf D, der Punkt B auf E, und der Punkt C auf F fält: So dekken ſich auch dieſe Triangel (§. 455.), eben daher aber ſind rechtwinkelichte Triangel einander gleich und ähnlich, wenn in beiden zwei gleichnamige Seiten, die gleichnamige ſpizze Winkel einſchlieſen, gleich ſind (§. 498.), und es iſt AB=DE, und der Winkel B= dem Winkel E.

§. 510.

Wenn alſo in einem rechtwinkelichten Triangel zwei Seiten, die einen ſpizzen Winkel einſchlieſen, gegeben ſind: So kan man daraus einen Triangel machen.

§. 511.

Wenn in zwei Triangeln eine gleichnamige Seite und zwei Winkel, deren einem iene Seite

entgegen ſtehet, einander gleich ſind, und AB =DE, A=D, und C=F, Tab. VII. fig. 85: So ſind die ganzen Triangel, und ihre gleichnamige Stükke einander gleich und ähnlich (§. 19. u. 21.).

Beweis.

Legt man den Triangel ABC dergeſtalt auf den Triangel DEF, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Linie AB auf die Linie DE fället: So muß, da AB=DE, die Linie AB die Linie DE dekken (§. 457.), und alſo der Punkt B auf E fallen. Weil der Winkel A dem Winkel D gleich iſt: So muß auch der Winkel A den Winkel D dekken (§. 487.), und der Schenkel AC auf den Schenkel DF fallen. Da nun der Winkel C dem Winkel F gleich iſt: So fält auch der Schenkel CB auf den Schenkel FE, und der Punkt C auf F (§. 487.). Weil alſo A auf D, B auf E, und C auf F fält: So dekken ſich die Triangel ABC und DEF (§. 455), eben darum aber ſind zwei Triangel, worinnen eine gleichnamige Seite, und zwei gleichnamige Winkel, deren einem iene Seite entgegen ſtehet, einander gleich ſind, ſich ſelbſt gleich und ähnlich (§. 498.), und es iſt AC=DF, BC=EF, und B=E (§. 500).

§. 512.

Auch aus dieſen drei Teilen eines Triangels, nemlich einer Seite und zwei Winkeln, deren einer

iener Seite entgegen ſtehet, kan man einen Triangel machen, wenn man die Linie A B und den Winkel A auf dem Papier aufträgt, und alsdann den Transporteur ſo lang auf dem Schenkel A C verſchiebt, bis die Linie, die aus dem Mittelpunkt C des Transporteurs in den Punkt B gezogen wird, die Grade abſchneidet, die der Winkel C haben ſoll.

§. 513.

Aus denen im 503. 505. 507. 509. und 511. §. gemeldeten drei gegebenen Teilen eines Triangels, worunter wenigſtens eine Seite iſt, kan überhaupt nicht mehr, als ein Triangel gemacht werden. Denn wolte man annehmen, daß aus drei ſolchen Teilen eines Triangels mehr, als wie ein Triangel gemacht werden könte: So müſten dieſe Teile in dem einen und dem andern Triangel, die daraus gemacht würden, einander nicht gleich ſein, das aber iſt widerſprechend, und dem Erwieſenen zuwider.

§. 514.

Aus dem, was wir in dem 503. 505. 507. 509. und 511. §. erwieſen haben, iſt zugleich klar, daß in gleichen Triangeln gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten entgegen ſtehen.

§. 515.

Eine gerade Linie AB, Tab. VII. fig. 86, in zwei gleiche Teile AE und EB zu teilen.

Auflöſung.

1) Man mache auf dem Papier aus den Endpunkten A und B mit einer gefälligen Eröfnung des Cirkels AC aus A und B einen Durchſchnitt in C, und mit einer beliebigen Eröfnung AD aus A und B einen andern Durchſchnitt in D.

2) Man ziehe durch die Punkten C und D eine gerade Linie CD: So teilet dieſe die Linie AB in dem Punkt E in zwei gleiche Teile AE und EB.

Beweis.

Weil die Linie AC=BC, AD=DB (§. 406.), und CD=CD (§. 27.): So iſt auch der Triangel ADC=BCD, und der Winkel x=y (§. 507.). Da alſo x=y, AC=BC (§. 406.), und CE=CE (§. 27.): So iſt der Triangel ACE= dem Triangel BCE, folglich AE=EB (§. 503.).

§. 516.

Verfährt man eben ſo mit der Linie EB: So wird ſie auch in zwei, und die Linie AB in vier gleiche Teile geteilt, und ſo kan man dieſe Linie ſtets weiter teilen.

§. 517.

§. 517.

Wenn man den Cirkel von A bis in C aufthut, Tab. VII. fig. 87, und in C einen Punkt machet, alsdann aber mit eben dieſer Eröfnung aus B in D einen ſolchen Punkt macht, und hernach den Raum zwiſchen C und D nach dem Auge in zwei gleiche Teile teilet: So wird dieſe Aufgabe ebenwol aufgelöſt. Auf dem Felde verfährt man öfters ſo, und bedient ſich, Statt des Cirkels, einer Stange, oder eines Richtſcheides, wenn die Linie AB nicht zu lang iſt. Auch dividirt man die Länge AB, wenn ihr Maas gegeben iſt, durch 2 (§. 108.), und miſt alsdann den Quotienten, der die Hälfte der Linie AB iſt, von A in E, oder B in E ab. Legt man ſonſt auch auf dem Felde eine Schnur doppelt zuſammen, ſo, daß die beiden Ende, welche die gemeſſene Länge ausmachen, nicht über einander gehen: So wird eine Linie ebenwol in zwei gleiche Teile geteilt.

§. 518.

Einen gegebenen Winkel BAC, Tab. VII. fig. 88, in zwei gleiche Teile BAF und FAC zu teilen.

Auflöſung.

1) Man ſezze den einen Cirkelfus in die Spizze des Winkels A, und bemerke mit einer beliebigen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels auf den Schenkeln AB und AC die Punkten D und E.

2) Aus

2) Aus eben dieſen Punkten mache man wieder mit einer gefälligen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels einen Durchſchnitt in F. Jezt

3) ziehe man durch die Spizze des Winkels A, und den Durchſchnitt F eine gerade Linie AF: So iſt der Winkel BAC in zwei gleiche Teile BAF und FAC geteilet.

Beweis.

Da AD = AE, DF = EF (§. 406.), und AF = AF (§. 27.): So iſt der Triangel AFD = AFE, und folglich der Winkel x = y (§. 507.).

§. 519.

Teilt man den Winkel BAF und FAC auf eben die Art noch einmal in die Hälfte, ſo wird der Winkel BAC in vier gleiche Teile geteilt, und ſo kan man einen Winkel in 8, in 16, und in 32. Teile teilen u. ſ. w.

§. 520.

Eben ſo kan man auch auf dem Felde einen Winkel mit einer Kette, oder einer Schnur in zwei gleiche Teile teilen, es geſchiehet aber auch dieſes, wenn die Grade des Winkels bekant ſind, wenn man dieſe durch 2 dividiret (§. 108.), und den halben Winkel, der heraus komt, aus der Spizze A an die Linie AB abſtekt (§. 488.).

§. 521.

§. 521.

In einen gegebenen Punkt C einer Linie AB, deren Länge nicht beſtimt iſt, Tab. VII. fig. 89, eine Perpendicularlinie CF zu fällen.

Auflöſung.

1) Man ſezze den einen Cirkelfus in den Punkt C und ſchneide aus demſelben mit einerlei Eröfnung des Cirkels zu beiden Seiten die Punkten D und E in der Linie AB ab.

2) Aus den Punkten D und E mache man mit einer beliebigen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels einen Durchſchnitt in F.

3) Man ziehe aus C in F eine gerade Linie: So ſtehet CF auf AB perpendicular.

Beweis.

Weil CD=CE, DF=EF (§. 406.), und CF=CF (§. 27.): So iſt der △ DCF=△ CEF, und der Winkel x=y (§. 507.), und folglich die Linie CF perpendicular auf AB (§. 414. und 416.)

§. 522.

Man kan auch eine Perpendicularlinie dadurch in einen Punkt B fällen, Tab. VII. fig. 90 und 91, wenn man einen meßingenen Winkelhaken, oder einen hölzernen, ABC, deſſen Seiten AB und BC nach einem rechten Winkel abgerichtet ſind, an die Linie BC leget,

leget, ſo daß die Spizze B auf den Punkt B zu liegen komt, worauf man den Perpendicul aufrichten will, alsdann aber an der Seite BA her eine gerade Linie in B ziehet.

§. 523.

Auf die Mitte einer geraden Linie AB, Tab. VII. fig. 92, einen Perpendicul EC aufzurichten.

Auflöſung.

Man verfahre eben ſo, wie in dem 515. §. gewieſen worden: So iſt aus dem an dieſem Ort geführten Beweis der △ ACE = △ BCE, und der Winkel AEC = dem Winkel BEC (§. 503.), und daher CE perpendicular auf AB (§. 414. und 416.).

§. 524.

Durch einen über einer Linie AB, Tab. VII. fig. 93, gegebenen Punkt C einen Perpendikul FG auf dieſe Linie zu fällen.

Erſte Auflöſung.

1) Man ſezze den einen Cirkelfus in C, und ſchneide mit einer gefälligen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels auf der Linie AB, die Punkten D und E ab.

2) Aus dieſen Punkten D und E mache man mit einer gefälligen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels aus D und E einen Durchſchnitt in F.

3) Durch

3) Durch die Punkten C und F ziehe man auf AB eine gerade Linie FG: So iſt das Verlangte geſchehen.

Beweis.

Weil DC=EC, DF=EF (§. 406.), und CF=CF (§. 27.): So iſt der △ DCF=△ECF, und der ∠x=∠y (§. 507.). Da nun der ∠x=∠y, DF=EF (§. 406.), und GF=GF (§. 27.): So iſt der △ DGF=△ EGF, und der ∠m=∠n, folglich FG perpendicular auf AB (§. 414. und 416.).

Andere Auflöſung.

Man mache mit einer beliebigen, aber einerlei Eröfnung des Cirkels aus C in A und B, Tab. VII. fig. 92, Durchſchnitte in A und B, und aus A und B mit eben einer ſolchen beliebigen Eröfnung Durchſchnitte in D, und ziehe nach C und D die Linie CE: So iſt das Verlangte geſchehen, und aus dem Beweiſe des 515. §. der △ AEC=△ BEC, und der ∠m=dem ∠o (§. 503.), folglich CE perpendicular auf AB (§. 414. und 416.).

§. 525.

Wenn zwei Parallellinien AB und CD, Tab. VII. fig. 94, von einer dritten Linie GF durchſchnitten werden: So ſind 1) die Wechſelwinkel

x und y

x und y einander gleich, 2) der äuſere **Winkel** m iſt gleich dem **innern Winkel** y, und 3) die zwei **innern Winkel** u und y machen zuſammen genommen 180°.

Beweis.

1) Wenn zwei Linien einander parallel ſind: So müſſen ſie ſtets einerlei Weite von einander behalten (§. 409.). Wenn man dieſemnach FE auf CD, und HG auf AB perpendicular ziehet: So iſt FE = HG, und folglich der ∠ FEG = ∠ GHF (§. 416. und 495.). Es iſt alſo FE = HG, der ∠ E = ∠ H, und FG = FG (§. 27.), und derohalben iſt auch der △ FEG = △ FHG, und der Wechſelswinkel x dem Wechſelswinkel y gleich (§. 509.).

2) Der ∠ x = ∠ y (N. 1.), nun iſt aber der ∠ x = ∠ m (§. 492.), und y kan vor x geſezt werden (§. 25.), und daher iſt auch der äuſere ∠ m = dem innern ∠ y.

3) Der ∠ m = ∠ y (N. 2.), es iſt aber m + u = 180° (§. 489.), und y kan vor m geſezt werden (§. 25.), und daher machen auch die inneren Winkel u und y 180° aus.

§. 526.

Wenn zwei Linien AB und CD, Tab. VII. fig. 94, von einer dritten GF durchſchnitten wer-

den, ſo daß entweder 1) die Wechſelswinkel x und y, oder 2) der äuſere Winkel m und der innere Winkel y, gleich ſind, oder auch 3) die beiden inneren Winkel u und y 180° ausmachen: So ſind die Linien AB und CD einander parallel.

Beweis.

1) Man richte durch den Punkt G eine Perpendicularlinie GH auf (§. 521), und trage die Linie HF aus G in E, von F in E aber ziehe man eine gerade Linie EF (§. 459.). Da nun vermöge unſeres angenommenen Sazzes der $\angle x = \angle y$, GE $=$ HF und GF $=$ GF (§. 27.): So iſt auch der $\triangle FGE = \triangle HFG$ (§. 503.), und der $\angle E = \angle H$. Nun iſt aber GH auf CD perpendicular aufgerichtet worden, und daher iſt auch H ein rechter Winkel (§. 416.), und weil der $\angle H = \angle E$, auch E ein rechter Winkel (§. 495.) Es iſt alſo auch die Linie EF perpendicular auf AB, und, weil der $\triangle FGE = \triangle HFG$, die Perpendicularlinie EF der Perpendicularlinie GH gleich, folglich CD $\#$ AB (§. 409. und 410.), wenn die Wechſelswinkel x und y einander gleich ſind.

2) Da unſerer angenommenen Bedingung nach der äuſere Winkel m dem innern Winkel y gleich iſt, und der $\angle x =$ dem $\angle m$ (§. 492.), x aber vor m geſezt werden kan (§. 25.): So iſt auch der $\angle x = \angle y$. Nun haben wir aber ſchon bei N. 1. erwieſen, daß

wenn

wenn der $\angle x =$ dem $\angle y$, alsdann AB und CD parallel ſind, und daher iſt auch $AB \# CD$, wenn der äuſere Winkel m dem innern Winkel y gleich iſt.

3) Weil unſerer angenommenen Bedingung nach $u + y = 180^{\circ}$, und $m + u = 180^{\circ}$ (§. 489.): So iſt auch der $\angle u + y =$ dem $\angle m + u$ (§. 39.). Nun iſt aber $u = u$ (§. 27.), und daher iſt auch $m = y$ (§. 87.): Wenn aber der äuſere Winkel m dem innern Winkel y gleich iſt; So iſt $AB \# CD$ (N. 2.), und daher iſt auch $AB \# CD$, und es ſind zwei Linien AB und CD, die von einer dritten GF durchſchnitten werden, einander parallel, wenn die innern Winkel u und y 180° ausmachen.

§. 527.

Alle Parallellinien GF und HB zwiſchen den Parallellinien GB und FH, Tab. VII. fig. 94, ſind einander gleich.

Beweis.

Wenn man von G nach H die Linie HG ziehet: So werden die Parallellinien GB und FH, und FG und HB von dieſer Linie durchſchnitten, und daher iſt der $\angle BGH = \angle GHF$, und der $\angle FGH = \angle BHG$, es iſt aber auch $GH = GH$ (§. 27.), und daher iſt der $\triangle BGH = \triangle GHF$, und $BH = GF$ (§. 505.).

§. 528.

Einen Winkel BAC, Tab. VIII. fig. 95, mit einer Kette, oder einer Schnur auf dem Feld von einem Ort auf den andern zu tragen.

Auflöſung.

1) Man meſſe auf dem Schenkel AC mit einer Kette, oder einer Schnur, eine beliebige Länge AD, auf dem Schenkel AB hingegen eine beliebige Länge AE, zugleich aber auch die Linie DE.

2) Man meſſe auf der Linie GH, worauf man den gegebenen Winkel tragen ſoll, aus G in I die Länge AD.

3) Mit der Länge AE mache man aus G einen kleinen Bogen in K, aus I aber mit DE einen andern Bogen, welcher den erſten in einen Punkt durchſchneidet (§. 460.). Jezt

4) ziehe man durch G und K eine gerade Linie GF (§. 459.): So iſt das Verlangte geſchehen.

Beweis.

Da vermöge deſſen, was geſchehen iſt, AD=GI, AE=GK und DE=IK: So iſt der △ADE =△GIK, und der ∠A=∠G (§. 507.).

§. 529.

Mit einer Linie AB, Tab. VIII. fig 96, durch einen Punkt C eine Parallellinie ED zu ziehen.

Erſte

Erſte Auflöſung.

1) Man ziehe aus C in einen beliebigen Punkt F eine gerade Linie CF.

2) Mit einer gefälligen Eröfnung des Cirkels FC mache man aus F einen Bogen CG, und mit eben dieſer Eröfnung aus C einen Bogen FH. Jezt

3) faſſe man die Länge GC, und ſchneide mit dieſer auf dem Bogen FH aus F den Punkt I ab. Endlich

4) ziehe man durch C und I eine gerade Linie ED: So iſt, weil der Winkel x dem Winkel y gleich gemacht worden (§. 497), ED ⌗ AB (§. 526.).

Andere Auflöſung.

1) Man ſezze den einen Cirkelfus in den Punkt C, Tab. VIII. fig. 97, wodurch man mit AB eine gerade Linie beſchreiben ſoll, und thue ihn auf bis in F, ſo daß der Bogen, den man mit CF beſchreibt, die Linie AB nur in einem Punkt berührt (§. 400. und 403.).

2) Mit dieſer Eröfnung des Cirkels mache man aus einem beliebigen Punkt G in der Linie AB einen andern Bogen I, und ziehe durch den Punkt C und den äuſerſten Punkt des Bogens I (§. 403.) eine gerade Linie ED: So iſt das Verlangte geſchehen, und, weil IG = CF (§. 406.), ED ⌗ AB (§. 409.).

Dritte Auflöſung.

1) Man nehme ein Parallellineal FGHI, Tab. VIII. fig. 98, das durch zwei meſſingene Quer-

bänder FH und GI mit Nieten zuſammen gehängt iſt, ſo daß die Querbänder um dieſe Niete beweglich ſind, und lege den einen Teil FG an die Linie AB, womit man durch C eine gerade Linie ziehen ſoll, den andern Teil HI aber verſchiebe man bis an den Punkt C. Jezt

2) ziehe man an dem Teil HI durch C eine gerade Linie DE: So iſt DE ⌗ AB (§. 526.), doch merken wir hierbei an, daß ſich die Querbänder mit der Zeit an den Nieten auslaufen, und alsdann die Linie DE der Linie AB nicht parallel wird.

Vierte Auflöſung.

Soll man auf dem Felde durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Linie eine Parallellinie ziehen: So ſtelle man das Aſtrolabium in einen angenommenen Punkt F, Tab. VIII. fig. 96, und meſſe den Winkel CFB (§. 488.), dieſen Winkel aber trage man in C, ſo daß CF ein Schenkel iſt, und laſſe in C und I einen Pfahl ſchlagen (§. 497.): So iſt das Verlangte geſchehen. Trägt man den Winkel BFC mit einer Schnur, oder einer Kette, in C, ſo daß CF ein Schenkel iſt (§. 528.), und ſchlägt in I und C Pfähle: So geſchiehet ebenwol das, was verlangt worden.

Oder

1) Man meſſe mit einer Schnur, oder einem Richtſcheid die Linie CF, Tab. VIII. fig. 97, ſo daß CF, wenn

wenn man mit dieſer Länge einen Bogen macht (§.460), dieſer Bogen die Linie AB nur in einem Punkt F berührt.

2) Mit dieſer Länge beſchreibe man aus einem angenommenen Punkt G einen Bogen I (§. 460.), und ſtekke in C, und den äuſerſten Punkt des Bogens I einen Pfahl (§.403.): So iſt geſchehen, was man verlanget hat.

Wenn der Punkt C, Tab. VIII. fig. 99, bei der andern und dritten Auflöſung zu weit von AB entfernt iſt, und man nicht auf einmal den Punkt C erreichen kan: So ziehet man erſt durch einen nach Gefallen angenommenen Punkt H mit AB eine Parallellinie FG, alsdann aber mit dieſer durch C eine Parallellinie ED, die dann AB parallel iſt.

Fünfte Auflöſung.

Iſt die Weite EF, Tab. VIII. fig. 100, nach der man mit AB auf dem Papier, oder dem Felde eine Parallellinie ziehen ſoll, gegeben: So mache man mit dieſer Weite aus zwei nach Gefallen angenommenen Punkten H und E Bogen in I und F, und ziehe, oder ſtekke durch die äuſerſten Punkten I und F (§.403.) eine gerade Linie CD (§.459.): So iſt die Aufgabe aufgelöſt. Stekt man auſerdem auf dem Felde in den Punkt H einen rechten Winkel BHI, und in den Punkt E einen rechten Winkel HEF ab, und miſt

miſt auf den Schenkeln HI und EF die gegebene Entfernung der Parallellinie ab: So iſt das Verlangte auch geſchehen.

§. 530.

Aus einer gegebenen Linie einen gleichſeitigen Triangel zu machen.

Erſte Auflöſung.

1) Soll man auf dem Papier einen gleichſeitigen Triangel machen: So ziehe man eine gerade Linie AB, Tab. VIII. fig. 101 (§. 459.), und trage aus A in B die gegebene Linie.

2) Man ſezze den einen Cirkelfus in A, und thue den andern auf bis in B, mit dieſer Eröfnung des Cirkels aber beſchreibe man aus A einen Bogen x, und aus B einen Bogen y: So werden ſich dieſe Bogen in C durchſchneiden (§. 502.). Jezt

3) ziehe man von A in C, und von B in C eine gerade Linie: So iſt der gleichſeitige Triangel ABC gemacht.

Andere Auflöſung.

1) Wenn man einen gleichſeitigen Triangel auf dem Felde abſtekken ſoll: So mache man aus den Punkten A und B der Linie AB, Tab. VIII. fig. 101, wornach man einen gleichſeitigen Triangel abſtekken will, mit einer Schnur, die ſo lang als AB, und an dem einen Ende an einen ſpizzen Pfahl gebunden iſt,

iſt, wie vorhin aus A und B einen Durchſchnitt in C (§. 460.). Nunmehr

2) ſchlage man in die Punkten A, B und C kleine Pfähle, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

Beweis.

Weil man mit AC=AB aus A einen Bogen in C, mit BC=AB aber aus B einen Bogen in C gemacht hat: So iſt auch in C ein Durchſchnitt entſtanden (§. 502.), und dieſemnach müſſen die Linien AC und BC in dem dritten Punkt C zuſammen ſtoſen (§. 426.). Da nun AB=AC=BC, weil ſie Radii eines Cirkels, und alle dieſe einander gleich ſind (§. 406.): So iſt auch ein Triangel entſtanden, worinnen AB=AC=BC, und derohalben wird auch durch die gegebene Auflöſung ſtets ein gleichſeitiger Triangel aufgeriſſen (§. 513.).

§. 531.

Aus zwei gegebenen ungleichen Linien AB und CD, wovon AB die Grundlinie, CD aber mehr als halb ſo gros, als AB iſt (§. 501.), Tab. VIII. fig. 102, einen gleichſchenkelichten Triangel zu machen.

Erſte Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie EF, man faſſe mit dem Cirkel die Grundlinie AB, und trage ſie aus E in F. Jezt

2) faſſe man auch die Linie CD, und mache damit aus E einen Bogen x, aus F aber mit eben dieſer Eröfnung einen Bogen y. Endlich

3) ziehe man aus E in den Punkt G, worinnen ſich dieſe beide Bogen durchſchneiden, eine Linie EG, aus F aber in eben dieſen Punkt eine andere Linie FG: So iſt der verlangte Triangel gemacht.

Andere Auflöſung.

Auf dem Felde verfahre man eben ſo, und beſchreibe mit der Länge CD die Bogen x und y mit einer Schnur, die CD gleich iſt (§. 460.), und ſchlage in E, F, und G, Pfähle.

Beweis.

Weil man mit CD aus E und F Bogen in G gemacht hat: So entſtehet bei G ein Durchſchnitt (§. 502.), und es ſtoſen alſo EG und FG in dem Punkt G zuſammen, und machen einen Triangel (§. 426.). Da nun EG = FG = CD (§. 406.), AB und CD aber ungleich ſind: So entſtehet auch ein Triangel, worinnen zwei Seiten einander gleich ſind, und derohalben wird auch durch die gegebene Auflöſung ſtets ein gleichſchenkelichter Triangel gemacht (§. 513.).

§. 532.

Aus drei gegebenen Seiten AB, CD und EF eines Triangels, Tab. VIII. fig. 103. und 104, worun-

worunter keine Seite der andern gleich iſt, zwei aber ſtets gröſer ſind, als die dritte, einen ungleichſeitigen Triangel zu machen.

Erſte Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie GH (§. 459.), und nehme eine von den gegebenen Seiten, hier AB, zu der Grundlinie an, dieſe Linie aber trage man aus G in H. Jezt

2) faſſe man die Linie CD, und mache über GH aus G einen Bogen x, man faſſe aber auch EF, und mache aus H einen Bogen y, welcher den vorigen in I durchſchneidet (§. 502.). Nunmehr

3) ziehe man aus G und H in den Durchſchnitt I gerade Linien: So iſt der verlangte Triangel GHI gemacht.

Andere Auflöſung.

Auf dem Felde beſchreibe man mit den gegebenen Seiten CD, EF aus G und H die Bogen x und y mit einer Schnur (§. 460.), und ſchlage in die Punkten G, H und I Pfähle.

Beweis.

Wenn man AB zur Grundlinie annimt, und mit CD aus G einen Bogen x, aus H aber mit EF einen Bogen y beſchreibt: So entſtehet bei I ein Durchſchnitt (§. 502.), und es ſtoſen alſo GI und HI in I zuſammen, und machen einen Triangel (§. 426.).

(§. 426.). Weil nun GH ſo gros, als AB, GI ſo gros als CD, und HI ſo gros, als EF genommen worden (§. 406.), und aus drei Linien eines Triangels nur ein Triangel gemacht werden kan (§. 513.), keine aber von den gegebenen der andern gleich iſt, zwei aber gröſer, als die dritte ſind: So wird auch durch die gegebene Auflöſung ſtets ein ungleichſeitiger Triangel gemacht.

§. 533.

Aus zwei gegebenen Seiten AB und AC, Tab. VIII. fig. 105, und einem Winkel x, der von beiden Seiten eingeſchloſſen wird, einen Triangel zu machen.

Erſte Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie DE, und nehme AB zur Grundlinie an, dieſe Linie aber trage man aus D in E.

2) Man mache den Winkel EDF dem Winkel x gleich (§. 497.), und trage die Linie AC aus D in F. Endlich

3) ziehe man von E nach F eine gerade Linie EF: So iſt der verlangte Triangel aus den gegebenen Stükken gemacht (§. 504.).

Andere Auflöſung.

Auf dem Felde trage man AB aus D in E, man

mache

mache den ∠ EDF = dem ∠ x (§. 497. und 528.), und ſchlage in D, E und F Pfähle (§. 504.)

§. 534.

Aus einer Seite AB, Tab. VIII. fig. 106, und zwei daran befindlichen Winkeln CDE, und FGH einen Triangel IKL zu machen.

Erſte Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie IK, und trage die Linie AB aus I in K.

2) Man mache den Winkel LKI dem Winkel CDE, oder FGH, und den Winkel LIK dem Winkel FGH, oder CDE gleich: So werden ſich die Schenkeln KL und IL in L durchſchneiden, und es iſt geſchehen, was man verlangt hat (§. 506.).

Andere Auflöſung.

Auf dem Felde verfahre man eben ſo, man trage nemlich AB in IK, und mache den ∠ I = ∠ G, und den ∠ K = ∠ D, in I, K und L aber ſchlage man Pfähle.

§. 535.

Wie man aus zwei Linien, die einen ſpizzen Winkel in einem rechtwinkelichten Triangel einſchlieſen, oder aus einer Seite, und zwei Winkeln, wovon einer dieſer Seite entgegen ſtehet, einen Triangel machen ſoll, das erhellet aus dem 510. und 512. §.

§. 536.

§. 536.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. VIIII. fig. 107, zu denen man nicht gerade zu, aber aus einem angenommenen Stand C kommen kan.

Auflöſung.

1) Man ſtekke der zu meſſenden Weite AB gegen über in einen nach Gefallen angenommenen Punkt C einen Staab.

2) Man meſſe die Linie CA, und trage ihre Länge aus C in E dergeſtalt zurük, daß ein Staab, den man in E ſtekt, mit dem Staab in C, und dem Ort A eine gerade Linie ausmacht. Jezt

3) meſſe man auch die Linie CB, und trage dieſelbe aus C in D ſo zurük, daß B, C und D eine gerade Linie ausmachen. Endlich

4) meſſe man die Linie DE, die AB gleich iſt: So iſt das Verlangte geſchehen.

Beweis.

Der $\angle m = \angle n$ (§. 492.), die Linie $AC = CE$, $BC = CD$, und derohalben iſt der $\triangle CED = \triangle ABC$, folglich auch $DE = AB$ (§. 503.).

§. 537.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. VIIII. fig. 108, wenn man nur zu einem A kommen kan.

Auf-

Aufloͤſung.

1) Man ſtekke in C nach Gefallen einen Staab, und meſſe die Linie AC, dieſe Linie aber meſſe man aus C in D zuruͤk, und zwar ſo, daß D, C und A in eine gerade Linie zu ſtehen kommen. Jezt

2) trage man den Winkel A in D (§. 497. und 528.), und ſtekke in den Schenkel DE nach Gefallen einen Staab E. Iſt dieſes

3) geſchehen: So nehme man einen andern Staab F, und gehe mit demſelben ſo lang vor- und ruͤkwaͤrts, bis er ſowol mit den Staͤben ED, als dem Staab C, und dem Ort B, in eine gerade Linie zu ſtehen komt. Endlich

4) meſſe man die Linie DF, die AB gleich iſt; So iſt die verlangte Weite gemeſſen.

Beweis.

Der ∠ n = ∠ o (§. 492.), der ∠ D = ∠ A, CD = AC, und daher iſt auch der △ CDF = △ ABC, und folglich DF = AB (§. 505.).

§. 538.

Die Breite AB eines Fluſſes zu meſſen, Tab. VIIII. fig. 109.

Aufloͤſung.

1) Man ſtekke in einer gefaͤlligen Weite von dem Ufer einen Staab in C, einen andern aber an das Ufer B.

2) In

2) In D ſtekke man einen Staab ſo, daß man CD zurük tragen kan, iezt aber meſſe man CD, und meſſe dieſe Länge aus D in E dergeſtalt, daß C, D und E in eine Linie zu ſtehen kommen.

3) Man trage den Winkel ACD in E, und ſtekke auf den Schenkel EG einen Staab F (§. 497. und 528.).

4) Man nehme einen Staab G, und gehe damit ſo lang vor- und rükwärts, bis er mit der Linie DA und FE zugleich in eine gerade Linie zu ſtehen komt. Endlich

5) trage man die Linie BC aus E in F, und meſſe die Linie FG, oder man meſſe BC und EG, und ziehe iene Linie von dieſer ab: So iſt FG=AB, und die Breite des Fluſſes gemeſſen.

Beweis.

Der ∠ ADC = ∠ EDG (§. 492.), der ∠ ACD = ∠ DEG, CD = DE, und daher iſt der △ ACD = △ DEG, folglich AC = EG (§. 505.). Nun iſt aber EF = BC, und daher iſt auch FG = AB (§. 87.).

§. 539.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. VIIII. fig. 110, wenn man zu keinem kommen kan.

Auf-

Aufloͤſung.

1) Man nehme vor der zu meſſenden Weite AB nach Gefallen zwei Staͤnde C und D an, und trage die Laͤnge CD aus C in E, aber ſo, daß D, C und E eine gerade Linie ausmachen (§. 459.).

2) Man trage den Winkel ADC in E, und nehme einen Staab F, mit dieſem aber gehe man ſo lang vor- und ruͤkwaͤrts, bis er mit AC in eine gerade Linie, zugleich aber auch auf den Schenkel EF und in F zu ſtehen komt.

3) Den Winkel BEC trage man in D, und nehme einen Staab G, mit dieſem aber gehe man ſo lang hin und her, bis er mit der Linie BC in eine gerade Linie, und zugleich auf den Schenkel DG in den Punkt G zu ſtehen komt. Endlich

4) meſſe man die Laͤnge GF = AB: So iſt die verlangte Weite gemeſſen.

Beweis.

Es iſt 1) DC = CE, der ∠ m = ∠ n, der ∠ o = ∠ r (§. 492.), und derohalben iſt der △ ADC = △ CEF, und folglich CF = AC (§. 505.). 2) DC = CE, der ∠ s = ∠ t, der ∠ u = ∠ v, und daher iſt auch der △ BCE = △ DCG, folglich GC = BC (§. 505.). Es iſt alſo CF = AC (N. 1.), GC = BC (N. 2.), und der ∠ x = ∠ C (§. 492.) eben darum aber iſt der △ CFG = △ ABC, und GF = AB (§. 503.).

§. 540.

Eine Höhe AB zu meſſen, Tab. X. fig. 111, zu der man kommen kan.

Aufloͤſung.

1) Man ſtekke in einen nach Gefallen angenommenen Stand C einen ſenkrechten Staab CD, und lege ſich hinter dieſen Staab auf den Rükken, dergeſtalt, daß man die Spizze B erblikket, wenn man mit dem Auge E über den Staab DC weg ſiehet.

2) Die Linien CE, CD und DE meſſe man, und trage durch deren Hülfe den Winkel DEC an die Linie EF, ſo daß der ∠ FEG = ∠ DEC (§. 528.).

3) Man meſſe die Linie AE, und trage ſie aus E in F, in den Punkt F aber trage man einen rechten Winkel EFG (§. 497.). Jezt

4) gehe man mit einem Staab in G, und rukke denſelben ſo lang hin und her, bis er mit dem Schenkel EI des Winkels E, zugleich aber auch mit dem Schenkel FH des Winkels F in eine gerade Linie zu ſtehen komt. Nunmehr

5) meſſe man FG = AB: So iſt die verlangte Höhe gemeſſen.

Beweis.

Die Linie EF = EA, der ∠ DEC = ∠ FEG, der ∠ EFG = ∠ BAE, und derohalben iſt der △ EFG = △ BAE, und FG = AB (§. 505.).

§. 541.

Die Höhe AB zu meſſen, Tab. X. fig. 112, zu der man nicht kommen kan.

Auflöſung.

1) Man ſtekke nach Gefallen einen ſenkrechten Staab CD in C, und lege ſich dergeſtalt hinter dieſen Staab auf den Rükken, daß die Punkten B und D, und das Auge E in eine gerade Linie zu liegen kommen, ſogleich aber meſſe man auch EC, CD und ED.

2) In einer gefälligen Entfernung von dem Staabe CD ſtekke man einen andern ſenkrechten Staab GF, und lege ſich eben ſo hinter denſelben, daß die Punkten B, F und H eine gerade Linie ausmachen, aber auch hierbei meſſe man HG, GF und HF. Jezt

3) meſſe man die Standlinie EH, und trage dieſelbe aus H in I.

4) Man trage den Winkel DEC an die Linie IH und zwar in I, den Winkel FHG aber in H (§. 528.).

5) Man gehe mit einem Staab in L, und rukke denſelben ſo lang hin und her, bis er ſowol mit dem Schenkel HM, als dem Schenkel IN eine gerade Linie ausmacht. Nunmehr

6) ſtekke man in dem Punkt K mit dem Aſtrolabio einen rechten Winkel ab (§. 497.), ſo daß der Schenkel KI in die Linie IH fält, der Schenkel KL aber durch den Punkt L gehet. Endlich

7) meſſe man KL: So iſt die geſuchte Höhe gemeſſen.

Beweis.

Weil der ∠ KIN = ∠ BEC: So iſt der ∠ LIH = ∠ BEH (§. 490.). Es iſt aber auch der ∠ IHM = ∠ FHG, und EH = HI, und derohalben iſt auch der △ HIL = △ BHE, und IL = BE (§. 505.). Weil nun IL = BE, der ∠ KIL = ∠ BEA, und der ∠ IKL = ∠ BAE (§. 495.): So iſt auch der △ IKL = △ ABE, und KL = AB (§. 511.).

§. 542.

In einem ieden Triangel ABC, Tab. X. fig. 113, machen die Grade der drei Winkel I, II, und III. die Summe von 180° aus.

Beweis.

Man ziehe durch die Spizze C des Triangels ABC mit der Grundlinie AB eine Parallellinie DE (§. 529.): So ſind die Winkel 1 und I, und 2 und II Wechſelswinkel (§. 525.). Weil nun der ∠ 1 = ∠ I, der ∠ 2 = ∠ II (§. 525.), und der ∠ III = ∠ III (§. 27.): So iſt auch der ∠ 1 + 2 + III = ∠ I + II + III (§. 85.). Nun iſt aber der ∠ 1 + III + 2 = 180° (§. 461. und 489.), und daher iſt auch der ∠ I + II + III = 180° (§. 25.).

§. 543.

In einem Triangel kan nicht mehr, als ein rechter Winkel ſein: Denn wenn zwei rechte Winkel in einem Triangel wären; So würden dieſe ſchon 180° ausmachen (§. 496.), und, weil alle drei Winkel in einem Triangel nur 180° haben (§. 542.), vor den dritten nichts übrig bleiben. Iſt daher in einem Triangel ein rechter Winkel; So ſind die beiden übrigen ſpiz: Denn ſie zuſammen machen nur noch 90°, und einen rechten Winkel aus (§. 496.).

§. 544.

Wenn dieſemnach zwei Linien AB und CD, Tab. X. fig. 114, auf einer dritten EF perpendicular ſtehen: So können ſie nicht zuſammen ſtoſen, und wenn ſie auch in das Unendliche verlängert würden, weil ſie zu beiden Seiten rechte Winkel machen (§. 416.), und in einem Triangel keine zwei rechte Winkel ſein können (§. 543.), eben darum aber, weil dieſe beide Linien niemals zuſammen ſtoſen können, und folglich ſtets einerlei Weite von einander behalten, ſind ſie auch einander parallel (§. 409.).

§. 545.

In einem Triangel kan nicht mehr, als ein ſtumpfer Winkel ſein: Denn weil zwei ſtumpfe Winkel

mehr, als 180° ausmachen (§. 496.); So würde vor den dritten weniger als nichts übrig bleiben, in einem ieden Triangel aber haben alle drei Winkel zuſammen addirt 180° (§. 542.). Wenn demnach in einem Triangel ein ſtumpfer Winkel iſt: So müſſen die beiden übrigen Winkel ſpiz ſein (§. 496.).

§. 546.

Wenn man in einem Triangel einen Winkel von 180° abziehet: So bleibet die Summe der beiden übrigen Winkel übrig: Denn die Summe der lezteren Winkel und der abgezogene Winkel machen 180° aus (§. 98. und 542.).

§. 547.

Wenn man die Summe zweier Winkel in einem Triangel von 180° abziehet; So bleibt der dritte Winkel übrig: Denn die Summe der zwei Winkel, und der dritte Winkel machen 180° aus (§. 98. und 542.).

§. 548.

Wenn zwei Winkel in einem Triangel zwei Winkeln in einem andern Triangel gleich ſind: So iſt auch der dritte Winkel in dem einen Triangel dem dritten Winkel in dem andern Triangel gleich (§. 87.).

§. 549.

Wenn man eine Seite in einem Triangel verlängert: So iſt der äuſere Winkel, welchen die verlängerte, und die daran liegende Seite des Triangels mit einander machen, ſo gros, wie die beiden inneren Winkel des Triangels, die ienem Winkel entgegen ſtehen.

Beweis.

Man verlängere die Seite AC des Triangels ABC, Tab. X. fig. 115, bis in D: So iſt der ∠ III + IIII = 180° (§. 489.), und der ∠ I + II + III = 180° (§. 542.), folglich der ∠ III + IIII = ∠ I + II + III (§ 39.). Ziehet man nun beiderſeits den ∠ III = ∠ III ab (§. 27.): So iſt der ∠ IIII = ∠ I + II (§ 87.).

§. 550.

In einem gleichſchenkelichten Triangel ſind 1) die Winkel m und n an der Grundlinie AB einander gleich, Tab. XI. fig. 116, 2) die Linie CD, welche die Spizze des Winkels C in zwei gleiche Teile teilet, teilet auch die Grundlinie AB, auſer dem 3) aber auch den ganzen Triangel ABC in zwei gleiche Teile ADC und DBC, und endlich 4) ſtehet dieſe Linie auf der Grundlinie AB perpendicular.

Beweis.

Man teile den Winkel C in zwei gleiche Teile (§.518): So iſt in den Triangeln ADC und DBC die Linie AC=BC (§.427.), CD=CD (§.27.), und der ∠o=∠r, folglich der △ADC=△DBC (§.503). Iſt aber dieſes: So iſt auch 1) der ∠m=∠n, 2) AD=DB, 3) der △ADC=△DBC, und 4) der ∠x=∠y (§.503.), eben wegen der Gleichheit der leztern Winkel aber iſt CD perpendicular auf AB (§.414.).

§. 551.

Wenn in einem Triangel ABC, Tab. II. fig. 24, AB=AC, und der ∠A=90°, und alſo ABC ein rechtwinkelichter Triangel iſt: So iſt der ∠B=∠C (§.550.), und weil dieſe noch 90° ausmachen (§.543.), der ∠B=45°, und der ∠C=45°.

§. 552.

Weil man in einem gleichſeitigen Triangel eine Seite nach der andern zur Grundlinie annehmen, und die beiden übrigen Seiten, als die gleichen Schenkel eines gleichſchenkelichten Triangels annehmen kan: So ſind auch in einem gleichſeitigen Triangel alle Winkel einander gleich, und er iſt eine reguläre Figur (§.425. und 427.).

§. 553.

§. 553.

Es hat dieſemnach, da alle Winkel in einem Triangel 180° ausmachen (§. 542.), ein ieder Winkel in einem gleichſeitigen Triangel 60°: Denn $180^{\circ}: 3 = 60^{\circ}$.

§. 554.

Wenn in einem Triangel ABC die Winkel m und n an der Grundlinie AB einander gleich ſind, Tab. XI. fig. 116: So iſt 1) dieſer Triangel ein gleichſchenkelichter Triangel, 2) die Linie CD, welche aus der Spizze C perpendicular auf die Grundlinie gezogen wird, teilet den Winkel C, 3) die Grundlinie AB, und 4) den ganzen Triangel ABC in zwei gleiche Teile ACD und BDC.

Beweis.

Man ziehe aus der Spizze C auf AB eine Perpendicularlinie CD (§. 524.): So iſt der $\angle x = \angle y$ (§. 416.). Es iſt alſo in den Triangeln ADC und BDC der $\angle x = \angle y$, der $\angle m = \angle n$ (vermöge unſerer Bedingung), und CD = CD (§. 27.), folglich der $\triangle ADC = \triangle BDC$ (§. 511.): Iſt aber dieſes; So iſt auch 1) AC = BC, und alſo der Triangel ABC ein gleichſchenkeligter Triangel, 2) der $\angle o = \angle r$, 3) AD = DB, und 4) der $\triangle ADC = \triangle BDC$.

§. 555.

Weil in einem ieden Triangel alle Winkel zuſammen addirt 180° ausmachen (§. 542.), und in einem gleichſeitigen Triangel alle Winkel einander gleich ſind (§. 552.): So ſind auch an einer ieden Linie, die man an dem gleichſeitigen Triangel zur Grundlinie annimt, die Winkel einander gleich. Nun ſind aber die Seiten, welche dieſen Winkeln entgegen ſtehen, einander gleich (§. 554.), und daher iſt auch ein Triangel ein gleichſeitiger Triangel, wenn in ihm alle Winkel gleich ſind.

§. 556.

Wenn alſo in einem Triangel ein ieder Winkel 60° hat: So iſt er ein gleichſeitiger Triangel (§. 552.).

§. 557.

In einem Triangel ADC, Tab. XI. fig. 117, ſtehet die gröſte Seite dem gröſten Winkel, und die kleinſte Seite dem kleinſten Winkel entgegen.

Beweis.

Wenn in dem Triangel ABC die Seite AB > AC: So iſt AC einem Teil von AB gleich, und AD = AC (§. 32.). Ziehet man nun von C in D eine gerade Linie: So iſt, weil AD = AC, der Triangel ADC ein gleichſchenkelichter Triangel (§. 427.), und alſo der ∠ m = ∠ n (§. 550.). Weil nun

nun der $\angle n > \angle B$ (§ 549.): So iſt auch der $\angle m > \angle B$ (§. 25), der $\angle m$ iſt nur ein Teil von dem Winkel C, und daher iſt auch der $\angle C > \angle B$, und eben ſo kan erwieſen werden, daß der $\angle C > \angle A$, Tab. XI. fig. 118, und es ſtehet alſo in einem Triangel die gröſte Seite dem gröſten Winkel, und die kleinſte Seite dem kleinſten Winkel entgegen.

§. 558.

Wenn alſo die Winkel in einem Triangel ungleich ſind: So iſt die Seite, welche dem gröſten Winkel entgegen ſtehet, gröſer als die, welche dem kleineren Winkel entgegen geſezt iſt, und es iſt in einem rechtwinkelichten Triangel, die Hypothenuſa, die dem rechten Winkel entgegen ſtehet, in einem ſtumpfwinkelichten Triangel aber die Seite die gröſte, die dem ſtumpfen Winkel entgegen geſezt iſt (§. 543. und 545.).

§. 559.

In einem Cirkel iſt der Winkel, der mit ſeiner Spizze in dem Mittelpunkt des Cirkels ſtehet, zweimal ſo gros, als wie der Winkel, welcher mit ſeiner Spizze in der Peripherie des Cirkels befindlich iſt, wenn nur beide Winkel mit ihren Schenkeln auf einerley Bogen ſtehen.

Beweis.

I.) Wenn ein Schenkel CD des Winkels an der Peri-

Peripherie, Tab XI. fig. 119, auf einen Schenkel BD des Winkels an dem Mittelpunkt fält: So iſt in dem Triangel ABC die Seite AB = BC (§. 406.), folglich der ∠x = ∠y (§. 550.), nun iſt aber der ∠o = ∠x + y (§. 549.), und daher iſt auch der ∠o = ∠x + x = ∠2x.

II.) Wenn ein Schenkel DB des Winkels an der Peripherie, Tab. XI. fig. 120, einen Schenkel CE des Winkels an dem Mittelpunkt durchſchneidet, und von dem Punkt B, worinnen die Spizze des Winkels an der Peripherie befindlich iſt, durch den Mittelpunkt C ein Durchmeſſer gezogen wird: So iſt der Winkel m + n ein Winkel an dem Mittelpunkt, der ∠r + s aber ein Winkel an der Peripherie (N. I.), und folglich der ∠m + n = ∠2r + 2s (N. I.). Weil nun der ∠m = 2r (N. I.): So iſt auch der ∠m + n − m = ∠2r + 2s − 2r (§. 87.), und alſo der ∠n = 2s.

III.) Wenn ein Schenkel des Winkels an der Peripherie weder auf einen Schenkel des Winkels an dem Mittelpunkt fället, noch denſelben durchſchneidet: So iſt, wenn man aus der Spizze D des Winkels an der Peripherie, Tab. XI. fig. 121, durch den Mittelpunkt A des Cirkels eine gerade Linie DE ziehet, der ∠o = ∠2m, und der ∠r = ∠2n, und alſo der ∠o + r = ∠2m + 2n (§. 85.).

§. 560.

§. 560.

Weil die Winkel ABD, DCE und BAC, Tab. XI. fig. 119, 120 und 121, die Bogen AD, DE und BC zu ihrem Maas haben (§. 483.), dieſe Winkel aber zweimal ſo gros ſind, als wie die Winkel ACD, DBE und BDC an der Peripherie: So hat auch ein ieder Winkel an der Peripherie den halben Bogen von dem Cirkel, worauf er ſtehet, zu ſeinem Maas.

§. 561.

Es ſind dieſemnach alle Winkel ABC, ADC und AEC an der Peripherie, Tab. XI. fig. 122, die auf einem Bogen AC ſtehen, einander gleich: Denn ſie alle haben den halben Bogen AC zu ihrem Maas, und Winkel, die einerlei Maas haben, ſind einander gleich (§. 485.).

§. 562.

Wenn ein Winkel ABC an der Peripherie, Tab. XI. fig. 123, auf einem halben Cirkel ADC ſtehet; So iſt er ein rechter Winkel: Denn er hat den halben Bogen, worauf er ſtehet, zu ſeinem Maas, und $180^\circ : 2 = 90^\circ$, 90° aber machen einen rechten Winkel (§. 494.).

§. 563.

Will man dieſemnach probiren, ob ein Winkelhakken richtig iſt; So lege man denſelben dergeſtalt

auf

auf einen halben Cirkel, daß die Spizze C in den Bogen ACB zu liegen komt, Tab. XI. fig. 124, und merke darauf, ob der Schenkel AC durch den Punkt A, der Schenkel CB aber durch den Punkt B gehet: Iſt dieſes; So iſt er richtig: Wo aber nicht; So iſt er falſch (§. 486.).

§. 564.

Wenn ein Winkel ABC an der Peripherie, Tab. XI. fig. 125, auf einem Bogen AC ſtehet, der kleiner iſt, als ein halber Cirkel; So iſt er ein ſpizzer Winkel: Denn er hat nur die Hälfte von dieſem Bogen, und alſo weniger als 90° zu ſeinem Maas (§. 496.).

§. 565.

Wenn ein Winkel ABC an der Peripherie, Tab. XI. fig. 126, auf einem Bogen ADC ſtehet, der gröſer iſt, als ein halber Cirkel; So iſt er ein ſtumpfer Winkel: Denn er hat die Hälfte von dieſem Bogen, und alſo mehr, als 90° zu ſeinem Maas (§. 496.).

§. 566.

In einem Cirkel ſind die Sehnen AB und CD, Tab. XI. fig. 127, welche gleiche Bogen AB und CD haben, einander gleich.

Beweis.

Beweis.

Man ziehe aus dem Mittelpunkt E in die äuſerſten Punkten A und B, und C und D der Sehnen AB und CD die Radii AE, BE, CE und DE: So bekomt man die Triangel ABE und CDE. Weil nun, vermöge unſerer angenommenen Bedingung, der Bogen AB dem Bogen DC gleich iſt; So iſt der ∠m = ∠n (§. 485.), nun iſt aber AE = ED, und BE = EC (§. 406.), und daher iſt auch der △ABE = △CDE, und AB = CD (§. 503.).

§. 567.

Wenn in einem Cirkel die Sehnen AB und CD, Tab. XI. fig. 127, einander gleich ſind: So ſind auch ihre Bogen einander gleich.

Beweis.

Man ziehe wie vorhin die Radii AE, BE, CE und DE: So iſt in den Triangeln ABE und CDE die Seite AE = DE, BE = EC (§. 406.), und vermöge unſerer Bedingung AB = CD, folglich der △ABE = △CDE, und der ∠m = ∠n (§. 507.), alſo auch der Bogen AB = dem Bogen CD (§. 483. 484. und 485.).

§. 568.

Man kan alſo einen Cirkel in gleiche Teile teilen, wenn man 360° durch die Zahl dieſer Teile dividiret, und

und an den Mittelpunkt einen Winkel macht, der die Grade des Quotienten hat, den Bogen aber, welchen er abſchneidet, alsdann ein Cirkel herumträget: Und wenn man einen Cirkel in gleiche Bogen AB, BC, CD, DE, EF und FA teilet, Tab. XI. fig. 128, und von einem Teilungspunkt bis zu dem andern gerade Linien, und alſo die Sehnen AB, BC, CD, DE, EF und FA dieſer Bogen ziehet; So entſtehet eine Figur A B C D E F und A, worinnen alle Seiten einander gleich ſind, weil die Seiten Sehnen von gleichen Bogen ſind (§. 566.). Nun machen aber ſtets zwei Seiten AB und AF einen Winkel aus, und es ſchneiden alle dieſe Winkel in der Figur, weil ihre Schenkel gleich ſind, einen gleich groſen Bogen von dem Cirkel ab, und derohalben ſind auch alle Winkel in dieſer Figur einander gleich (§. 561.). Es entſtehet dieſemnach, wenn man einen Cirkel in gleiche Bogen teilet, und von einem Teilungspunkt bis zu dem andern die Sehnen ziehet, eine Figur, die gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, und alſo eine reguläre Figur (§. 425.). Es kan alſo eine iede reguläre Figur betrachtet werden, als wenn ſie entſtanden wäre, indem man einen Cirkel in gleiche Teile geteilet, und die Sehnen dieſer Bogen gezogen hätte.

§. 569.

§. 569.

Die Perpendicularlinie AB, Tab. XI. fig. 129, welche die Sehne CD in zwei gleiche Teile CE und ED teilet, teilet 1) den Bogen CAD in zwei gleiche Teile CA und AD, und gehet 2) durch den Mittelpunkt des Cirkels.

Beweis.

I. Wenn AB perpendicular auf CD ſtehet, und CD in zwei gleiche Teile CE und ED teilet: So iſt, wenn man von C nach B, und von D nach B gerade Linien ziehet, in den Triangeln CEB und EDB der ∠ r = ∠ s (§. 416.), EB = EB (§ 27.), und CE = ED, folglich der △ CEB = △ EDB, und der ∠ m = ∠ n (§. 503). Nun haben aber gleiche Winkel einerlei Maas (§. 485.), und derohalben iſt auch $\frac{1}{2}$ CA = $\frac{1}{2}$ AD (§. 560.), und der Bogen CA = dem Bogen AD (§. 85.).

II. Unſerem ſo eben geführten Beweis nach iſt der △ CEB = △ EDB, und alſo CB = BD. Es haben aber gleiche Sehnen gleiche Bogen (§. 567.), und daher iſt auch der Bogen CB = dem Bogen BD. Weil nun der Bogen CA = dem Bogen AD (N. I.); So iſt auch der Bogen BC + CA = dem Bogen BD + DA (§ 85.): Und da dieſe Bogen den ganzen Cirkel ausmachen; So iſt auch der Bogen BC + CA = $\frac{1}{2}$ ADBCA, und der Bogen BD + DA = $\frac{1}{2}$ ADBCA, folglich AB

die Sehne von einem halben Cirkel. Nun iſt aber die Sehne AB von einem halben Cirkel ein Diameter, und dieſer gehet durch den Mittelpunkt des Cirkels (§. 407), und daher gehet auch die Perpendicularlinie AB, welche die Sehne CD in zwei gleiche Teile CE und ED teilet, durch den Mittelpunkt des Cirkels.

§. 570.

Wenn man aus dem Mittelpunkt A, Tab. XI. fig. 130, auf die Sehne BC eine Perpendicularlinie AD ziehet: So teilet ſie nicht nur 1) die Sehne BC in zwei gleiche Teile BD und DC, ſondern auch 2) den Bogen BEC in zwei gleiche Teile BE und EC.

Beweis.

I. Wenn AE perpendicular iſt auf BC, und man ziehet die Radii AB und AC: So iſt in den Triangeln ABD und ACD der $\angle r = \angle s$ (§. 416.), $AD = AD$ (§. 27.), und $AB = AC$ (§. 406.), folglich der $\triangle ABD = \triangle ACD$, und $BD = DC$ (§. 509.).

II. Es iſt unſerem Beweis nach der $\triangle ABD = \triangle ACD$, und daher iſt auch der $\angle m = \angle n$ (§. 509.). Nun haben aber gleiche Winkel einerlei Maas (§. 485.), und daher iſt auch der Bogen $BE =$ dem Bogen EC (§. 483.).

§. 571.

Einen Cirkelbogen ABC, Tab XII. fig. 131, in zwei gleiche Teile AC und CB zu teilen.

Aufloͤſung.

1) Man mache aus den Endpunkten A und B des Cirkelbogens ACB mit einer gefaͤlligen Eroͤfnung des Cirkels Durchſchnitte in D und E.

2) Man ziehe durch die Punkten der Durchſchnitte D und E eine gerade Linie DE: So teilet dieſe den Bogen ACB in C in zwei gleiche Teile AC und CB.

Beweis.

Wenn man von A nach B, von A nach C, und von C nach B gerade Linien ziehet: So iſt in den △ AFC und BFC die Linie AF=FB (§. 515.), FC=FC (§. 27.), und der ∠ m=∠ n (§. 515. und 523.), folglich der △ AFC=△ BFC, und AC=CB (§. 503.). Iſt aber dieſes, und ſind AC und CB Sehnen: So iſt auch der Bogen AC= dem Bogen CB (§. 567.).

§. 572.

Durch drei gegebene Punkten A, B, und C, Tab. XII. fig. 132, wodurch ſich keine gerade Linie ziehen laͤſt, einen Cirkel zu beſchreiben.

Aufloͤſung.

1) Man mache mit einer gefaͤlligen Eroͤfnung des

Cirkels aus den Punkten A und B einen Durchſchnitt in D, einen andern aber aus eben dieſen Punkten in E.

2) Durch die Punkten D und E ziehe man eine gerade Linie DE.

3) Aus den Punkten B und C mache man mit einer beliebigen Erófnung des Cirkels einen Durchſchnitt in F, aus eben dieſen Punkten aber auch einen Durchſchnitt in I.

4) Man ziehe durch die Punkten F und I eine gerade Linie FI: So durchſchneiden ſich die Linien DE und FI in dem Punkt H, und dieſer iſt der Mittelpunkt des Cirkels, der durch die Punkten A, B und C gehet. Man ſezze alſo

5) den einen Cirkelfus in H, und thue den andern auf bis in A, mit dieſer Weite aber beſchreibe man einen Cirkel ABCEI und A: So gehet dieſer durch die Punkten A, B und C, und das Verlangte iſt geſchehen.

Beweis.

Wenn man von A nach B, und B nach C die geraden Linien AB und BC ziehet: So ſind dieſes Sehnen eines Cirkels (§. 407.). Nun iſt aber die Linie DE eine Perpendicularlinie, welche die Sehne AB in zwei gleiche Teile teilet (§. 515. und 523.), und daher gehet dieſe Linie durch den Mittelpunkt H des Cirkels (§. 569. N. II.), es iſt aber auch die Linie

FI

FI eine Perpendicularlinie (§. 515. und 523.), und daher gehet auch dieſe durch den Mittelpunkt H des Cirkels (§. 569. N. II.). Weil nun ſowol DE als FI durch den Mittelpunkt des Cirkels gehet, und dieſe Linien eine Neigung zu einander haben, und in einem Punkt zuſammen kommen (§. 411.): So muß der Mittelpunkt des Cirkels in dem Punkt H ſein, worinnen ſich die beiden Linien DE und FI durchſchneiden.

§. 573.

Weil ſtets drei Punkte, die in keiner geraden Linie ſtehen, die Spizzen von einem Triangel ſein können: So kan man auch einen ieden Triangel, als eine in einem Cirkel beſchriebene Figur betrachten (§. 435.). Es ſind alſo in einem Triangel die Winkel ſolche Winkel, deren Spizzen in der Peripherie eines Cirkels ſtehen, und ihre entgegen geſezte Seiten die Sehnen von den Bogen, die von den Schenkeln dieſer Winkel abgeſchnitten werden.

§. 574.

Man kan durch die Aufgabe des 572. §. gar leicht den Mittelpunkt zu einem Cirkelbogen, oder einem Cirkel finden, wenn man in dem Cirkelbogen, oder dem Cirkel drei Punkten nach Gefallen annimt, und alsdann dazu, wie in dem angeführten §. gewieſen worden, den Mittelpunkt findet.

§. 575.

Den Mittelpunkt zu einem Cirkel findet man auch dadurch, wenn man in ihm nach Gefallen zwei Punkten A und B annimt, Tab. XII. fig. 133, und die Sehne AB ziehet, auf dieſe aber in der Mitte eine Perpendicularlinie CD aufrichtet (§. 523.), die von einem Punkt der Peripherie bis zu dem andern reichet, und alsdann dieſe, weil ſie durch den Mittelpunkt gehet, und ein Diameter iſt (§. 407. und 569.), in dem Punkt E in zwei gleiche Teile teilet (§. 515. und 517.), der dann der geſuchte Mittelpunkt des Cirkels iſt (§. 408.).

§. 576.

Auf den Endpunkt A einer geraden Linie AB, Tab. XII. fig. 134, eine Perpendicularlinie AC aufzurichten.

Aufloſung.

1) Man nehme zwiſchen AB über der Linie AB nach Gefallen einen Punkt D an, und ſezze in dieſen Punkt den einen Cirkelfus, den andern aber thue man auf bis in den Punkt A, worinn man die Perpendicularlinie AC fällen ſoll.

2) Man bemerke mit eben dieſer Eröfnung des Cirkels aus D in der Linie AB den Punkt E.

3) An die Punkten E und D lege man ein Lineal, und ziehe durch dieſe Punkten ein gerade Linie EF.

4) Man

4) Man trage die Länge DE mit dem noch unverrükten Cirkel aus D in F. Endlich

5) ziehe man durch die Punkten A und F eine gerade Linie AC: So iſt dieſe die verlangte Perpendicularlinie.

Beweis.

Es kan auf eine iede gerade Linie ein halber Cirkel beſchrieben werden (§. 461.), nun iſt aber, vermöge deſſen, was geſchehen iſt, DA=DE, und DE=DF (§. 406.), und daher kan auch mit DE durch die Punkten E, A und F ein halber Cirkel beſchrieben werden. Es ſtehet dieſemnach der Winkel EAF in einem halben Cirkel EAF, Winkel von der Art aber ſind rechte Winkel (§. 562.), und daher iſt auch der Winkel EAF ein rechter Winkel, folglich AC perpendicular auf AB (§. 415.).

§. 577.

Der Radius AB des Cirkels, Tab. XII. fig. 135, welcher in den Berührungspunkt B des Tangenten BC gezogen iſt, macht mit dem Tangenten einen rechten Winkel.

Beweis.

Wir wollen annehmen, es ſtehe der Radius AB auf BC nicht perpendicular: So kan von A auf CB eine andere Perpendicularlinie gezogen werden (§. 524.). Dieſe Linie ſoll die Linie AC ſein, und

demnach iſt, weil bei C ein rechter Winkel iſt (§. 415.), ACB ein rechtwinkelichter Triangel (§. 428.). Es iſt in einem rechtwinkelichten Triangel die Hypothenuſa, die dem rechten Winkel entgegen ſtehet, die gröſte (§. 558.), und daher iſt AB > AC, es iſt aber AB = AD (§. 406.), und darum iſt auch AD > AC (§. 25.). Nun iſt aber AC das Ganze, und AD der Teil, und es iſt unmöglich, daß der Teil gröſer iſt, als das Ganze (§. 34.), und derohalben macht auch der Radius, welcher den Tangenten des Cirkels in einem Punkt berührt, mit dem Tangenten einen rechten Winkel.

§. 578.

Wenn man dieſemnach aus dem Mittelpunkt des Cirkels auf den Tangenten eine Perpendicularlinie fält: So durchſchneidet dieſe den Tangenten in dem Berührungspunkt.

§. 579.

Durch einen gegebenen Punkt B in der Peripherie eines Cirkels, Tab. XII. fig. 136, den Tangenten BC dieſes Cirkels zu ziehen.

Aufloſung.

1) Man ziehe aus dem Mittelpunkt A in den Berührungspunkt B des zu ziehenden Tangenten BC den Radium AB.

2) In

2) In dem Punkt B richte man eine Perpendicularlinie BC auf (§. 576.): So iſt dieſe der Tangent, welcher den Cirkel in dem Punkt B berührt.

Beweis.

Der Radius des Cirkels, welcher in den Berührungspunkt des Tangenten gezogen wird, macht mit dem Tangenten einen rechten Winkel (§. 577.). Wenn man daher aus dem Mittelpunkt des Cirkels in den gegebenen Berührungspunkt einen Radium ziehet, in dieſem Punkt aber eine Perpendicularlinie aufrichtet: So iſt auch dieſe der verlangte Tangent.

§. 580.

Durch einen gegebenen Punkt A auſerhalb der Peripherie eines Cirkels, Tab. XII. fig. 137, einen Tangenten AC zu ziehen.

Auflöſung.

1) Man ziehe von B in A eine gerade Linie.

2) Man teile die Linie BA in D in zwei gleiche Teile (§. 515.).

3) Man beſchreibe aus D mit BD einen halben Cirkel ACB, welcher den Cirkel in dem Punkt C durchſchneidet (§. 502.). Endlich

4) ziehe man von A nach C eine gerade Linie: So iſt dieſe der Tangent.

Beweis.

Weil ſich über eine iede gerade Linie ein halber

Cirkel beſchreiben läſt (§. 461.), und ACB ein halber Cirkel iſt: So iſt der Winkel ACB ein rechter Winkel (§. 562.). Nun iſt aber der Schenkel BC ein Radius (§. 405.), und daher iſt auch AC ein Tangent (§. 577.).

§. 581.

Wenn in zwei Figuren die Anzahl der Winkel und Seiten gleich iſt, und die gleichnamigten Winkel einander gleich ſind, die gleichnamigten Seiten aber einerlei Verhältnis haben, folglich proportional ſind (§. 211. 217. 401. 418. und 485.): So ſind dieſe Figuren einander ähnlich. Denn da man die Figuren durch nichts als die Zahl der Winkel und der Seiten, die Gleichheit der Winkel, und das Verhalten der Seiten von einander unterſcheiden kan; So ſind auch dieſe Dinge die Merkmale der Figuren: Sind daher dieſe in zwei Figuren einerlei; So ſind auch die Figuren einander ähnlich (§. 19.).

§. 582.

Wenn alſo zwei Figuren einander ähnlich ſind: So haben ſie eine gleiche Anzahl von Winkeln, und Seiten, die gleichnamigten Winkel ſind einander gleich, und die gleichnamigten Seiten haben in beiden Figuren einerlei Verhältnis, und ſind proportional.

§. 583.

Sind in zweien Triangeln die gleichnamigten Winkel einander gleich, und die gleichnamigten Seiten haben einerlei Verhältnis, und ſind proportional: So ſind dieſe Triangel einander ähnlich (§. 211. 217. 418. und 581.).

§. 584.

Wenn zwei Triangel einander ähnlich ſind: So ſind umgewendet die gleichnamigten Winkel einander gleich, und die gleichnamigten Seiten haben einerlei Verhältnis, und ſind proportional (§. 211. 217. 418. und 582.).

§. 585.

Wenn in zweien oder mehreren Triangeln zwei gleichnamigte Seiten einerlei Verhältnis haben, (§. 211.), und proportional ſind (§. 217.), und die gleichnamigten Winkel, die von dieſen Seiten eingeſchloſſen werden, einander gleich ſind (§. 485.); So ſind auch dieſe beiden Triangel einander ähnlich: Denn ſie ſind aus ähnlichen Dingen auf einerley Art erzeugt (§. 401. 485. 503. und 504.), und haben einerlei Merkmale (§. 19.). Es ſind demnach ihre gleichnamigte Winkel einander gleich, und ihre gleichnamigte Seiten haben einerlei Verhältnis (§. 584.).

§. 586.

Wenn in zwei oder mehreren Triangeln zwei gleichnamigte Winkel, die alzeit an einer Seite liegen, einander gleich ſind (§.485.): So ſind dieſe Triangel, weil ſie aus ähnlichen Dingen auf einerlei Art erzeugt worden (§.401.485.505.506. und 548), und alſo einerlei Merkmale haben, einander ähnlich (§. 19.). Es ſind alſo die gleichnamigten Winkel einander gleich (§.542.), und die gleichnamigten Seiten dieſer Triangel haben einerlei Verhältnis, und ſind proportional (§.584.).

§. 587.

Wenn in zwei oder mehreren Triangeln die gleichnamigten Seiten einerlei Verhältnis haben (§.211.), und proportional ſind (§.217.): So ſind die Triangel einander ähnlich: Denn ſie ſind aus ähnlichen Dingen auf einerlei Art erzeugt (§.401.485.507. u. 508.), und ſie haben alſo einerlei Merkmale (§. 19.). Iſt aber dieſes: So ſind auch ihre gleichnamigten Winkel einander gleich (§.584.).

§. 588.

Wenn in zwei oder mehreren Triangeln zwei gleichnamigte Seiten einerlei Verhältnis haben, und proportional ſind (§.211. und 217.), und ein rechter Winkel, welcher in dem einen Triangel einer von

ienen

ienen Seiten gegen über ſtehet, dem gleichnamigten Winkel in den andern Triangeln gleich iſt (§. 485.); So ſind dieſe Triangel, weil ſie aus ähnlichen Dingen auf einerlei Art erzeugt worden (§. 401. 485. 509. und 510.), und alſo einerlei Merkmale haben, einander ähnlich (§. 19.): Und iſt dieſes; So ſind in dieſen Triangeln die gleichnamigten Winkel einander gleich, und die gleichnamigten Seiten haben einerlei Verhältnis, und ſind proportional (§. 584.).

§. 589.

Wenn man in einem Triangel ABC, Tab. XII. fig 138, mit der Grundlinie AB eine Parallellinie DE ziehet: So verhalten ſich die durch dieſe Parallellinie abgeſchnittenen unteren Teile AD und EB eben ſo, wie die oberen Teile CD und CE.

Beweis.

Weil DE mit AB parallel gezogen worden, und die Linie AC die Linien AB und DE durchſchneidet: So iſt der $\angle CDE = \angle CAB$, und der $\angle CED = \angle CBA$ (§. 525.). Weil alſo in den Triangeln ABC und DEC der $\angle D = \angle A$, und der $\angle E = \angle B$: So iſt der $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$, und alſo $AC : CB = CD : CE$ (§. 586.), und $AC : CD = CB : CE$ (§. 233.). Nun iſt aber $AC - CD : CD = CB - CE : CE$ (§. 380. N. 5.), und $AC - CD$

$= AD$

=AD (§. 76.), und daher iſt auch AD: CD =CB—CE: CE (§. 25.), es iſt aber auch CB—CE =EB (§. 76.), und daher iſt AD: CD=EB: CE (§. 25.), und in dieſer Proportion AD: EB=CD: CE (§. 233.).

§. 590.

Eine gerade Linie DE, Tab. XII. fig. 139, **in eine beſtimte Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.**

Aufloſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, und trage aus A in B die beſtimte Anzahl von gleichen Teilen, in unſerer Figur die Anzahl drei aus A in F, aus F in G und aus G in B.

2) Man mache aus AB einen gleichſeitigen Triangel ABC (§. 530.).

3) Man faſſe die Linie DE, die man in eine beſtimte Anzahl von gleichen Teilen teilen ſoll, und trage ſie aus C in E, und aus C in D, und ziehe in dem Triangel ABC die Linie ED.

4) Aus den Teilungspunkten F und G ziehe man in die Spizze C des Triangels ABC gerade Linien FC und GC: So iſt die Linie EH der verlangte eine gleiche Teil, und $\frac{1}{3}$ von ED.

Beweis.

I. Es iſt CA=CB, und CE=CD, weil ſie einander gleich gemacht worden, eben daher aber iſt CA: CB=CE: CD (§. 203. und 217.). Nun iſt

iſt aber in den Triangeln ACB, und CED der ∠C, der beiden Triangeln gemein iſt, =∠C (§. 27.), und daher iſt auch der △ACB ∽ △CED, und CE: ED=CA: AB (§. 585.): Und weil CA =AB; So iſt auch CE=ED (§. 217.), und folglich in dem Triangel ABC die Linie ED dieienige Linie, die in eine beſtimte Anzahl von gleichen Teilen geteilt werden ſoll.

II. Weil der △ABC ∽ △CED (N. I.): So iſt auch der Winkel CED= dem Winkel CAB. Es iſt aber der ∠ECH=∠ACF (§. 27.), und daher iſt der △ECH ∽ △ACF, und CE: EH=CA: AF (§. 586.). Nun iſt aber CE =ED, und daher iſt ED: EH=CA: AF (§. 25.), es iſt aber auch ferner CA=AB, und daher iſt ED: EH=AB: AF: Und weil AF, vermöge der gemachten Teilung, $\frac{1}{3}$ AB; So iſt auch EH=$\frac{1}{3}$ED (§. 217.).

§. 591.

Man kan auch dadurch eine Linie in gleiche Teile teilen, wenn man den Cirkel eröfnet, und denſelben ſo lang weiter oder enger macht, bis ſich die Linie AB genau damit ausmeſſen läſt, und die Eröfnung des Cirkels den verlangten Teil der in gewiſſe gleiche Teile zu teilenden Linie ausmacht.

§. 592.

§. 592.

Wenn man ſonſt auch die zu teilende Linie auf einem veriüngten Maasſtaab miſt (§. 475.), und die gemeſſene Länge durch die Anzahl der gleichen Teile dividirt, worinnen die Linie geteilt werden ſoll (§. 108.): So bekomt man eben wol den verlangten Teil von der zu teilenden Linie, dieſen Teil nun kan man auf die zu teilende Linie von einem Endpunkt bis zu dem andern tragen.

§. 593.

Eben dieſer Teilung kan man ſich auf dem Felde bedienen: Und wenn man die zu teilende Linie mit einer Schnur miſſet, und dieſe ſo oft zuſammen legt, als in wie viele Teile die Linie geteilt werden ſoll; So bekomt man den verlangten Teil der Linie, den man hintragen kan, wohin man will.

§. 594.

Wenn man eine kleinere Linie DE nach der Proportion teilen ſoll, nach welcher eine gröſere Linie AB geteilt iſt, Tab. XII. fig. 140; So mache man aus AB einen gleichſeitigen Triangel ABC, man trage aus C in D und E die Linie DE, und ziehe DE, aus F und G aber ziehe man andere Linien FC und GC: So teilen dieſe, aus dem Beweiſe, den wir §. 588. geführt haben, die Linie DE durch die Punkten

ten H und I nach eben der Proportion, nach welcher die Linie AB geteilt iſt.

§. 595.

Soll man eine gröſere Linie AB, Tab. XII. fig. 141, nach der Proportion abteilen, wornach die kleinere Linie DE geteilt iſt: So macht man mit DE einen gleichſeitigen Triangel DEC, man verlängert die Seiten CD und CE, und trägt AB aus C in A und B, und ziehet AB, endlich aber ziehet man durch C und H, C und G, und C und I bis an AB gerade Linien CF, CK und CL: So teilen dieſe die Linie AB nach der Proportion, wornach DE geteilet iſt.

§. 596.

Weil, wie aus N. II. des Beweiſes im 590. §. klar iſt, CE:EH = CA:AF: So iſt auch CE: CA = EH:AF (§.233.). Wenn daher CE = $\frac{1}{4}$CA, oder CE = $\frac{1}{3}$CA, oder CE = $\frac{1}{2}$CA: So iſt auch EH = $\frac{1}{4}$AF, oder EH = $\frac{1}{3}$AF, oder EH = $\frac{1}{2}$AF (§.217.). Soll man alſo die Linie AB, Tab. XII. fig. 140, um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, oder die Hälfte verkleinern, und zwar ſo, daß die verkleinerte Linie ED nach eben der Proportion geteilt wird, nach welcher AB geteilet iſt; So macht man in dem gleichſeitigen Triangel ABC das Stük CE und CD $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$

CA (§. 592.), ſo iſt ED $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oder die Hälfte von AB, und alſo AB auf $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ oder die Hälfte verjüngt: Und ſoll man die Linie ED, Tab. XII. fig. 141, nach eben der Proportion, nach welcher ſie geteilt iſt, um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oder die Hälfte vergröſern; So verlängert man CE und CD dergeſtalt, daß CA und CB das Vier- das Drei- oder das Zweifache von CE und CD ſind (§. 36.); So iſt alsdann AB um vier- drei- oder zweimal ſo gros, als wie ED, und hierauf gründet ſich das Veriüngen und das Vergröſern der in gewiſſe Teile geteilten Linien.

§. 597.

Wenn man eine gerade Linie AB, Tab. XII. fig. 142, in gleiche Teile teilet, und ziehet durch die Teilungspunkten A, C, D, E und B lauter Parallellinien AF, CG, DH, EI und BK: So teilen dieſe Linien auch eine iede andere nach Willkühr gezogene Linie FK, die zwiſchen den Parallellinien AF und BK enthalten iſt, in gleiche Teile.

Beweis.

Man ziehe durch die Punkten F und G mit AB Parallellinien FL und GM (§. 529.): So iſt FL =AC, und GM=CD (§. 527.), es iſt aber AC =CD, und daher iſt FL=GM (§. 25. und 39.). Weil nun FL und GM, und CG und DH parallel ſind,

ſind: So iſt der ∠ LFG = ∠ MGH, und der ∠ FGL = ∠ GHM (§. 525.). Da alſo in den Triangeln FLG und GMH, der ∠ LFG = ∠ MGH, und der ∠ FGL = ∠ GHM, auſerdem aber die Linie FL = GM: So iſt auch der △ FLG = △ GMH, und alſo FG = GH (§. 511.), eben ſo iſt aber auch GH = HI, und HI = IK, wenn man den Beweis ſo fortführet.

§. 598.

Wenn man demnach eine gerade Linie A 10, Tab. XIII. fig. 143, in beliebige gleiche Teile, zum Beiſpiel in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 teilet, und durch dieſe Teilungspunkten Parallellinien 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3, 4 und 4, 5 und 5, 6 und 6, 7 und 7, 8 und 8, 9 und 9, und 10 und 10 ziehet, und trägt eine gerade Linie aus B in 2, oder aus B in 3, oder aus B in 4, oder aus B in 5, oder aus B in 6, oder aus B in 7, oder aus B in 8, oder aus B in 9, oder aus B in 10: So wird die Linie B 2 in 2, B 3 in 3, B 4 in 4, B 5 in 5, B 6 in 6, B 7 in 7, B 8 in 8, B 9 in 9, und B 10 in 10 gleiche Teile, und wenn B 10 nur die Hälfte einer in gleiche Teile zu teilenden Linie iſt: So iſt 2 und II der 4te, 3 und III der 6te, 4 und IIII der 8te, 5 und V der 10te, 6 und VI der 12te, 7 und VII der 14te, 8 und VIII der 16te, 9 und VIIII der 18te, und 10 und X der 20te Teil von der ganzen Linie.

§. 599.

Wenn man durch zwei gerade Linien AB und CD, Tab. XII. fig. 142, Parallellinien ziehet: So teilen die lezteren die erſteren in Teile, die einander proportional ſind.

Beweis.

Man ziehe FL und GM mit AB parallel: So ſind dieſe einander ſelbſt parallel. Weil nun dieſes: So iſt der $\angle LFG = \angle MGH$, und weil $CG \# DH$, der Winkel $FGL = \angle GHM$ (§. 525.), folglich der $\triangle FGL \backsim \triangle GHM$, und alſo $FL : FG = MG : GH$ (§. 586.), in einer ieden Proportion verhält ſich aber auch das erſte zu dem dritten Glied, wie das andere zu dem vierten, und daher iſt $FL : MG = FG : GH$ (§. 233.). Nun iſt $FL = AC$ (§. 527.), und daher iſt $AC : MG = FG : GH$ (§. 25.), es iſt aber auch $MG = CD$ (§. 527.), und daher iſt $AC : CD = FG : GH$ (§. 25.). Eben ſo nun kan man beweiſen, daß $CD : DE = GH : HI$, und daß $DE : EB = HI : IK$.

§. 600.

Man kan auch hierdurch eine nach einer gewiſſen Proportion geteilte Linie verkleinern, oder vergröſern. Man macht nemlich, wenn AB verkleinert werden ſoll, Tab. XIII. fig. 144, $AC = \frac{1}{4} AB$, oder $\frac{1}{3} AB$, oder

$\frac{1}{2}$ AB

$\frac{1}{2}$ AB u. ſ. w., und ziehet durch alle Teilungspunkten der Linie AB mit CB Parallellinien: Oder wenn AC um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ vergröſert werden ſoll; So macht man AB = $\frac{5}{4}$, oder $\frac{4}{3}$, oder $\frac{3}{2}$ AC, und ziehet mit CB durch alle Teilungspunkten der Linie AC Parallellinien, ſo iſt in AC ein ieder Teil um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{2}$ kleiner, als in AB, in AB hingegen ein ieder Teil um $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$ gröſer, als in AC.

§. 601.

Einen veriüngten Maasſtaab mit Transverſallinien zu machen.

Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, Tab. XIII. fig. 145, und trage aus A in C mit einer gefälligen Eröfnung des Cirke's 10 gleiche Teile.

2) Man faſſe die Länge AC mit dem Cirkel, und trage ſie aus C in 1, 2, 3 und 4, und ſo weit fort, als man will.

3) Man richte in dem Punkt A eine Perpendicularlinie AD von einer beliebigen Länge auf (§. 576.), und trage darauf ebenwol 10 gleiche Teile.

4) Durch einen ieden von dieſen Teilungspunkten ziehe man mit AB Parallellinien (§. 529.).

5) Aus D in E trage man eben die 10 gleiche Teile, die auf der Linie AC befindlich ſind, aus E in F aber die gleichen Teile, welche die Linie CB enthält.

6) Man ziehe die Linie 1 und 1, 2 und 2, 3 und 3, und B und F, und die Linien C und 1, 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7, 7 und 8, 8 und 9, und 9 und 10; So iſt der Maasſtaab fertig: Und wenn man AC vor eine Ruthe annimt, ſo ſind C und 1, 1 und 2, 2 und 3, u. ſ. w. Schuhe, ab aber iſt ein Zoll, cd ſind zwei, ef drei, gh vier, ik fünf, lm ſechs, no ſieben, pq acht, und rs neun Zolle.

Beweis.

Weil AC in 10 gleiche Teile geteilt iſt: ſo ſind auch, wenn AC eine Ruthe iſt, C und 1, 1 und 2, 2 und 3, u. ſ. w. Schuhe (§. 466.). Nun iſt aber auch in den Triangeln CE 1 und C ab der ∠ C = ∠ C (§. 27.), und der ∠ a = ∠ E, weil die Parallellinien E 1 und ab von der dritten CE durchſchnitten werden (§. 525.), und daher iſt der △ C ab ∽ △ CE 1 (§. 585.), und C a : ab = CE : E 1 (§. 586). Es iſt aber auch C a : CE = ab : E 1 (§. 233.), und C a = $\frac{1}{10}$ CE, und daher iſt auch ab = $\frac{1}{10}$ E 1 (§. 217.). Weil nun E 1 ein Schuh iſt: So iſt auch ab ein Zoll (§. 466.), und ſo kan man erweiſen, daß cd = $\frac{2}{10}$ E 1, ef = $\frac{3}{10}$ E 1, und alſo cd zwei Zolle, und ef drei Zolle ſind, u. ſ. w.

§. 602.

Wenn man dieſemnach annimt, daß AC ein

Schuh iſt: So iſt C 1 ein Zoll, 1 und 2 zwei Zolle, u. ſ. w., ab aber iſt alsdann eine Linie, cd ſind zwei Linien, u. ſ. w. Nach dieſem Maasſtaabe nun kan man eine iede Linie auf dem Papier meſſen, wenn man den einen Cirkelfus in einen Teilungspunkt ſezzet, worinnen ſich die Linien CE, 1 und 1, 2 und 2 u. ſ. w., und AB, 1 P, 2 O u. ſ. w. durchſchneiden, und alsdann darauf merket, was vor Ruthen, Schuhe und Zolle der andere Cirkelfus auf den Linien AB, 1 P, 2 O u. ſ. w. abſchneidet.

§. 603.

Zu zwei gegebenen Linien AB und AC, Tab. XIII. fig. 146, die dritte geometriſche Proportionallinie zu finden (§. 222.).

Aufloſung.

1) Man mache nach Gefallen einen Winkel EAD.

2) Man trage die Linie AB aus A in B, die Linie AC aber aus A in C. Weil ſich nun AB zu AC verhalten ſoll, wie AC zu der zu ſuchenden dritten Proportionallinie: So trage man AC auch aus B in E.

3) Man ziehe von B nach C eine gerade Linie BC, und mache den $\angle E = \angle B$: So iſt ED ⌗ BC (§. 526.), CD aber die geſuchte dritte Proportionallinie, und AB : AC = BE = AC : CD.

Beweis.

Weil der ∠ B = ∠ E: So iſt ED ⌗ BC (§. 526.), und alſo AB : AC = BE : CD (§. 589.), es iſt aber, vermöge deſſen, was geſchehen iſt, BE = AC, und daher iſt AB : AC = AC : CD (§. 25.).

§. 604.

Zu drei gegebenen Linien AB, AC und BD, Tab. XIII. fig. 147, die vierte geometriſche Proportionallinie zu finden (§. 222.).

Auflöſung.

1) Man mache nach Gefallen einen Winkel DAE.

2) Man trage aus A in B die Linie AB, aus A in C aber die Linie AC, und aus B in D die Linie BD.

3) Man ziehe von C nach B eine gerade Linie CB.

4) Den Winkel x mache man dem Winkel y gleich: So iſt ED ⌗ CB (§. 526.), und dem vorigen Beweis zufolge, CE die verlangte vierte Proportionalzahl, alſo AB : AC = BD : CE.

§. 605.

Soll man durch dieſe Aufgabe zu drei gegebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl finden: So trägt man nach einem veriüngten Maasſtaab

ſtaab aus A in B ſo viele gleiche Teile, als die erſte Zahl Einheiten hat, aus A in C aber eben ſo viele von dieſen Teilen, als die andere Zahl Einheiten in ſich begreift, und aus B in D ſo viele von dieſen gleichen Teilen, als die dritte Zahl Einheiten in ſich faſſet, im übrigen aber verfährt man nach der vorigen Aufgabe, ſo iſt CE die verlangte vierte geometriſche Proportionalzahl.

§. 606.

Zwiſchen zwei gegebenen Linien AB und BC, Tab. XIII. fig. 148, die mittlere geometriſche Proportionallinie zu finden (§. 222.).

Auflöſung.

1) Man trage die gegebene Linien AB aus A in B, und BC aus B in C, ſo, daß beide eine Linie ausmachen.

2) Man teile AC in D in zwei gleiche Teile, und beſchreibe mit der Linie AD aus D einen halben Cirkel AEC (§. 461.).

3) In dem Punkt B, wo man die Linien AB, und BC zuſammen geſezt hat, richte man eine Perpendicularlinie BE auf, welche den halben Cirkel AEC in E berühret: So iſt dieſe die verlangte mittlere geometriſche Proportionallinie, und AB : BE = BE : BC.

Beweis.

Man ziehe AE und EC: So iſt der Winkel x + o = 90° (§. 562.), und der ∠r = 90° (§. 416.), eben

 daher

daher aber iſt der $\angle x + o = \angle r$ (§.495.), es iſt aber auch der $\angle s = \angle s$ (§. 27.), und daher iſt in den Triangeln AEC und BCE der $\angle x + o = \angle r$, und der $\angle s$, der beiden gemein iſt, $= s$, folglich auch der $\angle u = \angle o$ (§. 548.). Es iſt alſo in den Triangeln ABE und BEC der $\angle u = \angle o$, und der $\angle t = \angle r$ (§.416.), eben daher aber iſt der $\triangle ABE \backsim \triangle BEC$, und AB: BE = BE: BC (§.586.), und alſo BE, da ſie zugleich die Stelle des andern und dritten Glieds vertritt, die geſuchte mittlere geometriſche Proportionalzahl (§. 222.).

§. 607.

Ziehet man eine Linie AB, Tab. XIIII. fig. 149, und trägt AB ſo oft auf BC fort, als eine Zahl Einheiten hat, beſchreibt aber über AC einen halben Cirkel (§.461.), und ziehet die Perpendicularlinie BD: So iſt AB:BD=BD:BC, und weil AB=1, 1: BD=BD:BC. Weil nun 1. BC=BD. BD= BD^2 (§. 171 und 228.): So iſt auch BD die Quadratwurzel, und ſo kan man durch die Aufgabe des 606. §. die Quadratwurzel ausziehen (§. 172). Zerfält man auch eine gegebene Quadratzahl in zwei Factores, zum Beiſpiel die Zahl 64 in 16 und 4, und trägt nach einem veriüngten Maasſtaab 4 Teile aus A in B, und 16 ſolcher Teile aus B in C, und ſuchet alsdann dazu, wie vorhin, die mittlere geometriſche

triſche Proportionallinie BD; So iſt dieſe, wenn man ſie auf dem Maasſtaab miſſet, die Quadratwurzel: Denn AB: BD=BD: BC, und AB. BC =BD,.BD=BD^2 (§. 171. und 172.).

§. 608.

Wenn man dem 606. §. zu Folge in einem rechtwinkelichten Triangel AEC, Tab. XIII. fig. 148, durch die Spizze E des rechten Winkels auf die ihm gegenüber ſtehende Seite AC eine Perpendicularlinie EB ziehet (§. 524.): So iſt dieſe die mittlere geometriſche Proportionallinie zwiſchen den Stükken AB und BC der Hypothenuſa AC.

§. 609.

Aus dem 606. §. iſt klar, daß der △AEC ∽ △AEB, und daher iſt, wenn man in einem rechtwinkelichten Triangel aus der Spizze des rechten Winkels auf die Hypothenuſa eine Perpendicularlinie ziehet, AB: AE=AE: AC (§. 568.), aus eben dieſem §. erhellet aber auch, daß der △ABE ∽ △BEC, und daher iſt, wenn man, wie vorhin, in einem rechtwinkelichten Triangel eine Perpendicularlinie ziehet, BE: EA=BC: CE (§. 586.).

§. 610.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 150, zu denen beiden man aus

einem

einem angenommenen Stand C, aber nicht von A nach B kommen kan.

Auflöſung.

1) Man ſezze einen Meßtiſch in einen nach Gefallen angenommenen Stand C.

2) Man lege das Diopternlineal an den Punkt C, viſire nach A, und ziehe die Linie CD, man viſire aber auch nach B, und ziehe die Linie CE.

3) Mit der Meßkette, der Ruthe, oder der Schnur meſſe man CA und CB.

4) Man faſſe ſowol die Linie CA, als CB auf einem veriüngten Maasſtaab, und trage die erſtere aus C in D, die andere aber aus C in E. Jezt

5) ziehe man DE, und meſſe dieſe Linie auf eben dem vorigen Maasſtaab: So iſt dieſes Maas das Maas der Linie AB.

Beweis.

Der ∠ ACB = ∠ ACB (§. 27.), und CA: CB = CD: CE, und daher iſt der △ ACB ∽ △ CDE, und AC: AB = CD: DE (§. 585.), es iſt aber auch AC: CD = AB: DE (§. 233.), und es hat AC in dem Groſen ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle, als CD im Kleinen hat, und derohalben muß auch AB ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Groſen haben, als DE im Kleinen hat.

§. 611.

§. 611.

Miſſet man den Winkel ACB, Tab. XIIII. fig. 151, mit dem Aſtrolabio, zugleich aber AC und CB (§. 477.), macht man auf dem Papier mit dem Transporteur einen Winkel acb, ſo gros, wie C, und trägt nach dem veriüngten Maasſtaab AC aus c in a, und CB aus c in b, und ziehet ab (§. 533.): So iſt ab, dem vorigen Beweis zufolge, auf dem veriüngten Maasſtab eben ſo gros, als AB.

§. 612.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 152, wenn man nur zu einem B kommen kan.

Auflöſung.

1) Man ſezze einen Meßtiſch in einen nach Gefallen angenommenen Stand C, und viſire aus dem Punkt c durch das Diopternlineal nach A und B, alsbald aber ziehe man auf dem Meßtiſch nach A und B Linien ca und cb.

2) Man meſſe die Weite CB, dieſe Weite aber faſſe man auf einem veriüngten Maasſtaab, und trage ſie aus c in b.

3) Den Meßtiſch trage man iezt in den Ort B, in C aber, wo der Meßtiſch geſtanden hat, ſtekke man einen Staab, und ſezze dieſen Tiſch dergeſtalt nieder, daß der Punkt b auf B zu liegen komt, und man

man den Staab C ſiehet, wenn man das Diopternlineal auf bc leget, und durch die Diopteru viſiret.

4) Man lege das Diopternlineal an den Punkt b, und viſire nach A, alsbald aber ziehe man ba; So wird dieſe die Linie ca in dem Punkt a durchſchneiden. Nunmehr

5) meſſe man die Linie ba auf dem veriüngten Maasſtaab, wornach man cb aufgetragen hat: So weis man die Weite AB.

Beweis.

Der $\angle ACB = \angle acb$, und der $\angle ABC = \angle abc$, und derohalben iſt der $\triangle ABC \backsim \triangle abc$, und es iſt CB: BA = cb: ba (§. 586.). Nun iſt aber auch CB: cb = BA: ba (§. 233.), und CB hat ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Groſen, als cb im Kleinen hat, und daher hat auch AB ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Groſen, als ab in dem Kleinen.

§. 613.

Wenn man die Winkel ACB und BAC mit dem Aſtrolabio, Tab. XIIII. fig. 153, zugleich aber auch die Linie CA miſſet, und auf dem Papier ca nach dem veriüngten Maasſtaab ſo gros, als AC macht, an c und a aber mit dem Transporteur die Winkel ACB und BAC trägt, und alsdann ab auf dem veriüngten Maasſtaab miſſet (§. 534.): So

So iſt, dem vorigen Beweis nach, ab ſo gros auf dem veriüngten Maasſtaab, als AB im Groſen iſt.

§. 614.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 154, wenn man zu keinem kommen kan.

Auflöſung.

1) Man erwähle nach Gefallen einen Stand in C, einen andern ſolchen Stand aber in D.

2) Man ſezze in den Stand C einen Meßtiſch, in den Stand D aber ſtekke man einen Staab.

3) Man lege das Diopternlineal an c, und viſire nach A, nach B, und nach D, von c nach A, B, und D aber ziehe man auf dem Meßtiſch gerade Linien ca, cb und cd.

4) Man meſſe die Entfernung der Stände C und D, man faſſe dieſe Länge auf dem veriüngten Maasſtaab, und trage ſie aus c in d.

5) Man trage den Meßtiſch aus C in D, und ſtekke in C einen Staab, das Meßtiſchgen aber ſezze man ſo in D nieder, daß der Punkt d auf D komt, und man den Staab in C ſiehet, wenn man das Diopternlineal auf cd leget, und nach c viſiret.

6) Man lege das Diopternlineal an d, und viſire nach B und A, alsbald aber ziehe man an dem Diopternlineal die Linien db und da, ſo werden dieſe

die

die Linien cb und ca in b und a durchſchneiden. Ziehet man nun

7) die Linie ab, und miſſet dieſe auf dem verjüngten Maasſtaab: So weis man die verlangte Weite AB.

Beweis.

1) Weil der ∠ dcb = ∠ DCB, und der ∠ bdc = ∠ BDC: So iſt auch der △ cdb ∽ △ CDB, und cd: cb = CD: CB (§. 586.), und cd: CD = cb: CB (§. 233.). 2) Der ∠ adc = ∠ ADC, und der ∠ acd = ∠ ACD, und daher iſt der △ adc ∽ △ ADC, und cd: ac = CD: AC (§. 586.), und cd: CD = ac: AC (§. 233.). 3) Es iſt alſo cd: CD = cb: CB (N. 1.), und cd: CD = ac: AC (N. 2.), und daher iſt auch cb: CB = ac: AC (§. 212.), und cb: ac = CB: AC (§. 233.). 4) Es iſt cb: ac = CB: AC (N. 3.), und der ∠ acb = ∠ ACB, und daher iſt auch ac: ab = AC: AB (§. 585.). 5) Es iſt cd: ac = CD: AC (N. 2.), und daher iſt auch ac: cd = AC: CD (§. 380. N. 2.), und ac: AC = cd: CD (§. 233.), es hält aber cd ſo viel Ruthen, Schuhe und Zolle auf dem verjüngten Maasſtaab, als CD im Groſen hält, und derohalben muß auch ac ſo viel Ruthen, Schuhe und Zolle auf dem verjüngten Maasſtaab enthalten, als AC im Groſen enthält (§. 217.). 6) Es iſt ac: ab = AC: AB (N. 4.), und daher iſt

ac:

ac: AC=ab: AB (§. 233.), nun enthält aber ac ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle, als AC im Groſen hat, und daher muß auch ab ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen haben, als AB in dem Groſen enthält ((§. 217.).

§. 615.

Wenn man aus dem Stand C, Tab. XIIII. fig. 155, die Winkel ACB und BCD, und aus dem Stand D die Winkel BDA und ADC, auſer dem aber die Standlinie CD miſſet, und CD nach dem veriüngten Maasſtaab auf dem Papier aus c in d träget, alsdann aber mit dem Transporteur an cd den Winkel BCD, und an cb den Winkel ACB, an cd aber auch den Winkel ADC, und an ad den Winkel ADB träget (§. 534.), hernach aber durch die Punkten a und b, worinnen ſich die Schenkel dieſer Winkel durchſchneiden, die Linie ab ziehet, und dieſe auf dem veriüngten Maasſtaab miſſet: So hat dieſe, dem vorigen Beweis zufolge, eben ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle, als AB in dem Groſen hat.

§. 616.

Die Höhe AB zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 156, zu der man kommen kan.

Auflöſung.

1) Man nehme nach Gefallen einen Stand in C an, und ſezze in dieſen den in einer Nuß am obern Teil des Fuſes beweglichen Meßtiſch, aber ſo, daß er vertical ſtehet (§. 420.) und die untere Seite FE horizontal iſt (§. 414.).

2) Man nehme auf demſelben über C den Punkt c an, und lege daran das Diopternlineal, ſo daß es mit FE parallel iſt (§. 409.), und ziehe die Linie cd.

3) Man laſſe das Diopternlineal an c unverrükt liegen, und ſchiebe es an dem andern Ende ſo lang in die Höhe, bis man die Spizze A ſiehet, wenn man durch ſeine Dioptern viſiret. Jezt

4) meſſe man die Entfernung des Standes C von dem Ort B, und faſſe dieſe Länge auf einem veriüngten Maasſtaab, alsbald aber trage man dieſelbe aus c in d.

5) In dem Punkt d richte man eine Perpendicularlinie da auf (§. 521.), welche ca in a durchſchneidet, und meſſe da auf dem vorigen veriüngten Maasſtaab, ſo hält da ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle, als DA in dem Groſen enthält. Endlich

6) meſſe man die Höhe BD=Cc, und addire dieſe zu AD: So iſt die Summe die verlangte Höhe AB.

Beweis.

Der ∠ AcD = ∠ acd, und der ∠ ADc = ∠ adc

∠adc (§. 416.), und daher iſt cd:cD=da:DA (§. 586.). Weil nun cd ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle in dem Kleinen hat, als cD in dem Groſen enthält; So hält auch da ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen, als DA in dem Groſen hat (§. 217.): Und wenn man zu AD noch DB addirt; So bekomt man AB (§. 30.).

§. 617.

Wenn man den Winkel ADE, die Linien BC und CD miſſet, Tab. XIIII. fig. 157, und auf dem Papier eine Linie ed ziehet, dieſe aber nach einem veriůngten Maasſtaab ſo gros, als wie ED, und den Winkel d dem Winkel D, e hingegen einen rechten Winkel gleich, und alſo den Triangel eda machet (§. 534.), hernach aber ae auf dem veriůngten Maasſtaab miſſet, und dazu CD=EB addirt: So bekomt man, dem vorigen Beweis nach, ebenwol die Hőhe AB.

§. 618.

Wenn die Linie BC nicht horizontal iſt (§. 414.); So miſſet man zugleich den ∠ BDE, und die Linie ED, und machet, nachdem man ed nach dem veriůngten Maasſtaab ſo gros gemacht hat, als ED, mit dem Transporteur den Winkel edb dem Winkel EDB gleich, die Linie ae aber verlängert man bis

in b, ſo iſt, weil nach dem Beweis des 116. §. ed: ED=eb:EB, und alſo be auf dem veriüngten Maasſtaab ſo gros iſt, als wie EB auf dem Groſen, ab die Höhe, die eben ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen hält, als AB im Groſen in ſich begreift.

§. 619.

Eine Höhe AB, zu der man kommen kan, mit einem Staab CD zu meſſen, Tab. XV. fig. 158.

Auflöſung.

1) Man ſtekke einen Staab CD in einen nach Gefallen angenommenen Stand C ſenkrecht in die Erde.

2) Man lege ſich hinter dieſem Staab dergeſtalt auf die Erde nieder, daß man die Spizze A erblikt, wenn man mit dem Auge in E über den Punkt D viſiret.

3) Man meſſe die Entfernung des Auges E von dem Punkt C, die Höhe CD des Staabes, und die Länge BE. Jezt

4) ſchlieſe man ſo, wie EC : CD ſo EB : BA, und ſuche, da EC, CD und EB bekant ſind, die vierte geometriſche Proportionalzahl AB (§. 240.), ſo weis man die verlangte Höhe. Iſt zum Beiſpiel EC=6, CD=5, und BE=30: So iſt AB =25.

Beweis.

Beweis.

Der ∠ECD=∠EBA (§. 416. und 495.), und der ∠DEC=∠AEB (§. 27.), und daher iſt der △DEC ∽ △AEB, und CE : CD=EB : BA (§. 586.).

§. 620.

Wenn man den Staab CD gerade ſo lang nimt, als die Höhe des Körpers iſt, von den Fusſohlen bis an das Auge gerechnet: So iſt auch BE ſo gros, wie BA (§. 203. und 217.), und man hat alſo nur nötig, daß man BE miſſet, man muß inzwiſchen mit dem Staabe CD ſo lang vor- und rükwärts gehen, bis man, wenn man über D viſiret, und mit den Füſen an CD anſtehet, die Spizze A erblikket.

§. 621.

Eine Höhe AB mit zwei Stäben CD und EF zu meſſen, Tab. XV. fig. 159.

Auflöſung.

1) Man ſtekke in einer gefälligen Entfernung von der zu meſſenden Höhe AB einen Staab CD ſenkrecht in die Erde.

2) Man nehme einen kleinern Staab EF, und gehe ſo lang mit demſelben vor- und rükwärts, bis die Punkten F, D und B, wenn man mit dem Auge über ſie weg viſiret, in eine gerade Linie zu liegen

kommen, aber auch dieſen Staab ſtekke man ſenkrecht in die Erde. Jezt

3) meſſe man die Entfernung der Stäbe CE = FG (§. 527. und 544.), und die Höhe GD, indem man CD und EF miſſet, und EF von CD abziehet, zugleich aber auch HF = AE (§. 527. und 544.) miſſet.

4) Man ſchlieſe, wie FG zu GD ſo FH zu HB, und ſuche zu FG, GD, und FH die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), ſo weis man BH. Hierzu nun

5) addire man EF = AH (§. 527.), ſo iſt die Summe AB, und die verlangte Höhe gemeſſen. Es ſei GF = 4', GD = 2', und AE = FH = 100'; So iſt BH = 50': Iſt nun EF = AH = 5', ſo iſt BA = 55'.

Beweis.

Der ∠ G = ∠ H (§. 416. und 495.), und der ∠ DFG = ∠ BFH (§. 27.), und daher iſt der △ DFG ∽ △ BFH, und alſo FG : GD = FH : HB (§. 586.). Nun iſt aber EF = AH (§. 527.), und daher iſt BH + EF = AB (§. 30.).

§. 622.

Eine Höhe AB aus dem Schatten zu meſſen, Tab. XV. fig. 160.

Auflö-

Auflöſung.

1) Man ſtekke bei Sonnenſchein einen Staab DF ſenkrecht in die Erde.

2) Man meſſe ſowol die Höhe DF des Staabes, als die Länge DE des Schattens, den er wirft Man meſſe ferner

3) die Länge des Schattens AC der zu meſſenden Höhe AB. Nunmehr

4) ſuche man zu den gemeſſenen Längen DE, DF, und AC die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.); So iſt dieſe die zu meſſende Höhe AB.

Beweis.

Wir nehmen hier an, wie in der Mathematik an einem andern Ort gelehret wird, daß der Winkel FED, welchen der Sonnenſtrahl FE mit der Horizontallinie DE macht, dem Winkel BCA gleich iſt, welchen der Sonnenſtrahl BC mit der Horizontallinie AC macht: Da alſo der ∠ E = dem ∠ C und der ∠ D = A (§. 416. und 495.); So iſt der △ FDE ∽ △ ABC, und alſo DE : DF = AC AB (§. 586.).

§. 623.

Wenn man den Staab DF nur einen Fus hoch nimt, und mit der Länge des Schattens DE den Schatten AC miſſet; So enthält AB ſo viel Fus, als wie oft DE in AC enthalten iſt: Denn da DE : DF

DF = AC : AB (§. 622.); So iſt auch DE : AC = DF : AB (§. 233.).

§. 624.

Die Höhe AB mit einem Spiegel zu meſſen, Tab. XV. fig. 161.

Auflöſung.

1) Man lege einen Spiegel C auf die Erde, und gehe ſo lang damit vor- und rükwärts, bis man die Spizze B der Höhe AB in dem Spiegel erblikt.

2) Man meſſe die Höhe des Auges E über der Erde D, zugleich aber die Entfernungen CD und CA von dem Stand D, und dem Ort A.

3) Zu CD, DE und AC ſuche man die vierte geometriſche Proportionalzahl: So iſt dieſe die Höhe AB (§. 240.).

Beweis.

Weil, wie anderswo in der Mathematik gelehret wird, das wir hier annehmen, der Einfallungswinkel o = dem Reflexionswinkel r, und der ∠ s = ∠ t (§. 416. und 495.): So iſt der △ CED ∽ △ ABC, und CD : DE = AC : AB (§. 586.).

§. 625.

Es iſt vor ſich klar, daß der Erdboden eben, oder horizontal ſein muß, wenn man eine Höhe, zu der man kommen kan, nach den Aufgaben meſſen will,

die wir in dem 619. 620. 621. 622. 623. und 624. §. aufgelöſt haben.

§. 626.

Die Höhe AB zu meſſen, Tab. XV. fig. 162, zu welcher man nicht kommen kan.

Aufloſung.

1) Man nehme nach Gefallen einen Stand in C, einen andern ſolchen Stand aber in D an, und meſſe die Standlinie DC.

2) Man ſezze in C den Meßtiſch, und viſire wie §. 616. N. 1. 2. und 3. gelehret worden, nach B und E, und ziehe die Linien ab und ac, aus a in b aber trage man nach dem veriüngten Maasſtaab die Länge CD.

3) Man trage den Meßtiſch in den Stand D, und zwar ſo, daß der Punkt b gerade über D zu liegen komt, in C aber ſtekke man einen Staab, und viſire von b nach der Spizze B, und dem Staab C.

4) Durch den Punkt c, worinnen die Linie bc die Linie ac durchſchneidet, laſſe man auf ad eine Perpendicularlinie fallen, und meſſe dc auf dem veriüngten Maasſtaab, ſo weis man die Höhe BE. Hierzu

5) addire man die Höhe des Statives Ca = AE (§. 527.): So iſt die Summe die verlangte Höhe AB.

Beweis.

1) Der $\angle$ Bba = $\angle$ cba, und der $\angle$ Bab = $\angle$ cab, und daher verhält ſich ab: DC = bc:bB (§. 586.).

2) Der $\angle$ BbE = $\angle$ cbd, und der $\angle$ BEb = $\angle$ cdb, und daher iſt bc: bB = cd:BE (§. 586). Es iſt alſo

3) ab:DC = bc: bB (N. 1.), und bc:bB = cd:BE (N. 2.), und daher iſt auch ab : DC = cd:BE (§. 212.). Nun hat aber ab ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen, als DC im Groſen hat, und derohalben hält auch cd ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen, als BE im Groſen hat, und wenn man Ca = AE zu cd addirt, ſo bekomt man AB (§. 30.).

§. 627.

Wenn man die Winkel m und n, Tab. XV. fig. 163, mit dem Aſtrolabio, zugleich aber die Standlinie CD miſſet, und alsdann auf dem Papier ab nach dem verjüngten Maasſtaab ſo gros, als CD, den Winkel a aber dem Winkel n, und den Winkel x dem Winkel m gleich macht (§. 534.), hernach aber durch den Punkt c eine Perpendicularlinie cd auf ad fält, und cd auf dem verjüngten Maasſtaab miſſet, dazu aber Dm = BE addirt: So iſt die Summe, dem vorigen Beweis zufolge, auch die zu meſſende Höhe AB.

§. 628.

§. 628.

Aus der halben Sehne AB, Tab, XVI. fig. 164, und der Höhe AC des Bogens, wovon AB die halbe Sehne iſt, den Diameter des Cirkels von dieſem Bogen zu finden.

Aufloͤſung.

1) Weil CA : AB = AB : AE (§. 606.), und AE die dritte geometriſche Proportionallinie iſt (§. 222.): So ſuche man zu CA und AB die dritte geometriſche Proportionalzahl (§. 242.), ſo bekomt man AE. Hierzu

2) addire man die Hoͤhe CA des Bogens: So iſt die Summe der verlangte Diameter CE.

Exempel.

Es ſei CA = 2, und AB = 4: So iſt die Rechnung dieſe:

2 —— 4 —— 4
　　　4
　　——
　　16　　　16 | 8
　　　　　　　2 |

Addirt man nun zu AE = 8 die Hoͤhe AC des Bogens = 2: So iſt der Diameter CE = 10.

Oder

Es ſei CA = 6, und AB = 12: So iſt die Rechnung folgende:

6 =

$$6'' \text{ —— } 12''' \text{ —— } 12'''$$

$$\begin{array}{r} 12''' \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \not{2} & \\ \not{1}\not{4}\not{4} & 24''' \text{ (§.160. u. 161.)} \\ \not{6}\not{6} & \end{array}$$

Addirt man nun zu CA $= 24'''$ die Höhe AC des Bogens $= 6''$: So iſt der Diameter CE $= 3'$ (§.158.).

§. 629.

Den Polygonwinkel ABC in einem bekanten regulären Vielek zu finden, Tab. XVI. fig. 165.

Auflöſung.

1) Man teile 360°, die Summe aller Grade eines Cirkels durch die Zahl der Seiten des gegebenen Vieleks.

2) Den dabei herausgekommenen Quotienten ziehe man von 180° ab: So iſt der Reſt der verlangte Winkel.

Beweis.

Es kan ein iedes reguläres Vielek, als eine Figur betrachtet werden, die in einem Cirkel beſchrieben worden (§. 568.), und daher ſind ſeine Seiten Sehnen eines Cirkels, in einem regulären Vielek aber ſind die Seiten einander gleich, und gleiche Sehnen haben

haben gleiche Bogen (§. 566.), und daher iſt auch der Bogen AB = dem Bogen BC, eben dieſer Bogen AB aber der ſo vielte Teil, als das Vielek Seiten hat, und demnach findet man die Gröſe des Bogens AB in einem Vielek, wenn man 360° durch die Zahl der Seiten des Vieleks dividirt. Nun iſt aber der Winkel ABC in einem Vielek, welches in einem Cirkel gedacht werden kan (§. 568.), ein Winkel an der Peripherie, und dieſer hat den halben Bogen, worauf er ſtehet, zu ſeinem Maas (§. 560.), und darum hat auch der Winkel ABC den halben Bogen ADC, und alſo den Bogen AED zu ſeinem Maas, es iſt aber AED = BAED — AB, und daher iſt auch das Maas des Winkels ABC = dem Bogen BAED — dem Bogen AB. Nun iſt aber BAED ein halber Cirkel, weil der Bogen AED = dem Bogen DFC, und der Bogen AB = dem Bogen BC, folglich der Bogen AED + AB = dem Bogen DFC + BC, und der halbe Cirkel hat 180° (§. 480.), und derohalben findet man auch den Polygonwinkel, wenn man 360° durch die Zahl der Seiten des Vieleks dividiret, und den Quotient von 180° abziehet.

§. 630.

Multiplicirt man den Polygonwinkel mit der Zahl der Winkel: So bekomt man die Summe aller Winkel in einem regulären Vielek.

§. 631.

§. 631.

Die Summe aller Winkel A, B, C, D, E in einem ieden Vielek zu finden, Tab. XVI. fig. 166.

Erſte Auflöſung.

1) Weil ein iedes Vielek, aus einem innerhalb demſelben angenommenen Punkt G, in ſo viele Triangel verteilt werden kan, als es Seiten hat (§. 434.), und die Summe der Winkel in einem ieden Triangel 180° iſt: So multiplicire man 180° mit der Zahl der Seiten der Figur; So bekomt man die Summe von allen Winkeln der Triangel, worinnen das Vielek zerteilt werden kan.

2) Weil man nun die Winkel um den Punkt G nicht wiſſen will, alle Winkel um dieſen Punkt aber 360° ausmachen (§. 491.): So ziehe man 360° von der gefundenen Summe aller Winkel in den Triangeln, worinnen ſich das Vielek zerteilen läſt, ab: So bekomt man die verlangte Summe der Winkel in dem Vielek.

Andere Auflöſung.

Weil ſich eine iede geradlinigte Figur ABCDEF, Tab. XVI. fig. 167, durch Diagonallinien in zwei Triangel weniger verteilen läſt, als ſie Seiten hat (§. 434.), und die Spizzen dieſer Triangel ſich in den Spizzen der Figur endigen, die Summe der Winkel eines ieden Triangels aber 180° iſt (§. 542.): So findet

findet man auch dadurch die Summe aller Winkel einer Figur, wenn man die Zahl der Seiten weniger zwei mit 180° multipliciret.

Das dritte Kapittel von den Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung, und Ausmeſſung der Gröſen in den Flächen.

§. 632.

Das Quadrat, das Rechtek, die Raute, und die länglichte Raute wird 1) von der Diagonallinie BC, Tab. XVI. fig. 168, 169, 170. und 171, in zwei gleiche Triangel zerteilet, 2) die einander entgegen geſezten Winkel m und n, und o + r und s + t ſind einander gleich, und 3) die entgegen geſezten Seiten AB und CD, und AC und BD ſind einander parallel.

Beweis.

I. Weil in alle dieſen Figuren die einander entgegen geſezten Seiten gleich ſind (§. 429.), und die Diagonallinie CB dieſe Vierekke in zwei Triangel zerteilet (§. 433. und 434.): So iſt in den Triangeln ABC und BCD die Seite AB = CD, und die Seite AC = BD. Nun iſt aber auch BC = BC (§. 27.),

(§. 27.), und daher iſt der $\triangle ABC = \triangle BCD$ (§. 507), und es werden alle dieſe Figuren durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel zerteilet.

II. Weil der $\triangle ABC = \triangle BCD$ (N. I.): So iſt auch der $\angle m = \angle n$ (§. 507.), nun iſt aber auch der $\angle r = \angle s$, und der $\angle o = \angle t$ (§. 507.), und daher iſt der $\angle o + r =$ dem $\angle s + t$ (§. 25. und 85.), und es ſind alſo in alle dieſen Figuren die einander entgegen geſezten Winkel gleich.

III. Weil der $\angle r = \angle s$ (N. II.); So iſt auch AB ⌗ CD (§. 526.): Und weil der $\angle o = \angle t$ (N. II.); So iſt auch AC ⌗ BD (§. 526.), eben daher aber ſind in alle dieſen Figuren die einander entgegen geſezten Seiten einander parallel.

§. 633.

Es ſind alſo das Quadrat, das Rechtek, die Raute, und die länglichte Raute Parallelogramma, weil ihre entgegen geſezten Seiten einander gleich, und parallel ſind (§. 429.), und es werden alle Parallelogramma durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilet.

§. 634.

Aus einer gegebenen Seite ab, Tab. XVI. fig. 168, ein Quadrat zu machen.

Aufloſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, und trage aus A in B die Linie ab.

2) In

2) In den Punkt A fälle man eine Perpendicular-linie AC (§. 576.), und trage die Linie ab aus A in C.

3) Mit AB mache man aus B einen Bogen über AB, aus C aber mit eben dieſer Länge einen Bogen über AC, welcher ienen in dem Punkt D durchſchneidet (§. 502.) Jezt

4) ziehe man die Linien BD und CD: So iſt das Quadrat ABDC, deſſen Seite ab gleich iſt, gemacht.

Beweis.

Wenn man AB = ab, AC = AB, und aus AB und AC, und dem rechten Winkel m den Triangel ABC (§. 533.), aus C und B mit BC, AB und AC aber den Triangel CBD macht (§. 532.): So iſt der △ABC = △BCD (§. 532. und 507.), und alſo AC = AB, CD = AB, und BD = AB, und ∠m = ∠n, es iſt aber, vermöge deſſen, was geſchehen iſt, der ∠m = 90° (§. 416.), und daher iſt auch n = 90° (§. 495.), und weil in dem rechtwinkelichten Triangel ABC der ∠o = 45°, und der ∠s = 45°, und in dem rechtwinkelichten Triangel der ∠r = 45°, und der ∠t = 45° (§. 551.): ſo iſt auch der ∠o + r = 90°, und der ∠o + s = 90° (§. 85. u. 495.). Da alſo AC = AB, CD = AB, und DB = AB,

und $\angle m = 90^\circ$, $\angle n = 90^\circ$, $\angle o + r = 90^\circ$, und $\angle s + t = 90^\circ$: So wird auch durch dieſe Aufgabe ſtets ein Quadrat gemacht (§. 429. und 632.).

§. 635.

Aus zwei gegebenen ungleichen Seiten ab und ac, Tab. XVI. fig. 169, ein Rechtek zu machen.

Auflöſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, und trage aus A in B die Linie ab.

2) Man richte in dem Punkt A eine Perpendicularlinie auf (§. 576.), und trage aus A in C die Linie ac.

3) Aus dem Punkt B mache man mit ac über AB, aus dem Punkt C aber mit ab über AC einen Bogen, welcher ienen in D durchſchneidet.

4) Man ziehe die Linien BD und CD: So iſt das Rechtek, wovon zwei Seiten der Linie ac, und zwei Seiten der Linie ab gleich ſind, gemacht.

Beweis.

Wenn man AB=ab, AC=ac, und aus AB und AC, und dem rechten Winkel m den Triangel ABC (§. 533.), aus C und B aber mit BD=ac, und CD=ab den Triangel BCD macht (§. 532.): So iſt der △ ABC=△ BCD (§. 532. und 507.), und alſo AB=CD, und AC=BD, und der $\angle m = n$ (§. 507.). Es iſt aber, vermöge deſſen,

was

was geſchehen iſt, der Winkel m = 90° (§. 416.), und daher iſt auch der ∠ n = 90° (§. 495.). Nun machen aber auch die beiden Winkel r und t, und die beiden Winkel o und s nach 90°, und einen rechten Winkel aus (§. 543.), und der Winkel r iſt gleich dem Winkel s, weil der △ABC = △BCD (§. 507.), und daher iſt auch der Winkel s + t = 90° (§. 25.), eben ſo iſt aber auch der Winkel t gleich dem Winkel o (§. 507.), und daher iſt auch der Winkel o + r = 90° (§. 25.). Da alſo AB = CD, AC = BD, ∠m = 90°, ∠n = 90°, ∠s + t = 90°, und ∠o + r = 90°: So wird auch durch dieſe Aufgabe ſtets ein Rechtek gemacht (§. 429. und 632.).

§. 636.

Aus einer gegebenen Seite ab, und einem ſchiefen Winkel c, Tab. XVI. fig. 170, eine Raute zu machen.

Aufloſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, und trage aus A in B die Linie ab.

2) Man trage an A den gegebenen Winkel c, (§. 497.), aus A in C aber die Seite AB = ab.

3) Mit AB = AC mache man aus B über AB einen Bogen, aus C über AC aber mit eben der Län-

ge einen andern Bogen, welcher ienen in D durchſchneidet. Jezt

4) ziehe man die Linien BD und CD: So iſt die Raute ABCD, deſſen Seite ab gleich iſt, gemacht.

Beweis.

Wenn man AB = ab, und AC = AB, den ∠ m = ∠ c, und daraus den Triangel ABC (§. 533.), mit BC, AB, und AC aber aus den Punkten B und C den Triangel BCD macht (§. 532.): So iſt der △ ABC = △ BCD (§. 532. und 507.), und alſo AC = AB, CD = AB, und BD = AB, und der ∠ m = dem ∠ n (§. 507.), der ∠ m aber = ∠ c, und der ∠ n = ∠ c, weil der ∠ m dem ∠ c gleich gemacht worden (§. 25. und 497.): Weil nun AB = AC; So iſt der ∠ o = ∠ s (§. 550.): Und weil BD = CB; So iſt der ∠ r = ∠ t (§. 550.), und alſo der ∠ s + t = ∠ o + r (§. 85.). Es iſt alſo AC = AB, CD = AB, und BD = AB, und ∠ m = ∠ n = ∠ c, und ∠ s + t = ∠ r + o, und daher wird auch durch dieſe Aufgabe ſtets eine Raute gemacht (§. 429. und 632.).

§. 637.

Aus zwei gegebenen ungleichen Seiten ab und cd, und einem ſchiefen Winkel e, Tab. XVI. fig. 171, ein länglichte Raute zu machen.

Aufloͤſung.

1) Man ziehe eine gerade Linie AB, und trage aus A in B die Seite ab.

2) An A trage man den Winkel e (§. 497.), aus A in C aber die Seite cd.

3) Man mache mit AC=cd aus B uͤber AB einen Bogen, aus C uͤber AC aber mit AB=ab einen andern Bogen, welcher ienen in D durchſchneidet. Endlich

4) ziehe man die Linien BD und CD; So iſt die laͤnglichte Raute, in welcher AB=CD, und AC=BD, gemacht.

Beweis.

Wenn man AB=ab, den ∠ m=∠ e, und AC=cd, daraus aber den Triangel ABC (§. 533.), mit BC, BD=AC, und CD=AB, aus den Punkten C und B aber den Triangel BCD macht (§. 532.): So iſt der △ ABC = △ BCD (§. 507. und 532.), und alſo AB=CD, AC=BD, und ∠ m=∠ n (§. 507.), der ∠ m aber = dem ∠ e, und der ∠ n=∠ e, weil ∠ m dem ∠ e gleich gemacht worden (§. 25. und 497.). Da nun der △ ABC=△ BCD (§. 507.): So iſt auch der ∠ r=∠ s, und ∠ o=∠ t, und folglich der ∠ o + r=∠ s + t (25. und 85.). Weil alſo AB=CD, AC=BD, und ∠ m=∠ n=∠ e, und ∠ o + r

$=\angle s + t$: So wird auch durch dieſe Aufgabe ſtets eine länglichte Raute gemacht (§. 429. und 632.).

§. 638.

Eine iede geradlinigte Figur zu zeichnen.

Erſte Auflöſung.

Wenn alle Diagonallinien, und alle Seiten der Figur gegeben ſind.

Es kan eine iede Figur in zwei Triangel weniger geteilt werden, als ſie Seiten hat (§. 434.). Wenn man daher die Triangel ABC, ACD, und DCE, Tab. XVI. fig. 172, aus ihren gegebenen Seiten nach der Ordnung, wie ſie an einander liegen, und ſo, daß ſtets die, welche eine gemeinſchaftliche Seite haben, an einander kommen, zuſammen ſezt (§. 532.): So wird, weil ein ieder Triangel den andern, und alſo die ganzen Figuren einander dekken, die verlangte Figur gezeichnet (§. 499.).

Andere Auflöſung.

Wenn man aus allen Seiten einer Figur weniger zwei, und allen Winkeln weniger einem, welchen iene Seiten einſchlieſen, eine Figur zeichnen ſoll.

Man trage auf AB, Tab. XVI. fig. 173, eine gegebene Seite der Figur, an A und B trage man die dahin gehörige Winkel (§. 497.), und aus A in D, und B in C die dahin kommende Linien (§. 533.), endlich

endlich aber trage man an D und C die dahin gehöri-gen Winkel: So durchſchneiden ſich die Schenkel in E (§. 534.), und es iſt, weil ein ieder Triangel den andern, und die ganze Figuren einander dekken, das Verlangte geſchehen (§. 499.).

Dritte Auflöſung.

Wenn alle Seiten weniger einer, und alle Winkel weniger zwei, die an iener Seite liegen, gegeben ſind.

Man trage auf AB eine gegebene Seite der Figur, Tab. XVII. fig. 174, an A und B aber die dahin gehörigen Winkel, und mache AD und BC den an dieſen Orten liegenden Seiten gleich, iezt trage man an C den dahin gehörigen Winkel, und mache CE der hier liegenden Seite gleich, von D nach E aber ziehe man eine gerade Linie DE: So iſt, weil ein ieder Triangel den andern, und die ganze Figuren einander dekken (§. 499. und 533.), das Verlangte geſchehen.

Vierte Auflöſung.

Wenn alle Seiten einer Figur, und alle an einander liegende Winkel weniger drei gegeben ſind.

Man mache die Seite AB, Tab. XVII. fig. 175, ſo gros, als die gegebene, und trage an A und B die dahin gehörigen Winkel, aber auch AE und BC mache man den hier liegenden Seiten gleich (§. 533.),

endlich mache man mit ED, und CD in D einen Durchſchnitt (§. 532.): So iſt, weil ein ieder Triangel den andern, und die ganze Figuren einander dekken (§. 499.), das Verlangte geſchehen.

§. 639.

Auf eine gegebene Seite AB, Tab. XVII. fig. 176, ein reguläres Vielek zu beſchreiben.

Auflöſung.

1) Man ſuche den Polygonwinkel des zu beſchreibenden Vieleks (§. 629.).

2) Man halbire dieſen Winkel, und trage die Hälfte an A und B: So werden ſich die Schenkel AC und BC in dem Punkt B durchſchneiden, und es iſt AC=BC (§. 550.).

3) Aus dem Punkt C beſchreibe man mit AC durch A und B einen Cirkel, und trage in dieſem AB herum: So iſt das verlangte Vielek ABDEFGA gemacht.

Beweis.

Man kan ſich ein iedes Vielek gedenken, als ſeie es in einem Cirkel beſchrieben (§. 568.), und es kan aus einem innerhalb demſelben angenommenen Punkt in ſo viele Triangel geteilt werden, als es Seiten hat (§. 434.), geſchiehet aber dieſes aus dem Mittelpunkt: So iſt die Spizze eines ieden Triangels in dieſem Mittelpunkt, die Grundlinie dieſes Triangels aber in der Peri-

Peripherie, und es ſind ſtets zwei Radii die zwei Seiten eines Triangels. Dieſemnach wird das Vielek in ſo viele gleiche Triangel geteilt, als es Seiten hat (§. 507.), und es ſind die Winkel m und n, und o und r einander gleich (§. 507. und 550.), und weil m und n, und r und o Polygonwinkel ſind, ſo werden dieſe durch die Radii AC und BC in gleiche Teile geteilet. Wenn man alſo an A und B die halbe Polygonwinkel träget: So iſt auch AC=BC (§. 550.), und man hat, da dieſe Radii eines Cirkels ſind (§. 406.), den Mittelpunkt C zu dem Cirkel gefunden, worinnen man die Seite des Vieleks herumtragen kan.

§. 640.

Suchet man ſonſt auch den Polygonwinkel (§. 629.), und trägt ihn in B, und macht BD=AB, Tab. XVII. fig. 176, beſchreibt alsdann aber durch A, B und D einen Cirkel (§. 572.), und trägt in dieſem die Seite herum, ſo bekomt man ebenwol das verlangte Vielek (§. 568.).

§. 641.

Teilt man 360° durch die Zahl der Seiten, die ein Vielek in einem Cirkel haben ſoll, und macht an dem Mittelpunkt C, Tab. XVII. fig. 176, einen Winkel DCE, der ſo viel Grade hat, als der Quo-

tient anzeigt (§. 497.), ſo ſchneidet dieſer Winkel die Seite ED von dem verlangten Vielek ab, die man in dem Cirkel herumtragen kan, und ſo kan man in einem ieden Cirkel ein verlangtes Vielek beſchreiben (§. 568.). Man kan alſo hierdurch ein gleichſeitiges Dreiek, ein Quadrat, ein reguläres Fünfek, und ein iedes reguläres Vielek in einem Cirkel beſchreiben (§. 429. 430. und 552.).

§. 642.

Die Seite AB, Tab. XVII. fig. 176, des regulären Sechseks iſt dem Radio des Cirkels gleich, in welchem das Sechsek beſchrieben werden kan.

Beweis.

Wenn AB die Seite eines regulären Sechseks iſt: So iſt der Winkel $ACB = 360^\circ : 6 = 60^\circ$ (§. 568. und 641.), und daher iſt der $\angle o + m = 120^\circ$ (§. 542.). Es iſt aber $AC = CB$ (§. 406.), und daher iſt auch der $\angle o = \angle m$ (§. 550.), folglich $\angle o = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, und $\angle m = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Da alſo $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle o = 60^\circ$, und $\angle m = 60^\circ$: So iſt auch $AB = BC = AC$ (§. 553.), und alſo AB dem Radio des Cirkels gleich. Wenn man alſo den Radium im Cirkel herum träget; So kan man ein reguläres Sechsek in

in einem Cirkel beſchreiben: Und wenn man mit der einen gegebenen Seite des Sechseks einen Cirkel beſchreibt, und die Seite in demſelben herum trägt; So wird nach einer gegebenen Seite ein Sechsek beſchrieben.

§. 643.

Wenn man eine Figur im Kleinen, nach einem veriüngten Maasſtaab, einer Figur in dem Groſen ähnlich macht (§. 581.): So wird geſagt, daß man eine Figur in den Grund lege.

§. 644.

Eine iede geradlinigte Figur in den Grund zu legen.

Erſter Fall.

Wenn man in der ganzen Figur herum gehen kan.

Erſte Auflöſung.

1) Weil man eine Figur durch Diagonallinien in zwei Triangel weniger verteilen kan, als ſie Seiten hat (§. 434.): So ſtekke man in alle Winkel der Figur Stäbe, und meſſe alle Seiten der Figur AB, BC, CD, DE, und EA (§. 477.), aber auch alle Diagonallinien AC und EC, Tab. XVII. fig 177.

2) Man ziehe auf dem Papier eine gerade Linie ab, und mache dieſe nach dem veriüngten Maasſtaab (§. 601.), ſo gros als AB, alsdann aber zeichne man

die

die Figur ABCDE und A, indem man die Linien nach dem veriüngten Maasſtaab (§. 601.) ſo gros nimt, als ſie im Groſen gemeſſen worden, auf dem Papier im Kleinen (§. 638. 1 Aufloͤſ.); So entſtehet die Figur abcde und a, und es iſt die verlangte Figur in den Grund gelegt.

Beweis.

Weil man auf dem veriüngten Maasſtaab ab, bc, und ac, und ac, ae und ce, und ce, ed und cd ſo gros genommen hat, als AB, BC, und AC, und AC, AE und CE, und CE, ED und CD; So verhalten ſich in den Triangeln der kleinen Figur die gleichnamigen Seiten, wie die gleichnamigen Seiten in den Triangeln der groſen Figur (§. 587.): Und weil die Triangel in dem Kleinen nach eben der Ordnung, wie im Groſen, zuſammen geſezt worden; So verhalten ſich auch die gleichnamigen Seiten in der kleinen Figur, wie die gleichnamigen Seiten in der groſen Figur. Da nun auch die Winkel in den Triangeln in der kleinen Figur, den Winkeln in den Triangeln der groſen Figur gleich ſind (§. 587.), und die Winkel in den Triangeln die Winkel in den Figuren ausmachen, und daraus zuſammen geſezt ſind: So müſſen auch die Winkel in der kleinen Figur den Winkeln in der groſen Figur gleich ſein. Man hat alſo in dem kleinen eine Figur gezeichnet, deren gleichnamige Winkel den gleichnamigen Winkeln in der

groſen

groſen Figur gleich ſind, und deren gleichnamige Seiten ſich eben ſo verhalten, wie die gleichnamige Seiten in der groſen Figur, und demnach wird durch dieſe Auflöſung eine Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Andere Auflöſung.

1) Weil ſich eine iede Figur aus einem innerhalb demſelben angenommenen Punkt in ſo viele Triangel zerteilen läſt, als ſie Seiten hat (§. 434.): So nehme man nach Gefallen innerhalb der Figur einen Punkt A an, Tab. XVII. fig. 178, und ſtekke in alle Spizzen der Winkeln der Figur Stäbe.

2) Man ſezze in den Punkt A einen Meßtiſch, lege das Diopternlineal an dieſen Punkt, und viſire nach B, C, D, E, F und G, an dem Lineal her aber ziehe man auf dem Meßtiſch die Linien Ab, Ac, Ad, Ae, Af und Ag.

3) Man meſſe mit der Kette, der Schnur, oder der Meßſtange die Linien AB, AC, AD, AE, AF und AG.

4) Man trage nach einem verüngten Maasſtaab (§. 601.) AB aus A in b, AC aus A in c, AD aus A in d, AE aus A in e, AF aus A in f, und AG aus A in g. Endlich

5) ziehe man die Linien bc, cd, de, ef, fg, und gb: So iſt die verlangte Figur in den Grund gelegt.

Beweis.

Beweis.

Weil die Linie Ab und Ac auf dem veriüngten Maasſtaab ſo gros genommen worden, als AB und AC: So iſt Ab: Ac=AB: AC, es iſt aber der Winkel bAc= Winkel BAC (§. 27.), und derohalben verhält ſich Ac: AC=bc: BC (§. 585.). Es iſt aber auch Ac: Ad=AC: AD, und ∠cAd=∠CAD, und derohalben verhält ſich auch Ac: AC=cd:CD (§. 585.). Da alſo Ac: AC=bc: BC, und Ac: AC=cd: CD: So iſt auch bc: BC=cd: CD, und ſo kan man erweiſen, cd: CD=ed:ED, ed:ED=ef: EF, ef: EF=fg: FG, und fg: FG=gb: GB, dieſemnach aber verhalten ſich die Seiten in der kleinen Figur, wie die Seiten in der groſen Figur. Nun iſt aber auch in dem Triangel Abc und ABC der ∠Acb=∠ACB, und der ∠Acd=∠ACD (§. 585.), und daher iſt der ∠Acb+∠Acd=∠ACB+ACD (§. 85.), der ∠Acb+Acd aber iſt =∠bcd, und der ∠ACB+ACD=∠BCD (§. 30.), und daher iſt auch der ∠bcd=∠BCD (§. 25.), und ſo kan man erweiſen, daß der ∠d=∠D, der ∠e=∠E, der ∠f=∠F, der ∠g=∠G, und der ∠b=∠B, und demnach entſtehet durch dieſe Auflöſung eine Figur im Kleinen, worinnen ſich die gleichnamigen Seiten eben ſo, wie die gleichnamigen Seiten in der groſen Figur verhalten, und die Winkel in iener Figur

gur den Winkeln in dieſer Figur gleich ſind (§. 581.), und es wird alſo eine Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Dritte Aufloͤſung.

1) Man meſſe mit dem Aſtrolabio aus einem innerhalb der Figur angenommenen Punkt A, Tab. XVII. fig. 179, die Winkel BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, und GAB.

2) Man meſſe die Linien AB, AC, AD, AE, AF und AG.

3) Man nehme auf dem Papier einen Punkt a an, und trage, nachdem man eine Linie ab gezogen, an dieſen Punkt alle Winkel, aber in der Ordnung, wie man ſie gemeſſen hat, und dieſelbe an einander liegen.

4) Man trage die Linien AB, AC, AD, AE, AF, und AG, nach dem veriuͤngten Maasſtaab aus a in b, a in c, a in d, a in e, a in f, und a in g. Endlich

5) ziehe man die Linien bc, cd, de, ef, fg, und gb: So iſt die Figur, dem vorigen Beweis zu Folge, in den Grund gelegt (§. 643.).

Vierte Aufloͤſung.

1) Man ziehe in der Figur eine Diagonallinie AB, Tab. XVII. fig. 180, und faͤlle auf dieſelbe aus den Spizzen der Figur Perpendicularlinien CI, FK, DL, GM, EO, und NH, man ſtelle nemlich das

Aſtro-

Aſtrolabium auf 90°, und ſezze daſſelbe ſo lang auf der Linie AB vor- und rükwarts, bis, wenn man durch ſeine Dioptern viſiret, der eine Schenkel auf AB, der andere aber in eine Spizze der Figur fället, durch welche man eine Perpendicularlinie ziehen will.

2) Man meſſe die Abſtände der Perpendicularlinie AI, IK, KL, LM, MO, ON und NB, und die Perpendicularlinien CI, FK, DL, MG, EO und HN.

3) Man ziehe auf dem Papier eine gerade Linie ab, und trage nach dem veriüngten Maasſtaab aus a in i, i in k, k in l, l in m, m in o, o in n, und n in b, die Abſtände AI, IK, KL, LM, MO, ON und NB.

4) In die Punkten i, k, l, m, o, und n fälle man Perpendicularlinien (§. 521.), ic, kf, ld, mg, eo und nh, und mache nach dem veriüngten Maasſtaab ic=IC, kf=KF, dl=DL, mg =MG, oe=OE, und nh=NH. Endlich

5) ziehe man die Linien ac, cd, de, eb, bh, hg, gf und fa: So iſt die Figur in den Grund gelegt.

Beweis.

I. Weil ai : ic=AI : IC, und der ∠ aic= ∠AIC (§.416. und 495.): So iſt auch der △ aic ∽ AIC, und ∠ a=∠A (§. 585.): Und weil il:

ic=

ic = IL : lC, und der ∠ cil = CIL; So iſt auch der △ ilc ∽ △ ILC, und alſo der ∠ cli = ∠ CLI (§. 585.). Da alſo in dem Triangel alc, und ALC der ∠ a = ∠ A, und der ∠ cli = ∠ CLI: So iſt auch der △ alc ∽ △ ALC, und al: ac = AL: AC (§. 586.), folglich auch al: AL = ac: AC (§. 233.). Weil nun al ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen hat, als AL in dem Groſen ausmacht: So muß auch ac eben ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen haben, als AC im Groſen in ſich begreift (§. 217.).

II. Weil der △ alc ∽ △ ALC (N. I.): So iſt auch ac: cl = AC: CL (§. 586.), und ac: AC = cl: CL (§. 233.), und es muß, weil ac ſo viel Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen hält, als AC im Groſen hat (N. I.), auch cl ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen haben, als CL im Groſen hat (§. 217.). Demnach iſt cl: CL = ld: LD, und cl: ld = CL: LD (§. 233.), es iſt aber auch der ∠ dli = ∠ DLI (§. 416. und 495.), und der ∠ cli = ∠ CLI (N. I.), folglich der ∠ cld = ∠ CLD (§. 87.), und daher iſt der △ cld ∽ △ CLD, und alſo cl : cd = CL: CD (§. 585.).

III. Da ac: AC = cl: CL (N. II.), und, weil cl: cd = CL: CD (N. II.), auch cl: CL = cd: CD (§. 233.): So iſt ac: AC = cd: CD (§. 212.).

IIII. Weil der △ cld ∽ △ CLD (N. II.): So

iſt auch cd: dl=CD: DL (§. 585.), und cd: CD=dl: DL (§. 233.): Und weil dl: lo=DL: LO, und der ∠ dlo=∠ DLO; So iſt auch △ ldo∽△ LDO, und dl: do=DL: DO (§. 585.), und dl: DL=do: DO (§. 233.). Da alſo cd: CD=dl: DL, und dl: DL=do: DO: So iſt auch cd: CD=do: DO (§. 212.).

V. Weil der △ ldo∽LDO (N. IIII.): So iſt auch lo:od=LO:OD, und lo:LO=od:OD (§. 233.). Es hält aber lo ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen, als LO im Groſen hat, und daher muß auch do ſo viele Ruthen, Schuhe und Zolle im Kleinen haben, als OD im Groſen enthält, und es iſt do:DO=oe:OE, und do:oe=DO:OE (§. 233.). Weil nun der △ ldo∽ dem △ LDO (N. IIII.): So iſt auch der ∠ dol=∠ DOL, und, weil der ∠ eol= dem ∠ EOL (§. 416. und 495.), der ∠ eod=∠ EOD (§. 87.). Da alſo do:oe=DO: OE, und der ∠ eod=∠ EOD: So iſt auch der △ doe∽DOE, und do: de=DO: DE (§. 585.), und do: DO=de: DE (§. 233.), es iſt aber auch cd: CD=do: DO (N. IIII.), und daher iſt cd: CD=de: DE (§. 212.). So nun kan man den Beweis ſtets fortſezzen, und es verhalten ſich alſo die gleichnamigen Seiten in der kleinen Figur, wie die gleichnamigen Seiten in der groſen Figur.

VI. Weil

VI. Weil der $\triangle aic \backsim \triangle AIC$, der $\triangle ilc \backsim \triangle ILC$, und der $\triangle cld \backsim \triangle CLD$ (N. I. und II.): So iſt auch der $\angle aci = \angle ACI$, der $\angle icl = \angle ICL$, und der $\angle lcd = \angle LCD$ (§. 585.), folglich der $\angle acd = \angle ACD$ (§. 30. und 85.), und ſo kan man beweiſen, daß die übrigen gleichnamigen Winkel in beiden Figuren einander gleich ſind. Da ſich alſo in der kleinen Figur die gleichnamigen Seiten verhalten, wie die gleichnamigen Seiten in der groſen Figur, und die Winkel in iener den Winkeln in dieſer Figur gleich ſind: So wird auch durch dieſe Auflöſung eine Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Dieſe Aufgabe iſt nicht nur ſehr bequem, ſondern auch ſehr richtig, und durch ſie kan man am beſten eine ganze Gegend in den Grund legen, wenn man Wege, Felder, Wieſen, Wälder und Dörfer, durch Perpendicularlinien an eine Diagonallinie anhängt, ia man kan durch ſie auch eine krumme Figur in den Grund legen, wenn man aus den Krümmungen die Perpendicularlinien ſehr nahe an einander auf die Diagonallinie fält.

Zweetter Fall.

Wenn man in der Figur nicht herum gehen, dieſelbe aber aus den Spizzen A und B zweier Winkel, die an einer Linie AB liegen, überſehen kan.

Erſte Auflöſung.

1) Man ſezze einen Meßtiſch in die Spizze A, und lege an den Punkt a, Tab. XVII. fig. 181, ein Diopternlineal, alsdann aber viſire man nach den Spizzen B, C, D und E der Figur, in die man Stäbe geſtekt hat, aus dem Punkt a nun ziehe man an dem Lineal her nach dieſen Spizzen gerade Linien ab, ac, ad und ae.

2) Man meſſe die Linie AB, und trage ſie nach dem veriüngten Maasſtaab aus a in b. Jezt.

3) trage man den Meßtiſch aus A in die Spizze B, in A aber ſtekke man einen Staab, und richte den Meßtiſch dergeſtalt, daß der Punkt b auf den Punkt B, und die Linie ba in die Linie BA zu liegen komt, wenn man durch das Diopternlineal, das man an ba gelegt hat, nach dem Staab in A viſiret.

4) Man lege das Diopternlineal an den Punkt b, und viſire nach den Spizzen C, D und E der Figur, an dem Lineal her aber ziehe man die Linien bc, bd und be: So werden dieſe die Linien ac, ad und ae in den Punkten c, d und e durchſchneiden. Endlich

5) ziehe man die Linien cd und de: So iſt die Figur in den Grund gelegt.

Beweis.

I.) In den Triangeln BAD und bad iſt der $\angle$ DAB $= \angle$ dab, und der $\angle$ DBA $= \angle$ dba, und daher iſt ab : AB $=$ bd : BD (§. 586.).

II.) In

II.) In den Triangeln CAB und cab iſt der ∠ CAB = ∠ cab, und der ∠ CBA = ∠ cba, und daher iſt ab : AB = bc : BC (§. 586.).

III.) Weil alſo ab : AB = bd : BD (N. I.), und ab : AB = bc : BC (N. II): So iſt auch bd : BD = bc : BC (§. 212.), und bd : bc = BD : BC (§. 233.). Weil dieſes, und der ∠ CBD = ∠ cbd (§. 27.): So iſt auch bc : cd = BC : CD (§. 585.).

IIII.) Der Triangel BAD ∽ Triangel bad (N. I.), und daher iſt ab : AB = ad : AD (§. 586.).

V. In den Triangeln ABE und abe iſt der ∠ EAB = ∠ eab, und der ∠ EBA = ∠ eba, und daher iſt ab : AB = ae : AE (§. 586.).

VI.) Da alſo ab : AB = ad : AD (N. IIII.), und ab : AB = ae : AE (N. V.): So iſt auch ad : AD = ae : AE (§. 212.), und ad : ae = AD : AE (§. 233.). Weil nun dieſes, und der ∠ DAE = ∠ dae: So iſt auch ae : ed = AE : ED, und dieſemnach verhalten ſich die gleichnamigen Seiten in der kleinen Figur, wie in der groſen Figur, es iſt aber auch der ∠ a = ∠ A, weil, dem Erwieſenen zu- folge, der △ abe ∽ △ ABE, der ∠ b = ∠ B, weil der △ abc ∽ △ ABC, der ∠ c = ∠ C, weil der △ bcd ∽ △ BCD, der ∠ e = ∠ E, weil der △ aed ∽ △ AED, und der ∠ d = ∠ D, weil der △ bcd ∽ △ BCD, der △ bda ∽ △ BDA, und der △ aed ∽ △ AED, die gleichnamigen Winkel dieſer

Triangel aber in den Spizzen d und D zuſammen kommen (§. 30. und 85.). Es wird demnach auch durch dieſe Aufgabe eine Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Andere Auflöſung.

1) Man meſſe in der Spizze A, Tab. XVIII. fig. 182, mit dem Aſtrolabio die Winkel EAD, DAC, und CAB.

2) Aus der Spizze B meſſe man die Winkel CBD, DBE und EBA.

3) Jezt meſſe man auch die Linie AB.

4) Man ziehe auf dem Papier eine Linie ab, und trage nach dem veriüngten Maasſtaab die Linie AB aus a in b.

5) Man mache mit dem Transporteur an dem Punkt a die Winkel ead, dac und cab den gemeſſenen Winkeln EAD, DAC und CAB, an dem Punkt b aber die Winkel cbd, dbe und eba, den Winkeln CBD, DBE und EBA gleich (§. 497., ſo werden ſich die Schenkel dieſer Winkel in c, d und e durchſchneiden. Endlich

6) ziehe man die Linien cd und de: So iſt, dem vorigen Beweis zufolge, die Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Durch dieſe Aufgabe kan man eine ganze Gegend in den Grund legen, wenn man zu beiden Seiten der Standlinie AB nach den Dingen viſiret, die man in einen Riß bringen will.

Dritter

Dritter Fall.

Wenn man eine Figur in den Grund legen ſoll, in die man nicht kommen, ſie aber doch ganz umgehen kan.

Erſte Auflöſung.

1) Man ſtekke in alle Spizzen der Figur Stäbe, und ſezze einen Meßtiſch in A, Tab. XVIII. fig. 183, man viſire aus dem Punkt a nach den Stäben B und F, und ziehe an dem Diopternlineal die Linien ab und af.

2) Man meſſe die Linie AB, und trage ſie nach dem veriüngten Maasſtaab aus a in b.

3) Man trage den Meßtiſch aus A in B, ſo daß der Punkt b auf B komt, und man den in A geſtekten Staab ſiehet, wenn man an ba das Diopternlineal leget, und nach dieſem Staab viſiret, iezt aber viſire man aus b nach C, und ziehe bc.

4) Man meſſe die Linie BC, und trage ſie nach dem veriüngten Maasſtaab aus b in c.

5) Man trage den Meßtiſch aus B in C, ſo daß c auf C, und wieder bc auf BC zu liegen komt, man viſire aus c nach D, ziehe cd, meſſe CD, und trage dieſe Länge nach dem veriüngten Maasſtaab aus c in d.

6) Man trage den Meßtiſch aus C in D dergeſtalt, daß d auf D, und dc auf DC zu liegen komt, man viſire aus d nach E, ziehe de, meſſe DE, und

trage nach dem veriüngten Maasſtab DE aus d in e. Endlich

7) trage man den Meßtiſch aus D in E ſo, daß e auf E, und de auf DE zu liegen komt, man viſire aus e nach F, und ziehe die Linie ef, welche af in f durchſchneidet (§. 534.) ſo iſt die ganze Figur in den Grund gelegt.

Beweis.

Da man die Winkel in der kleinen Figur ſo gros gemacht hat, als wie in der groſen, und die Linien in iener Figur auf dem veriüngten Maasſtaab ſo gros genommen hat, als wie im Groſen: So iſt auch eine Figur entſtanden, deren gleichnamige Winkel den gleichnamigen Winkeln in der groſen Figur gleich ſind, und deren gleichnamige Seiten ſich eben ſo verhalten, wie die Seiten in der groſen Figur, und es iſt alſo dieſe Figur in den Grund gelegt (§. 643.).

Andere Auflöſung.

1) Man meſſe die Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FG und GA, Tab. XVIII. fig. 184.

2) Man meſſe die Winkel A, B, C und D.

3) Man ziehe eine Linie ab auf dem Papier, und mache dieſe nach dem veriüngten Maasſtaab, ſo gros als AB, an a und b aber trage man die Winkel A und B (§. 497., und mache nach dem veriüngten Maasſtaab ag=AG, und bc=BC.

4) An

4) An dem Punkt c mache man einen Winkel, der ſo gros iſt, als der Winkel C (§. 497.), und trage nach dem veriüngten Maasſtaab CD aus c in d.

5) Man mache den Winkel an d ſo gros, als den Winkel D, dc aber nach dem veriüngten Maasſtaab gleich DE. Endlich

6) nehme man ef, und gf auf dem veriüngten Maasſtaab ſo gros, als EF und GF, und mache damit einen Durchſchnitt in f (§. 532.); So iſt die Figur, dem vorigen Beweis nach, in Grund gelegt (§. 643.).

Dritte Auflöſung.

Wenn die Figur A, Tab. XVIII. fig. 185, aus krummen Linien beſtehet: So nehme man nach Gefallen eine Figur BCDEFB um ſie an, man meſſe dieſe nach einer von den vorhergehenden Auflöſungen, und ziehe aus allen kleinen Krümmen der Figur A auf die Linien der um ſie gezogenen Figur Perpendicularlinien ab, cd, u. ſ. w., und meſſe dieſe, ſo kan man dadurch die Figur A zeichnen (Erſter Fall vierte Auflöſ.).

Soll man durch einen Wald eine gerade Linie AB, Tab. XVIII. fig. 186, und eine Allee ABCD abſtekken: So umziehe man die Linie AB mit der Busſohle, man meſſe nemlich die Winkel A, E, F und G, indem man den Stand der Magnetnadel, die ſich beſtändig nach Norden wendet, auf den Li-

nien AE, EF, FG und GB bemerket, man meſſe aber auch die Linien AE, EF, FG und GB, und trage auf ein feſt aufgeklebtes Papier, das man während der Arbeit nicht verrükken darf, die gemeſſenen Winkel und Linien, und zwar dieſe leztere nach einem veriüngten Maasſtaab (§. 601.), endlich aber bemerke man auf dem Papier den Stand der Magnetnadel auf der Linie AB, und ſtekke darnach aus dem Punkt A in dem Wald die Linie AB ab, mit dieſer aber ziehe man CD parallel (§. 529.).

Auch dadurch wird eine ſolche Allee abgeſtekt, wenn man in der Gegend B, Tab. XVIII. fig. 187, einen Schuß thun läſt, und nach dieſer Gegend die Linie AE abſtekt, von 10 zu 10, oder 20 zu 20 Ruthen aber Pfähle C und D ſchlägt, EB auf AE perpendicular abſtekt, und EB miſſet, hernach aber ſchlieſt AE : EB = AC : CF, und AE : EB = AD : DG (§. 586.), und CF und DG von AE rechtwinkelicht hinüber miſſet.

Vierter Fall.

Wenn man eine Figur in den Grund legen ſoll, an die man gar nicht kommen kan.

Auflöſung.

Man nehme ſo viele Stände E, F, G und H an, als die Figur ABCD, Tab. XVIII. fig. 188, Winkel hat, ſo daß man aus einem Stand allemal nach drei Winkeln der Figur ſehen kan, alsdann aber verfahre

fahre man in den angenommenen Ständen, eben ſo, wie man die Weite zweier Oerter zu meſſen pflegt, zu denen man nicht kommen kan (§. 614.).

§. 645.

Weil aus einem rechtwinkelichten und gleichſchenkelichten Triangel ABC, oder ABD, Tab. XVI. fig. 168, ein Quadrat, aus einem rechtwinkelichten und ungleichſeitigen Triangel ABC oder ABD, Tab. XVI. fig. 169, ein Rechtek, aus einem gleichſchenkelichten ſpiz- oder ſtumpfwinkelichten Triangel ABC oder ABD, Tab. XVI. fig. 170, ingleichem aus einem gleichſeitigen Triangel ABC, Tab. XVIIII. fig. 189, eine Raute, und aus einem ſpiz- oder ſtumpfwinkelichten ungleichſeitigen Triangel ABC, oder ABD, Tab. XVI. fig. 171, eine länglichte Raute gemacht werden kan, und ſonſt keine Triangel möglich ſind (§. 427. 428. 634. 635. 636. und 637.), das Quadrat, das Rechtek, die Raute, und die länglichte Raute aber durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilt wird (§. 632.), und alle dieſe Figuren Parallelogramma ſind (§. 633.), die mit den Triangeln einerlei Grundlinie und einerlei Höhe haben (§. 431.): So iſt auch ein ieder Triangel, die Hälfte von einem Parallelogrammo, welches mit ihm einerlei Grundlinie und einerlei Höhe hat.

§. 646.

Parallelogramma, welche einerlei Grundlinie, und einerlei Höhe haben, ſind einander gleich.

Beweis.

I. Weil die Linie CD=AB, Tab. XVIIII. fig. 190, und FG=AB (§. 429.): So iſt auch CD=FG (§. 39.), nun iſt aber auch CG=CG (§. 27.), und daher iſt DC+CG=GF+CG, und alſo DG=CF (§. 30. und 85.). Es iſt dieſemnach in den Triangeln ADG und BCF, DG=CF, AD=BC, und AG=BF (§. 429.), und alſo iſt der △ADG=△BCF (§. 507.). Weil nun der △CGH=△CGH (§. 27.); So iſt, wenn man dieſen Triangel von den Triangeln ADG und BCF beiderſeits abziehet, das Trapezium ADCH= dem Trapezio BFGH (§. 87.): Und weil der △ABH=△ABH (§. 27.); So iſt, wenn man dieſen zu den gedachten Trapeziis beiderſeits addirt (§. 85.), das Parallelogrammum ABCD= dem Parallelogrammo ABFG (§. 30. und 85.).

II. Da CD=AB, Tab. XVIIII. fig. 191, und EF=AB (§. 429.): So iſt auch CD=EF (§. 39.), und CF−CD=CF−EF, und alſo CE=DF (§. 87.), nun iſt aber auch AC=BD, und AE=BF (§. 429.), und daher iſt der △ACE=△BDF (§. 507.) Addirt man zu dem Trapezio ABDE

den

den △ ACE, und zu eben dieſem Trapezio ABDE den △ BDF: So iſt das Parallelogrammum ABDC = dem Parallelogrammo ABFD (§. 30. und 85.).

III. Weil DE, Tab. XVIIII. fig. 192, = AB, und CD = AB (§. 429.); So iſt DE = CD (§. 39.), nun iſt aber AC = BD, und AD = BE (§. 429.), und daher iſt auch der △ ADC = dem △ BED (§. 507.). Wenn man demnach zu dem △ ABD den △ ADC, und zu eben dem △ ABD den Triangel BED addirt: So iſt das Parallelogrammum ABCD = dem Parallelogrammo ABED (§. 30. und 85.). Dieſen Beweiſen zufolge ſind alſo Parallelogramma, die einerlei Grundlinie, und einerlei Höhe haben, einander gleich.

§. 647.

Es iſt dieſemnach ein iedes Parallelogrammum einem Quadrat, oder einem Rechtek gleich, das mit ihm einerlei Grundlinie, und einerlei Höhe hat.

§. 648.

Weil ein ieder Triangel die Hälfte von einem Parallelogrammo iſt, welches mit ihm einerlei Grundlinie und Höhe hat (§. 645.), und wann die ganzen gleich ſind, auch die Hälften einander gleich ſein müſſen (§. 44.): So ſind auch die Triangel ABC, ADC, und AEC, Tab. XVIIII. fig. 193, welche einerlei

Grund-

Grundlinie AC, und einerlei Höhe AB=DF=EG haben (§. 431. 527. und 544.), einander gleich.

§. 649.

Es iſt alſo ein ieder Triangel die Hälfte von einem Quadrat, oder Rechtek, das mit ihm einerlei Grundlinie und Höhe hat.

§. 650.

Weil das Maas und die zu meſſende Gröſe Dinge von einerlei Art ſein müſſen (§. 38. und 463.): So muß man auch zu der Ausmeſſung der Flächen (§. 418.) einen Maasſtaab annehmen, der eine Fläche iſt (§. 462.). Weil nun ein iedes Parallelogrammum einem Quadrat, oder einem Rechteck, ein ieder Triangel aber der Hälfte eines Quadrats, oder eines Rechteks gleich iſt, das mit ihm einerlei Grundlinie, und einerlei Höhe hat (§. 645. und 649.), und eine iede Figur in Triangel zerteilet werden kan (§. 434.): So kan man auch zu der Ausmeſſung der Figuren einen Maasſtaab annehmen, welcher ein Quadrat, oder ein Rechtek von einer beſtimten Gröſe iſt.

§. 651.

Da das Quadrat zu der Ausmeſſung der Flächen am bequemſten iſt; So hat man auch ein Quadrat zu dem Maasſtaab der Flächen angenommen: Und damit

damit man die Seiten der Flächen mit eben dem Maasſtaabe meſſen kan, womit man die Längen miſſet (§. 466.); So hat man zu dem Maasſtaab der Flächen ein Quadrat angenommen, deſſen Seite eine Ruthe lang iſt. Es iſt alſo eine Quadratruthe, eine Kreuzruthe, oder eine gevierte Ruthe, eine Ruthe lang und breit. Weil nun eine Ruthe, damit man alle kleine Teile ausmeſſen kan, in Schuhe, Zolle, Linien, Scrupel, zweite Scrupel, und ſo weiter, geteilt wird (§. 466.): So iſt auch ein Quadratſchuh einen Schuh lang und breit, ein Quadratzoll einen Zoll lang und breit, eine Quadratlinie eine Linie lang und breit, ein Quadratſcrupel einen Scrupel lang und breit, ein zweiter Quadratſcrupel einen zweiten Quadratſcrupel lang und breit, und ſo weiter.

§. 652.

Wenn man dieſemnach findet, wie viele Quadratruthen, Quadratſchuhe, Quadratzolle, u. ſ. w. in einer gegebenen Fläche Raum haben (§. 465.): So miſſet man dieſelbe, und die Anzahl dieſer Ruthen, Schuhe, Zolle, u. ſ. w. nent man den Quadratinhalt, oder nur ſchlechtweg den Inhalt der Fläche, oder den Flächeninhalt. Da alle Figuren nach Quadraten ausgerechnet, und in Quadrate verwandelt werden können: So nent man die Ausrechnung

des Inhalts einer Figur ihre Quadratur. Die Erfindung des Flächeninhalts des Cirkels nent man beſonders die Quadratur des Cirkels.

§. 653.

Den Flächeninhalt eines Quadrats zu finden.

Auflöſung.

1) Man meſſe die Seite AB, des Quadrats, Tab. XVIIII. fig. 194.

2) Man multiplicire dieſe Zahl mit ſich ſelbſt: So iſt das Produkt der geſuchte Inhalt, und das Quadrat ausgemeſſen.

Beweis.

Weil AB=DC (§. 429.): So müſſen, wenn man iede Seite des Quadrats in Ruthen, oder Schuhe, oder Zolle einteilet, und von einem Teilungspunkt bis zu dem andern gerade Linien ziehet, in einer Reihe ſo viel Quadratruthen, oder Schuhe, oder Zolle liegen, als wie in der andern: Und weil BC ſo gros als AD, AD aber ſo gros als AB iſt; So müſſen auch ſo viele Reihen über einander liegen, als AB Ruthen, oder Schuhe, oder Zolle hat. Wenn man demnach AB mit BC, das iſt, weil AB=BC, AB mit ſich ſelbſt multipliciret: So bekomt man den Flächeninhalt des Quadrats (§. 652.).

Exem-

Exempel.

$$\begin{array}{lr} \text{Es ſei die Seite eines Quadrats} = & \overset{0}{3}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{6} \\ & 3\,2\,6 \\ \hline & 1\,9\,5\,6 \\ & 6\,5\,2 \\ & 9\,7\,8 \\ \hline \text{So iſt der Inhalt des Quadrats} = & 1\,\overset{0}{0},6\,\overset{I}{2},7\,\overset{II}{6} \end{array}$$

§. 654.

Da man alſo den Flächeninhalt eines Quadrats findet, wenn man ſeine Seite mit ſich ſelbſt multipliciret, und im Längenmaas die Ruthe 10 Fus, der Fus 10 Zoll, und der Zoll 10 Linien hat, u. ſ. w. (§. 466.): So hat auch im Flächenmaas eine Quadratruthe ABCD, Tab. XVIIII. fig. 194, 100 Quadratſchuhe, ein Quadratſchuh 100 Quadratzolle, ein Quadratzoll 100 Quadratlinien, eine Quadratlinie 100 Quadratſcrupel, und ein Quadratſcrupel 100 Quadratzweiteſcrupel, und ſo weiter (§. 651.).

§. 655.

Es hat dieſemnach eine Quadratruthe 100 Quadratſchuhe, oder 10000 Quadratzolle, oder 1000000 Quadratlinien, oder 100000000 Quadratſcrupel, oder 10000000000 Quadratzweiteſcrupel (§. 466.).

§. 656.

Weil 100 Dinge von der kleineren Art ein Ding in der gröſeren Art ausmachen (§. 60. und 654.): So ſind auch, wenn man das Flächenmaas in Zahlen ausdrükt, ſtets in der dritten Stelle von der rechten nach der linken Hand zu, Dinge enthalten, die 100mal mehr gelten, folglich Dinge von einer gröſeren Art, und es machen von der Rechten nach der Linken 100 Quadratzweiteſcrupel einen Quadratſcrupel, 100 Quadratſcrupel eine Quadratlinie, 100 Quadratlinien einen Quadratzoll, 100 Quadratzolle einen Quadratſchuh, und 100 Quadratſchuhe eine Quadratruthe (§. 66.).

§. 657.

Weil dieſes iſt; So muß man auch bei einer Zahl in dem Flächenmaas, wenn man die Dinge von der kleineren in Dinge von der gröſeren Art verwandeln will (§. 60.), von der rechten nach der linken Hand zu ſtets zwei Zahlen vor die kleinere Dinge annehmen, und damit ſo lang fortfahren, bis man von der gegebenen kleineren Art an die Ruthen komt: Beſtehet nemlich eine gegebene Zahl aus Quadratlinien; So muß man zwei Zahlen vor die Quadratlinien, zwei Zahlen vor die Quadratzolle, und noch zwei Zahlen vor die Quadratſchuhe annehmen; So ſind die Zahlen, die zur linken Hand übrig bleiben, Quadratruthen.

then. Dieſe zwei Zahlen pflegt man durch einen Punkt, oder ein Comma von einander zu unterſcheiden, die Zahlen ſelbſt in einer Klaſſe aber bezeichnet man mit den Kennziffern der Decimalbrůche, und fůlt die leeren Stellen mit 0 aus (§. 156. 162. und 467.). Es werden alſo 9853472 Quadratlinien ſo bezeichnet $\overset{0}{9},\overset{I}{85},\overset{II}{34},\overset{III}{72}$, und es enthålt die gegebene Zahl 9 Quadratruthen, 85 Quadratſchuhe, 34 Quadratzolle, und 72 Quadratlinien: Und wenn man ein gegebenes Quadratmaas in kleinere Dinge verwandeln ſoll; So geſchiehet dieſes, wann man ſo lange zwei Nulle anhångt, bis man die Stelle der verlangten kleineren Dinge bekomt. So werden, zum Beiſpiel $\overset{0}{3}$ in Schuhe verwandelt, wenn man zwei 0 anhångt, da man $30\overset{I}{0}$ bekomt. Eben ſo werden $\overset{0}{3}$ in Zolle verwandelt, wenn man zwei 0 vor die Schuhe, und noch zwei 0 vor die Zolle anhångt, in welchem Fall man $3000\overset{II}{0}$ erhålt, u. ſ. w.

§. 658.

Bei dieſer Ausmeſſung der Flåchen durch kleine Quadrate, und der Einteilung dieſes Maaſes, muß man, wenn man zwei Lången in einander multipliciren ſoll, den Factor, welcher Dinge von der grőſeren Art enthålt, durch die Anhångung ein oder etlicher Nulle zu der Kennziffer erheben, die der Factor

hat, welcher kleinere Dinge in ſich begreift: Denn beide Längen müſſen an dem Quadrat mit einem Maas von einerlei Einheiten gemeſſen werden, wenn man den Quadratinhalt finden ſoll (§. 104. u. 652.). So muß man, zum Beiſpiel den Factor $\overset{0}{2}\overset{\mathrm{I}}{3}$ in $\overset{0}{2}\overset{\mathrm{I}}{3}\overset{\mathrm{II}}{0}$ verwandeln, wenn der andere Factor $\overset{0}{5}\overset{\mathrm{I}}{6}\overset{\mathrm{II}}{4}$ iſt, und alſo eine um Eins erhöhete, und die Kennziffer II hat (§. 667.). Eben ſo muß man, wenn man Längenmaas in Quadratmaas dividiren ſoll, ienem ſtets eine, dieſem aber zwei Nulle anhängen, und dadurch beide zu gleichen Kennziffern erheben: Und wenn bei dieſer Diviſion ein Reſt übrig bleibt; So muß man, um noch kleinere Dinge zu bekommen (§. 153.), zwei 0 an den Reſt, und eine 0 an den Diviſor, oder, weil eine Null im Dividendo und Diviſor nicht dividiren, nur eine Null an den Reſt, und keine an den Diviſor hängen (§. 657.). Ueberhaupt muß man auch merken, daß Längenmaas mit Längenmaas multiplicirt Flächenmaas, und Flächenmaas durch Längenmaas dividirt Längenmaas gibt (§. 107.). Multiplicirt man hingegen Flächenmaas mit genanten Zahlen, oder dividirt es mit dieſen Zahlen (§. 60.): So bekomt man in beiden Fällen Flächenmaas (§. 104. und 108.).

§. 659.

Man teilt auch die Quadratruthe in Riemenruthen, wovon eine 10 Fus lang und 1 Fus breit iſt, den Quadratſchuh in Riemenſchuhe, wovon einer 10 Zoll lang und 1 Zoll breit iſt, u. ſ. w., und es macht alſo eine Riemenruthe 10 Quadratſchuhe, und ein Riemenſchuh 10 Quadratzolle, u. ſ. w., 100 Quadratſchuhe, oder eine Quadratruthe aber 10 Riemenruthen, und 100 Quadratzolle, oder ein Quadratſchuh 10 Riemenſchuhe aus (§. 656.), u ſ. w. Es bedeuten daher in der zweiten Stelle von der rechten nach der linken Hand, wenn man dieſes Flächenmaas durch Zahlen ausdrükt, die Zahlen ſchon Dinge von der gröſeren Art, und ſie ſind zehnteiliche Brüche (§. 154.). Man kan ſie alſo mit den Kennziffern dieſer Brüche bezeichnen (§ 156.), und es iſt einerlei, wenn man $\overset{0}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{2}$ mit $\overset{0}{2}\overset{I}{4}$ multipliciren ſoll, und $\overset{0}{2}\overset{I}{4}$ durch eine Null in $\overset{0}{2}\overset{I}{4}\overset{II}{0}$ verwandelt hat (§. 658.), ob man das Product 55680 ſo ſchreibt $\overset{0}{5}, \overset{I}{56}, \overset{II}{80}$ (§. 657.), oder ſo $\overset{0}{5}\ \overset{I}{5}\ \overset{II}{6}\ \overset{III}{8}\ \overset{IIII}{0}$ (§. 160.), eben die lezteren 5 Quadratruthen, 5 Riemenruthen, 6 Quadratfus, und 8 Riemenfus kommen aber auch heraus, wenn man nur $\overset{0}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{2}$ mit $\overset{0}{2}\overset{I}{4}$ multiplicirt, und das Product 5568 mit der Kennziffer III von der rechten nach der linken Hand zu bezeichnen anfängt, nemlich $\overset{0}{5}\ \overset{I}{5}\ \overset{II}{6}\ \overset{III}{8}$ (§. 160.).

§. 660.

Da die Seite des Quadrats mit ſich ſelbſt multiplicirt den Flächeninhalt des Quadrats gibt (§. 653.), und die zwölfſchühige Ruthe ſtets in 12. kleinere Teile geteilt wird (§. 468.): So machen auch bei dieſer ſtets 144 kleinere Dinge ein nechſt gröſeres aus, und ſo verhält es ſich auch bei der ſechzehnſchühigen Ruthe, nur daß 256 Quadratſchuhe eine Quadratruthe machen. Wenn man alſo gröſere Dinge in kleinere verwandeln ſoll; So multipliciret man ſie mit 144: Soll man hingegen kleinere in gröſere verwandeln; So dividirt man dieſe durch 144 (§. 104. und 108.), und nur bei der ſechzehnſchühigen Ruthe multipliciret man die Quadratruthe mit 256, wenn man Schuhe, hingegen dividirt man Quadratſchuhe durch dieſe Zahl, wenn man Ruthen haben will.

§. 661.

Es enthält alſo die zwölfſchühige Quadratruthe 144 Quadratſchuhe, oder 20736 Quadratzolle, oder 2985984 Quadratlinien, oder 429981696 Quadratſcrupel, die ſechzehnſchühige Ruthe hingegen 256 Quadratſchuhe, oder 36864 Quadratzolle, oder 5308416 Quadratlinien, oder 764411904 Quadratſcrupel, u. ſ. w. (§. 468.).

§. 662.

§. 662.

Wenn man in dem zwölf- und ſechzehnſchühigen Maas zwei Längen in einander multipliciren ſoll: So muß man ſie auf einerlei Art bringen, eben ſo muß man aber auch verfahren, wenn man Längenmaas in Flächenmaas dividiren ſoll (§. 104. 107. 108. 658. und 662.).

§. 663.

Soll man Decimalquadratmaas in gemeines zwölfſchühiges Quadratmaas verwandeln: So laſſe man die Quadratruthen, weil ſie in einem Maas ſo gros ſind, als wie in dem andern, weg (§. 466. u. 468.), und ſuche, wenn das erſtere Maas Quadratſchuhe hält zu 100, 144, und dem gegebenen Maas die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240. 655. und 661.). Wenn man hingegen zwölfſchühiges Quadratmaas in Decimalquadratmaas verwandeln ſoll; So ſuche man, wenn es Schuhe ſind, zu 144, 100, und dem gegebenen Maas, wobei man auch die Ruthen wegläſt, die vierte geometriſche Proportionalzahl. Sind Zolle gegeben: So bringt man die Zolle von den beiden Maaſen, die eine Ruthe ausmachen, in die erſte Verhältniſſe, und ſo die Linien, oder die Scrupel, wenn Linien, oder Scrupel gegeben ſind (§. 655. u. 661.). Eben ſo verfahre man aber auch, wenn man Decimalquadratmaas in ſechzehnſchühiges

Quadratmaas, oder dieſes in ienes verwandeln ſoll, nur merke man in beiden Fällen, daß man erſt bei dem gegebenen zwölf- und ſechszehnteiligen Maas, das man in Decimalmaas verwandeln ſoll, alles in kleinere Arten auflöſen muß (§. 104. und 660.): Denn, wenn man $\overset{0}{3}$, $\overset{I}{120}$, $\overset{II}{59}$ im zwölfſchühigen Maas hat, die man verwandeln ſoll; So ſind dieſes, wen man $\overset{0}{3}$ wegläſt, und $\overset{I}{120}$ mit $\overset{II}{144}$ multiplicirt, dazu aber $\overset{II}{59}$ addirt, $\overset{II}{17339}$, eben ſo ſind im ſechszehnteiligen Maas $\overset{0}{14}$, $\overset{I}{110}$, $\overset{II}{115}$, wenn man die Ruthen wegläſt, und $\overset{I}{110}$ mit $\overset{II}{144}$ multiplicirt, dazu aber $\overset{II}{115}$ addirt, $\overset{II}{15955}$, und dieſe Zahlen kommen eigentlich in die Rechnung, und in die Stelle des dritten Glieds (§. 660.).

§. 664.

Wenn man die Verhältnis zweier Quadratmorgen, zweier Quadratruthen, oder zweier Quadratſchuhe weis, die nach verſchiedenen Längenmaaſen gemeſſen worden: So kan man auch leicht einen Quadratinhalt in den andern verwandeln. Wir wollen annehmen, es habe der eine gemeine Fus, wornach gemeſſen worden, 1000 Teile, der andere 900 ſolcher Teile, und die Ruthe von ienen Füſen 16, von dieſen aber 12 Fus: So verhalten ſich die Schuhe wie 1000 : 900, und die Ruthen, wie 1000. 16:

900.

900. 12, das iſt wie 16000: 10800. Multiplicirt man nun, weil, wenn iener Schuh 1000mal 1000 Teile, dieſer 900mal 900 Teile hat, 1000 mit 1000, und 900 mit 900: So verhalten ſich die gemeine Quadratſchuhe von der ſechszehnſchühigen und zwölfſchühigen Ruthe wie 1000000: 810000, und eben ſo verhalten ſich auch die gemeine Quadratzolle, Quadratlinien u. ſ. w. (§. 215. und 468.). Und multiplicirt man aus eben dem Grund 16000 mit 16000, und 10800 mit 10800: So verhalten ſich die gemeine, und die Decimalquadratruthen vom erſteren und dem lezteren Maas wie 256000000: 116640000. So nun verhalten ſich auch die Decimalquadratſchuhe, Decimalquadratzolle, Decimalquadratlinien u. ſ. w. von dieſen verſchiedenen Längenmaaſen: Denn in dem Decimalmaas wird bei der einen, wie bei der andern Ruthe die Ruthe in 10 ſtets kleinere Teile geteilt (§. 466.), und wenn man die Verhältnis der Ruthen, nemlich 16000: 10800 durch 10 Fus, oder 100 Zolle, oder 1000 Linien u. ſ. w. dividiret, um die Teile der Decimalſchuhe, Zolle, Linien u. ſ. w. zu bekommen (§. 466.); So verhalten ſich die Quotienten eben ſo wie 16000: 10800 (§. 216.), folglich auch die Quadrate dieſer Quotienten, wie die Quadrate von 16000 und 10800, weil iene Quadrate, bei der erſten Diviſion um hundertmal, bei der zweiten um zehntauſendmal, und bei der dritten um einmillionmal kleiner werden,

u. ſ. w. als wie dieſe, und folglich die erſtere, und die leztere einerlei Verhältnis haben (§. 211. und 216.). Machen endlich von der ſechszehnſchühigen Ruthe 160 Quadratruthen, von der zwölfſchühigen Ruthe aber 150 Quadratruthen einen Morgen aus: So verhalten ſich auch die Morgen von dem erſteren und dem lezteren Maas wie 40960000000 : 17496000000. Wenn man dieſemnach 12 Morgen, die nach dem ſechszehnſchühigen Maas gemeſſen worden, in Morgen verwandeln will, die zwölfſchühiges Maas haben: So kehre man, weil das leztere Maas kleiner iſt, als wie das erſtere, die Verhältnis der Morgen um, und rechne nür ſo, wie 17496000000 zu 40960000000, oder, wenn man beide Zahlen durch 1000000 dividiret, oder ſechs 0 abſchneidet (§. 216.), wie 17496 zu 40960, ſo 12 Morgen zu den zu findenden Morgen. Es iſt im übrigen von ſelbſt klar, daß ſich die Quadratruthen, wie die gemeine Quadratſchuhe, und wie 1000000 : 810000 verhalten, wenn beide in gleich viel Schuhe geteilt ſind, und der eine 1000 Teile, der andere aber 900 ſolcher Teile hält (§. 215. und 468.).

§. 665.

Den Quadratinhalt eines Rechteks zu finden.

Auflöſung.

1) Man meſſe die Länge AB, und die Breite, oder die Höhe AD des Rechtekkes, Tab. XVIIII. fig. 195.

2) Man

2) Man multiplicire die gemeſſene Länge in die Breite: So iſt das Product der verlangte Inhalt, und das Rechtek ausgemeſſen.

Beweis.

Da AB = DC (§. 429.); So ſind auch, wenn man AB und DC, und ſo auch AD und BC in Ruthen, Schuhe, oder Zolle u. ſ. w. teilet, und von einem Teilungspunkt bis zu dem andern gerade Linien ziehet, in einer Reihe ſo viele Ruthen, oder Schuhe, oder Zolle u. ſ. w., als wie in der andern: Und da AD = BC; ſo liegen auch ſo viele Reihen über einander, als AD = BC Ruthen, oder Schuhe, oder Zolle hat u. ſ. w., und demnach bekomt man den Flächeninhalt des Rechteks, wenn man ſeine Länge mit der Breite multiplicirt.

Exempel.

Es ſei die Länge eines Rechteks	=	$4^{\circ}\,5^{I}\,6^{II}$
und die Breite	=	$8^{I}\,0^{II}$
So iſt deſſen Quadratinhalt	=	$3{,}6^{\circ}\,4{,}8^{I}\,0^{II}$

§. 666.

Da alſo, wenn in einem Rechtek die Länge = a, und die Breite = b, der Inhalt des Rechteks = ab; So findet man auch aus der gegebenen Länge und dem Inhalt eines Rechteks die Breite, wenn man die Länge in den Inhalt, hingegen aber die Länge,

wenn

wenn man die gegebene Breite in dieſen Inhalt dividiret (§. 107.): Denn ab:a=b, und ab:b=a (§. 306.).

§. 667.

Den Flächeninhalt einer Raute, und länglichten Raute zu finden.

Auflöſung.

1) Man ziehe durch die Punkten D und K, Tab. XVIIII. fig. 196. und 197, auf die Linien AB und GH, die man zu den Grundlinien angenommen hat, die Perpendicularlinien DE und KL (§. 524.).

2) Man meſſe die Linien AB und DE, und GH und KL.

3) Man multiplicire die Länge AB in die Höhe DE, und die Länge GH in die Höhe KL: So iſt das erſte Product der Inhalt der Raute, das andere aber der Inhalt der länglichten Raute.

Beweis.

Weil die Raute und die länglichte Raute Parallelogramma ſind (§. 633.), und alle Parallelogramma, die einerlei Grundlinie und Höhe haben, einander gleich ſind (§. 646.): So ſind auch die Raute ABCD, und die länglichte Raute GHIK den Rechtekken EFCD, und LMIK gleich. Nun findet man aber den Inhalt von dieſen, wenn man EF

=DC

= DC = AB (§. 429. und 527.) mit ED, und LM = KI = GH (§. 429. und 527.) mit KL multiplicirt (§. 665.), und derohalben findet man auch den Inhalt der Raute, und der länglichten Raute, wenn man die Grundlinie AB mit der Höhe DE und die Grundlinie GH mit der Höhe KL multiplicirt.

1. Exempel.

Es ſei in der Raute AB =	4° 2' 3''
und DE =	2° 3' 6''
	2538
	1269
	846
So iſt der Inhalt der Raute ABCD =	9,9° 8,2' 8''

2. Exempel.

Es ſei in der länglichten Raute GH =	6° 8' 4''
und KL =	2° 5' 6''
	4104
	3420
	1368
So iſt der Inhalt der länglichten Raute GHIK =	17,5° 1,0' 4''

§. 668.

Den Flächeninhalt eines Triangels zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

1) In dem Triangel ACD, oder ACE nehme man AC, Tab. XVIIII. fig. 193, zur Grundlinie an, und fälle auf AG durch die Spizze D oder E die Perpendicularlinie DF, oder EG (§. 524.), ſo bekomt man die Höhen dieſer Triangel (§. 431.).

2) Man meſſe AC und DF, oder AC und EG, in dem rechtwinkelichten Triangel ACB aber die Catheti AC und AB (§. 428.).

3) Man multiplicire AC mit AB, oder AC mit DF, oder AC mit EG.

4) Das Product, welches bei iedem Triangel herausgekommen iſt, dividire man durch 2: So iſt der Quotient der Inhalt von dieſem Triangel.

Beweis.

Wenn man in allen dieſen Triangeln die Grundlinie AC mit AB, oder DF, oder EG multipliciret: So bekomt man den Inhalt eines Parallelogrammi, der mit dem Triangel, den man meſſen ſoll, einerlei Grundlinie und einerlei Höhe hat (§. 665.). Nun iſt aber der Triangel die Hälfte von dem Parallelogrammo, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 645.), und daher findet man auch ſeinen Inhalt, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliciret, und das Product durch 2 dividiret.

Exempel.

Es ſei AC $= \overset{0}{2}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{4}$

und DF $= \overset{0}{1}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{3}$

$$\begin{array}{r} 612 \\ 408 \\ 204 \end{array}$$

So iſt der Inhalt des Parallelogrammi

ACHB $= \overset{0}{2},\!5\,\overset{I}{0},\!9\,\overset{II}{2}$

Und, wenn dieſes halbirt wird,

der Inhalt des Triangels ACD $= \overset{0}{1},\!2\,\overset{I}{5},\!4\,\overset{II}{6}$

§. 669.

Wenn $AC = a$, und $DF = b$: So iſt der Inhalt des Triangels $ACD = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ba$ (§. 79. und 205.), und daher $\frac{AC.DF}{2} = \frac{1}{2}AC.DF = \frac{1}{2}DF.AC$, dieſemnach aber iſt es einerlei, ob man die Grundlinie AC mit der Höhe DF multiplicirt, und das Product durch 2 dividiret, oder ob man die halbe Grundlinie AC mit der ganzen Höhe DF, oder die ganze Grundlinie mit der halben Höhe DF multipliciret.

1. Exem-

1. Exempel.

$$\tfrac{1}{2}\,AC = \frac{\overset{0}{2}\overset{I}{0}\overset{II}{4}}{2} = \overset{0}{1}\overset{I}{0}\overset{II}{2}$$

$$DF = \overset{0}{1}\overset{I}{2}\overset{II}{3}$$

$$\begin{array}{r} 306 \\ 204 \\ 102 \\ \hline \end{array}$$

Und daher iſt der Triangel ACD $= \overset{0}{1},2\,\overset{I}{5},4\,\overset{II}{6}$

2. Exempel.

$$\left.\begin{array}{l} AC = \overset{0}{2}\overset{I}{0}\overset{II}{4} = \overset{0}{2}\overset{I}{0}\overset{II}{4}\overset{III}{0} \\ \tfrac{1}{2}DF = \dfrac{\overset{0}{1}\overset{I}{2}\overset{II}{3}}{2} = \dfrac{\overset{0}{1}\overset{I}{2}\overset{II}{3}\overset{III}{0}}{2} = \overset{I}{6}\overset{II}{1}\overset{III}{5} \end{array}\right\}$$ (§. 108. u. 658.)

$$\begin{array}{r} 10200 \\ 2040 \\ \hline 12240 \end{array}$$

Und daher iſt der Triangel

ACD $= \overset{0}{1},2\,\overset{II}{5},4\,\overset{IIII}{6},0\,0$

§. 670.

Da alſo in einem Triangel, wenn die Grundlinie $= a$, und die Höhe $= b$ iſt, der Inhalt des Triangels $\frac{ab}{2}$, oder $\frac{1}{2}ab$, oder $\frac{1}{2}ba$; So findet man

man auch, wenn man die halbe Grundlinie in den Inhalt des Triangels dividiret, die Höhe, die Grundlinie aber, wenn man ſeinen Inhalt durch die halbe Höhe dividiret, die halbe Höhe hingegen, wenn man ſeinen Inhalt durch die ganze Grundlinie, und die halbe Grundlinie, wenn man ſeinen Inhalt durch die ganze Höhe dividiret (§. 107.): Denn $\frac{1}{2}$ ab : $\frac{1}{2}$ a = b, $\frac{1}{2}$ ba : $\frac{1}{2}$ b = a, $\frac{1}{2}$ ba : a = $\frac{1}{2}$ b, und $\frac{1}{2}$ ab : b = $\frac{1}{2}$ a (§. 107. und 306.).

§. 671.

Den Flächeninhalt eines Trapezii zu finden.

Erſte Auflöſung.

1) In einem Paralleltrapezio ABCD, Tab. XX. fig. 198. und 199, meſſe man die parallele Seiten AB und CD, GH und IK, und dividire ihre Summe mit zwei.

2) Die erſte halbe Summe multiplicire man mit der Höhe DF, die andere aber mit IG, wenn dieſe Linie perpendicular auf GH iſt: So iſt das erſte Product der Inhalt des Trapezii ABCD, und das andere der Inhalt des Trapezii GHKI.

Beweis.

Wenn man das Paralleltrapezium ABCD, Tab. XX. fig. 198, in zwei Triangel ABD und BCD vertheilet, und DC bis in E verlängert, durch D aber auf AB,

und B auf DE eine Perpendicularlinie ziehet; So iſt der Triangel $ABD = \frac{AB}{2} \cdot DF$, und der Triangel $BCD = \frac{DC}{2} \cdot BE$. Nun iſt aber $DF = BE$ (§. 527. und 544.), und daher iſt der $\triangle ABD = \frac{AB}{2} \cdot DF$, und der $\triangle BCD = \frac{DC}{2} \cdot DF$ (§. 25.), und der $\triangle ABD + \triangle ABC = \frac{AB + DC}{2} \cdot DF$, es machen aber die Triangel ABD und ABC das Trapezium ABCD aus (§. 434.), und derohalben iſt auch der Inhalt des Trapezii $ABCD = \frac{AB + DC}{2} \cdot DF$. Eben aus dieſem Beweiſe, und da $GI = HL$ (§. 527. und 544.), iſt aber auch das Paralletrapezio GHKI, Tab. XX. fig. 199, worinnen I ein rechter Winkel iſt, $= \frac{GH + IK}{2} \cdot IG$.

Andere Aufloſung.

1) Wenn keine zwei Seiten in dem Trapezio parallel ſind: So ziehe man die Diagonallinie AC, Tab. XX. fig. 200., und fälle durch die Punkten B und D auf AC Perpendicularlinien BF und DE (§. 525.).

2) Man rechne von den Triangeln ABC und ACD

ACD die Inhälte aus (§. 668.), und addire dieſe: So iſt ihre Summe der verlangte Inhalt (§. 434.).

Weil die beiden Triangel ABC und ACD eine gemeinſchaftliche Grundlinie AC haben: So kan man den Inhalt auf einmal finden, wenn man die ganze Grundlinie AC mit der halben Summe der Höhen BF und DE der Triangel, oder die halbe Grundlinie AC mit der ganzen Summe der Höhen BF und DE der Triangel, und alſo AC mit $\frac{BF + DE}{2}$, oder $\frac{AC}{2}$ mit BF + DE multipliciret.

§. 672.

Den Flächeninhalt einer ieden geradlinigten irregulären Figur zu finden.

Erſte Auflöſung.

Man zerteile die Figur durch Diagonallinien in Triangel, und fälle aus allen Spizzen dieſer Triangel auf die Diagonallinien Perpendicularlinien, und zwar zu Verkürzung der Meſſung, ſo, daß ſtets zwei Perpendicularlinien auf eine Grundlinie fallen, die zwei Triangeln gemein iſt, man rechne den Inhalt dieſer Triangel aus, dieſe Inhälte aber addire man, ſo iſt das Verlangte geſchehen (§. 434. und 668.).

Exempel.

Es ſei in der Figur ABCDE und A, Tab. XX. fig. 201.

1) In dem △ ABC

die halbe Grundlinie AC	=	$\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{3}$
und die Höhe FB	=	$\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{1}$
		123
		123
So iſt der Inhalt des △ ABC	=	$\overset{\circ}{1},2\ \overset{\prime}{4},2\ \overset{\prime\prime}{3}$

2) In dem △ ACE

die halbe Grundlinie EC	=	$\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{4}$
und die Höhe AG	=	$\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{8}$
		1632
		408
		204
So iſt der Inhalt des △ ACE	=	$\overset{\circ}{2},6\ \overset{\prime}{1},1\ \overset{\prime\prime}{2}$

3) In dem △ ECD

die halbe Grundlinie EC	=	$\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{4}$
die Höhe DH	=	$\overset{\circ}{1}\overset{\prime}{2}\overset{\prime\prime}{5}$
		1020
		408
		204
So iſt der Inhalt des △ ECD	=	$\overset{\circ}{2},5\ \overset{\prime}{5},0\ \overset{\prime\prime}{0}$

Da

Da alſo der Inhalt des △ ABC = $\overset{0}{1{,}2}\ \overset{I}{4{,}2}\ \overset{II}{3}$

" " " △ ACE = $\overset{0}{2{,}6}\ \overset{I}{5{,}1}\ \overset{II}{2}$

" " " △ ECD = $\overset{0}{2{,}5}\ \overset{I}{5{,}0}\ \overset{II}{0}$

So iſt der Inhalt der Figur ABCDE u. A = $\overset{0}{6{,}4}\ \overset{I}{0{,}3}\ \overset{II}{5}$

Man kan dieſe Rechnung ſehr verkürzen, wenn man das Trapezium ACDE ſo ausrechnet, wie am Ende der andern Auflöſung des vorhergehenden §. gewieſen worden.

Andere Auflöſung.

1) Man ziehe durch die Figur ABDOGHIAB, Tab. XX. fig. 202, nach Gefallen eine Diagonallinie, AO, und fälle auf dieſe durch alle Spizzen der Figur Perpendicularlinien BK, CI, DH und EG, die von einer Seite der Figur bis zu der gegen über ſtehenden gehen.

2) Man meſſe AL und BK, BK, CI und LM, CI, DH und MN, und DH, EG, NF und FO.

3) Man rechne den Inhalt des Triangels ABK, und die Inhälte der Paralleltrapezien BCIK, CDHI, und DEGH, auſer dem aber auch den Inhalt des Triangels EOG aus (§.668. und 671.). Endlich

4) addire man alle dieſe Inhälte: So iſt die Summe der Inhalt der Figur ABDOGHIAB.

Exempel.

1) Es ſei $\frac{1}{2}$ BK $= \overset{0}{3}\,\overset{\prime}{2}\,\overset{\prime\prime}{1}$

und AL $= \overset{0}{1}\,\overset{\prime}{2}\,\overset{\prime\prime}{4}$

$$\begin{array}{r} 1284 \\ 642 \\ 321 \end{array}$$

So iſt der Inhalt des △ABK $= \overset{0}{3},9\,\overset{\prime}{8},0\,\overset{\prime\prime}{4}$

2) Es ſei $\frac{BK + CI}{2} = \overset{0}{7}\,\overset{\prime}{4}\,\overset{\prime\prime}{2}$

und LM $= \overset{\prime}{9}\,\overset{\prime\prime}{8}$

$$\begin{array}{r} 5936 \\ 6678 \end{array}$$

So iſt der Inhalt des Trapezii BCIK $= \overset{0}{7},2\,\overset{\prime}{7},1\,\overset{\prime\prime}{6}$

3) Es ſei $\frac{CI + DH}{2} = \overset{0}{8}\,\overset{\prime}{5}\,\overset{\prime\prime}{4}$

und MN $= \overset{0}{2}\,\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{1}$

$$\begin{array}{r} 854 \\ 2562 \\ 1708 \end{array}$$

So iſt der Inhalt des Trapezii CDHI $= 1\overset{0}{9},7\,\overset{\prime}{2},7\,\overset{\prime\prime}{4}$

4) Es

		° ′ ″
4) Es ſei $\frac{DH + EG}{2}$	=	7 9 6
		° ′ ″
und NF	=	1 9 8
		6 3 6 8
		7 1 6 4
		7 9 6
		° ′ ″
So iſt der Inhalt des Trapezi DEGH	=	1 5,7 6,0 8
		° ′ ″
5) Es ſei $\frac{1}{2}$ GE	=	3 8 2
		° ′ ″
und FO	=	1 1 2
		7 6 4
		3 8 2
		3 8 2
		° ′ ″
So iſt der Inhalt des △ GOE	=	4,2 7,8 4
		° ′ ″
Weil alſo der Inhalt des △ ABK	=	3,9 8,0 4
		° ′ ″
der Inhalt des Trapezii BCIK	=	7,2 7,1 6
		° ′ ″
ſ ſ ſ ſ ſ CDHI	=	1 9,7 2,7 4
		° ′ ″
ſ ſ ſ ſ DEGH	=	1 5,7 6,0 8
		° ′ ″
und der Inhalt des △ GOE	=	4,2 7,8 4
So iſt der Inhalt der Figur		
		° ′ ″
ABDOGHIAB	=	5 1,0 1,8 6

§. 673.

Nimt man die Perpendicularlinien in der 202 Figur ſo nahe an einander an, als möglich iſt; So kan man dadurch auch die Krümmungen mit ausmeſſen,

die an einer Figur ſind: Denn es ſind dieſe Krümmungen zwiſchen ſo nahen Perpendicularlinien unmerklich, und in der Ausübung ſiehet man nicht auf ſolche Kleinigkeiten.

§. 674.

Den Flächeninhalt eines regulären Vieleks zu finden.

Auflöſung.

Weil, wie aus dem Beweiſe des 639. §. klar iſt, ein iedes Vielek aus dem Mittelpunkt in ſo viele gleiche Triangel geteilt werden kan, als es Seiten hat: So findet man auch dadurch den Inhalt eines Vieleks, wenn man deſſen Mittelpunkt H, Tab. XX. fig. 203, findet (§. 639.), und aus dieſem auf eine Seite AB die Perpendicularlinie [redacted] ziehet, alsdann aber den Inhalt des Triangels AB[redacted] ausrechnet, und dieſen mit der Zahl der Seiten des Vieleks multipliciret.

Exempel.

Es ſei ½ AB	=	2° 2' 4''
und [redacted]	=	3° 6' 0''
		1 3 4 4 0
		6 7 2
So iſt der Inhalt des △ AB[redacted]	=	8,0° 6,4' 0''

Nun

Nun ſei die Zahl der Seiten des Vieleks = 7

So iſt der Inhalt des Vieleks

$$ABCDEA = 5\overset{0}{6},4\overset{I}{4},8\overset{II}{0}$$

§. 675.

Ein iedes reguläres Vielek iſt einem Triangel gleich, der den Umfang dieſes Vieleks zur Grundlinie, die Höhe aber der Triangel, worinnen ſich daſſelbe aus dem Mittelpunkt zerteilen läſt, zur Höhe hat.

Beweis.

Wenn man alle Triangel eines regulären Vieleks ABCDEFGA, Tab. XX. fig. 203, auf eine gerade Linie AB träget, Tab. XX fig. 204, und in den Punkt A eine Perpendicularlinie AF fället (§. 576.), welche der Höhe dieſer Triangeln gleich iſt, alsdann aber die Linien FC, FD, FE, FG, FH, FI, und FB ziehet: So ſind die Triangel ACF, CDF, DEF, EGF, GHF, HIF und IBF, den Triangeln ACK, CDL, DEM, EGN, GHO, HIP und IBQ gleich, weil ſie alle einerlei Grundlinie, und einerlei Höhe haben (§. 648.). Nun machen aber die erſteren Triangel, weil ſie alle an einander liegen, den Triangel ABF aus, und AB iſt der ganze Umfang des Vieleks, AF aber die Höhe der Triangel, worinnen dieſes Vielek zerteilet iſt, und daher iſt auch ein iedes reguläres Vielek einem Triangel gleich, der den Um-

fang des Vieleks zur Grundlinie, die Höhe aber der Triangel zu ſeiner Höhe hat, worinnen ſich dieſes Vielek aus dem Mittelpunkt zerteilen läſt.

§. 676.

In einem rechtwinkelichten Triangel iſt das Quadrat der Hypothenuſa ſo gros, als die Summe von den Quadraten der Cathetorum.

Beweis.

Man mache auf die Seite des rechtwinkelichten Triangels ABC, Tab. XX. fig. 205, die Quadrate ADEB, ACGF und BIHC (§. 634.), und ziehe die Linien CE, GB, AH und AI, durch die Spizze des rechten Winkels A aber parallel mit BI die Linie AK, und ſchlieſe ſo.

I) Der ∠ o = ∠ p (§. 429. und 495.), der ∠ q = ∠ q (§. 27.), und daher iſt der ∠ o + q = ∠ q + p (§. 85.), es iſt aber AB = BE, und BC = BI (§. 429.), und daher iſt der △ BCE = △ ABI (§. 503.), der △ BCE aber iſt = dem halben Quadrat ABED (§. 645.), und daher iſt auch der △ ABI = dem halben Quadrat ABED (§. 25.). Nun iſt aber der △ ABI = dem halben Parallelogrammo BIKL (§. 645.), und darum iſt auch das halbe Quadrat ABED = dem halben Parallelogrammo BIKL (§. 25.), und das Quadrat ABED = dem Parallelogrammo BIKL (§. 85.).

II) Der

II) Der $\angle s = \angle t$ (§. 429. und 495.), der $\angle u = \angle u$ (§. 27.), und daher iſt der $\angle s + u = \angle t + u$ (§. 85.). Nun iſt $CG = AC$, und $CH = CB$ (§. 429.), und daher iſt der $\triangle BCG = \triangle ACH$ (§. 503.), der $\triangle BCG$ aber iſt = dem halben Quadrat ACGF (§. 645.), und daher iſt auch der $\triangle ACH$ = dem halben Quadrat ACGF (§. 25.), es iſt aber auch der $\triangle ACH$ = dem halben Parallelogrammo CHKL (§. 645.), und daher iſt auch das halbe Quadrat ACGF = dem halben Parallelogrammo CHKL (§. 25.), und das Quadrat ACGF = dem Parallelogrammo CHKL (§. 85.).

III) Da alſo das Quadrat ABED = dem Parallelogrammo BIKL, und das Quadrat ACGF = dem Parallelogrammo CHKL, das Parallelogrammum BIKL + CHKL aber = dem Quadrat BIHC (§. 30.): So iſt auch in einem rechtwinkelichten Triangel das Quadrat der Hypothenuſa ſo gros, als die Summe der beiden Quadrate der Cathetorum.

Es hat dieſen Lehrſaz der Pytagoras erfunden, und ihm zu Ehren wird er der pytagoriſche Lehrſaz genennet, er heiſt aber auch Magiſter Matheſeos.

§. 677.

Wann dieſemnach die beiden Catheti gegeben ſind, und man will die Gröſe der Hypothenuſa wiſſen: So hat man nur nötig, daß man iene in ihre Quadrate

drate erhebet (§. 653.), dieſe Quadrate addiret, und aus der Summe die Quadratwurzel ziehet (§. 187. u. 188.). Es ſei dieſemnach AB, Tab. XX. fig. 205, $= 3$, und $AC = 4$: So iſt $AB^2 = 9$, und $AC^2 = 16$, und es iſt $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 = BC^2$, und $\sqrt{25} = 5 = \sqrt{BC^2} = BC$, oder es ſei $AB = 6$, $AC = 8$: So iſt $AB^2 = 36$, und $AC^2 = 64$, und alſo $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2$, und $\sqrt{100} = 10 = \sqrt{BC^2} = BC$.

§. 678.

Wenn die Hypothenuſa und ein Cathetus gegeben ſind, und man will den andern Cathetum wiſſen: So erhebe man die gegebene Hypothenuſa, und den Cathetum in ihre Quadrate, man ziehe das Quadrat des Catheti von dem Quadrat der Hypothenuſa ab, und ziehe aus dem Reſt die Quadratwurzel (§. 187. und 188.): So iſt dieſe der verlangte Cathetus. Es ſei $BC = 10$, und $AB = 6$, Tab. XX. fig. 205: So iſt $BC^2 = 100$, und $AB^2 = 36$, alſo $BC^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64 = AC^2$, und $\sqrt{64} = 8 = \sqrt{AC^2} = AC$.

§. 679.

Man kan durch Hülfe des pytagoriſchen Lehrſazzes gar leicht auf das Ende A, oder die Mitte einer Linie

A 5, Tab. XXI. fig. 206, eine Perpendicularlinie A IIII aufrichten, wenn man auf A 5 nach Gefallen 5 gleiche Teile träget, und aus 3 mit 5, aus A aber mit 4 ſolcher Teile einen Durchſchnitt in IIII, oder aus 4 mit 5, und aus A mit 3 ſolcher Teile einen Durchſchnitt in III machet, und durch A und IIII, oder A und III die Linie A IIII ziehet. Teilt man A 5 in 10 gleiche Teile, und macht mit 10 Teilen aus dem Teilungspunkt 6, und mit 8 Teilen aus dem Punkt A, oder mit 10 Teilen aus dem Teilungspunkt 8, und mit 6 Teilen aus dem Punkt A, wie vorhin, Durchſchnitte, und ziehet durch A, und dieſe Durchſchnitte eine gerade Linie: So bekomt man ebenwol eine Perpendicularlinie A IIII. Man bedienet ſich dieſer Aufgabe bei der Abſtekkung der aufzuführenden Gebäue, und macht die rechte Winkel mit 6, 8 und 10.

§. 680.

Weil das Quadrat der Hypothenuſa ſo gros iſt, als die Summe der Quadrate der Cathetorum (§. 676.): So kan man auch leicht ein Quadrat machen, welches noch einmal ſo gros iſt, als ein gegebenes, wenn man nur die Seite AB des Quadrats, Tab. XXI. fig. 207, das man noch einmal ſo gros machen ſoll, in einem rechten Winkel BAC ſo, daß nemlich AB = AC zuſammen ſezt, und die Linie BC ziehet, welche die Seite von dem noch einmal ſo groſen Quadrat iſt.

§. 681.

§. 681.

Aus dem pythagoriſchen Lehrſaz begreift man leichte, wie man verſchiedene Quadrate A, B, G und K, Tab. XXI. fig. 208, addiren, oder ein Quadrat machen kan, welches mehreren gegebenen Quadraten gleich iſt: Denn wenn man die Seiten CD und DE der Quadrate A und B rechtwinkelicht in CD, und DF zuſammen ſezt; So iſt CF die Seite von dem Quadrat, das den Quadraten A und B gleich iſt: Sezt man CF und die Seite HC des Quadrats G in HC, und CI rechtwinkelicht zuſammen; So iſt HI die Seite des Quadrats, das den Quadraten G und CF^2 gleich iſt: Und ſezt man die Seite LH des Quadrats K, und die Seite HI rechtwinkelicht in LH und HM zuſammen; So iſt LM die Seite des Quadrats, das ſo gros iſt, als die Quadrate K und HI^2, und demnach iſt LM die Seite des Quadrats, das ſo gros iſt, als die Quadrate A, B, G und K zuſammen genommen.

§. 682.

Zwei Parallelogramma, die einerlei Höhe haben, verhalten ſich in ihren Quadratinhälten, wie ihre Grundlinien.

Beweis.

Der Inhalt des Parallelogrammi ABCD, Tab. XXI. fig. 209, iſt ein Product aus der Grund-

linie

linie AB in die Höhe AD, und der Inhalt des Parallelogrammi BEFC iſt ein Product aus der Grundlinie BE in die Höhe BC = AD, und eben ſo iſt der Inhalt des Parallelogrammi GHIK ein Product aus GH in KN, und der Inhalt des Parallelogrammi HLMI ein Product aus HL in IO = KN (§. 527. 665. und 667.). Es werden alſo zwei Gröſen AB und BE durch eine dritte AD, und zwei Gröſen GH und HL durch eine dritte KN multiplicirt, und daher verhalten ſich auch Parallelogramma, die einerlei Höhe haben, in ihren Inhälten, wie ihre Grundlinien (§. 215.).

Es ſei AD = BC = 8, AB = 6, und BE = 3: So iſt AB. AD = 6. 8 = 48, und BE. AD = 3. 8 = 24, und alſo 48 : 24 = 6 : 3.

§. 683.

Weil ſich die Hälften von zwei Zahlen eben ſo, wie dieſe zwei Zahlen verhalten, indem ſie beide durch 2 dividirt ſind (§. 216.), und ein Triangel die Hälfte von dem Parallelogrammo iſt, mit dem er gleiche Grundlinien, und gleiche Höhen hat (§. 645.): So verhalten ſich auch die Quadratinhälte der Triangel ABC und BEF, und GIH und HLM, Tab. XXI. fig. 209, wie ihre Grundlinien AB und BE, und GH und HL, wenn ſie gleiche Höhen AD und KN haben.

§ 684.

§. 684.

Zwei Parallelogramma, die einerlei Grundlinie haben, verhalten ſich in ihren Quadratinhälten, wie ihre Höhen.

Beweis.

Weil der Inhalt des Parallelogrammi ABCD, Tab. XXI. fig. 210, ein Product iſt aus der Grundlinie AB in die Höhe AD, und der Inhalt des Parallelogrammi BEFG ein Product aus der Grundlinie BE = AB in die Höhe GB, eben ſo aber auch der Inhalt des Parallelogrammi GHIK ein Product aus GH in KP, und der Inhalt des Parallelogrammi HLMN ein Product aus HL = GH in ON iſt (§. 665. und 667.): So werden zwei Gröſen durch eine dritte multipliciret, und daher verhalten ſich auch zwei Parallelogramma, die einerlei Grundlinie, und verſchiedene Höhen haben, in ihrem Quadratinhalt, wie ihre Höhen (§. 215.). Es ſei AB = BE = 4, AD = 6, und BG = 8: So iſt AB. AD = 4. 6 = 24, und BE. BG = 4. 8 = 32, und alſo 24 : 32 = 6 : 8.

§. 685.

Da dieſes iſt: So folgt auch aus dem, was im 683. §. klar gemacht worden, daß ſich die Triangel ABC und BEF, und GHI und HLM, Tab. XXI. fig. 210,

fig. 210, wie ihre Höhen AD und BG, und KP und NO verhalten, wenn ihre Grundlinien AB und BE, und GH und HL gleich ſind.

§. 686.

Ein Parallelogrammum ABCD, Tab. XXI. fig. 211, durch einen in einer Seite gegebenen Punkt E in zwei gleiche Teile zu teilen.

Aufloͤſung.

Man trage das Stuͤk BE auf der gegen uͤber ſtehenden Seite aus D in F, und ziehe die Linie EF: So iſt das Verlangte geſchehen.

Beweis.

Weil $AB = DC$ (§. 429.), und $DF = EB$: So iſt $AB - EB = DC - DF$, und alſo $AE = CF$ (§. 87.). Weil $AB \,\#\, DC$: So iſt der $\angle m = \angle n$, und der $\angle o = \angle p$ (§. 526.). Da alſo $AE = CF$, $\angle m = \angle n$, und $\angle o = \angle p$: So iſt der $\triangle AEH = \triangle CFH$ (§. 505.). Nun iſt aber der $\triangle ABC = \triangle ACD$ (§. 632.), und daher iſt der $\triangle ABC - \triangle AEH = \triangle ACD - \triangle CFH$, und alſo das Trapezium AHFD = dem Trapezio EBCH (§. 87.), das Trapezium $AHFD + \triangle AEH$ = dem Trapezio $EBCH + \triangle CFH$, und alſo das Trapezium AEFD = dem Trapezio EBCF (§. 85.).

§. 687.

Ein Parallelogrammum in eine beſtimte Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.

Auflöſung.

Man teile, wenn die Teilung parallel mit der Linie BC des Parallelogrammi ABCD geſchehen ſoll, die Länge AB, Tab. XXI. fig. 212, in ſo viele gleiche Teile, als man das Parallelogrammum teilen ſoll, und ziehe durch ieden Teilungspunkt mit BC Parallellinien; So iſt das Parallelogrammum in die verlangten Teile geteilet: Denn alle Parallelogramma, worinnen das ganze Parallelogrammum verteilt worden, haben gleiche Grundlinien, und gleiche Höhen (§. 527. und 646.). Teilt man ſtatt der Linie AB die Linie BC in ſo viele gleiche Teile, und ziehet mit AB Parallellinien: So wird das Parallelogrammum parallel mit der Linie AB in gleiche Teile geteilt.

§. 688.

Weil alle Triangel, die einerlei Grundlinie, und einerlei Höhen haben, einander gleich ſind (§. 648): So wird auch ein Triangel ABC, Tab. XXI. fig. 213, in gleiche Teile geteilet, wenn man eine Seite AB in die verlangten gleiche Teile teilet, und aus den Teilungspunkten in die Spizze C des Triangels gerade Linien ziehet.

§. 689.

Ein Parallelogrammum in proportionirliche Teile zu teilen.

Aufloͤſung.

Man teile die Linie AB, Tab. XXII. fig. 214, wenn die Teilung parallel mit BC geſchehen ſoll, in die gegebenen proportionirlichen Teile, und ziehe mit BC durch alle Teilungspunkten Parallellinien; So iſt das Parallelogrammum ABCD nach den gegebenen proportionirlichen Teilen geteilet: Denn, da alle Parallelogramma, worinnen das ganze Parallelogrammum verteilt worden, einerlei Hoͤhe, und die gegebenen proportionirlichen Teile zu ihren Grundlinien haben; So verhalten ſie ſich auch, wie dieſe ihre Grundlinien (§. 527. und 682.).

§. 690.

Da ſich die Triangel, die einerlei Hoͤhen haben, wie ihre Grundlinien verhalten (§. 683.): So wird auch ein Triangel ABC, Tab. XXII. fig. 215, in proportionirliche Teile geteilet, wenn man eine Seite AB in die gegebenen proportionirlichen Teile teilet, und aus allen Teilungspunkten in die Spizze C des Triangels gerade Linien ziehet.

§. 691.

Eine iede geradlinigte Flaͤche in beliebige gleiche Teile zu teilen.

Aufloſung.

1) Man rechne den Flächeninhalt der ganzen Figur aus (§. 672.), und dividire denſelben durch die Zahl der Teile, worinnen die Figur ABCDEFA, Tab. XXII. fig. 216, geteilt werden ſoll, in unſerm Fall durch 2: So hat man einen Teil.

2) Man ſehe dieſen Teil als zwei an einander liegende Triangel an, und ziehe den Triangel BCD von demſelben ab: So iſt der Reſt der Teil, welcher dem Triangel BCD noch an dem verlangten einen Teil der Figur fehlet.

3) Man dividire dieſen fehlenden Teil durch $\frac{1}{2}$BD: So bekomt man die Höhe von einem Triangel, deſſen Inhalt ienem Reſt gleich iſt (§. 670.).

4) Man ziehe in der Weite dieſer Höhe mit BD eine Parallellinie KL, von K nach B aber eine gerade Linie: So iſt der Triangel BDK dem noch fehlenden Reſt gleich, und BCDK der verlangte eine, das aber, was übrig bleibt, und ABKEFA der andere Teil. So nun kan man eine Figur in ſo viele gleiche Teile teilen, als man will, wenn man nur ſtets zwei Triangel, die den verlangten einen Teil ausmachen, an einander ſezzet, und man wird ſich in einem ieden vorkommenden Fall, wenn man nur dieſes recht begriffen hat, gar leicht zu helfen wiſſen.

Exem-

Exempel.

1) Es ſei ½ BD	=	2° 3' 4''
und IC	=	9' 0''
So iſt der Triangel BCD	=	2,1° 0,6' 0''
Es ſei ½ AD	=	3° 2' 4''
und BM	=	1° 4' 4''
		1296
		1296
		324
So iſt der Triangel ABD	=	4,6° 6,5' 6''
Es ſei ½ AD	=	3° 2' 4''
und EH	=	1° 2' 6''
		1944
		648
		324
So iſt der Triangel ADE	=	4,0° 8,2' 4''
Es ſei ½ AE	=	1° 9' 6''
und FG	=	8' 0''
So iſt der Triangel AEF	=	1,5° 6,8' 0''

Dieſemnach iſt der Triangel BCD =	$\overset{\circ}{2},1\;\overset{\prime}{0},6\;\overset{\prime\prime}{0}$
⸗ ⸗ ABD =	$\overset{\circ}{4},6\;\overset{\prime}{6},5\;\overset{\prime\prime}{6}$
⸗ ⸗ ADE =	$\overset{\circ}{4},0\;\overset{\prime}{8},2\;\overset{\prime\prime}{4}$
⸗ ⸗ AEF =	$\overset{\circ}{1},5\;\overset{\prime}{6},8\;\overset{\prime\prime}{0}$
Und alſo die Figur ABCDEFA =	$1\overset{\circ}{2},4\;\overset{\prime}{2},2\;\overset{\prime\prime}{0}$
Und der halbe Teil =	$\overset{\circ}{6},2\;\overset{\prime}{1},1\;\overset{\prime\prime}{0}$

2) Da der halbe Teil der Figur =	$\overset{\circ}{6},2\;\overset{\prime}{1},1\;\overset{\prime\prime}{0}$
Und der Triangel BCD =	$\overset{\circ}{2},1\;\overset{\prime}{0},6\;\overset{\prime\prime}{0}$
So iſt der Inhalt des zu addirenden Triangels BDK =	$\overset{\circ}{4},1\;\overset{\prime}{0},5\;\overset{\prime\prime}{0}$

```
                                  1(1
                                  2 2(0
                                  1 7 8 2
                                  2 8 6 7(0 |  °  '  ''
3) Der Triangel BDK =             4 1 0 5 0 |  1  7  5
   Dividirt mit ½ BD =            2 3 4 4 4 |
                                  2 3 3
                                  2
```

Und es iſt alſo $\overset{\circ}{1}\,\overset{\prime}{7}\,\overset{\prime\prime}{5}$ die Höhe, in welcher man mit BD die Parallellinie ziehen muß.

§. 692.

Wer das, was wir vom 653. §. bis hiehin vorgetragen haben, wohl begriffen hat, der wird ſich in der

der Ausmeſſung, und Teilung der Grundſtükke, und überhaupt in einem ieden vorkommenden Fall leicht zu helfen wiſſen.

§. 693.

Einen Triangel in ein Rechtek zu verwandeln, das mit ihm gleiche Grundlinie, oder gleiche Höhe, und einerlei Inhalt hat.

Auflöſung.

Weil der Inhalt des Triangels heraus komt, wenn man ſeine Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multipliciret (§. 669.), und alſo der Triangel einem Parallelogrammo gleich iſt, das mit ihm einerlei Grundlinie, und die halbe Höhe des Triangels zu ſeiner Höhe, oder die halbe Grundlinie des Triangels zur Grundlinie, und die ganze Höhe dieſes Triangels zu ſeiner Höhe hat: So mache man aus der Grundlinie AB des Triangels ABC, Tab. XXII. fig. 217, und ſeiner halben Höhe GF das Rechtek ABDE, oder aus der halben Grundlinie AD, und der ganzen Höhe DC des Triangels ABC das Rechtek ADCE. Macht man umgewendet aus der Grundlinie AB, und der doppelten Höhe GC des Rechteks ABDE, oder aus der Höhe DC und der doppelten Grundlinie AB des Rechteks ADCE einen Triangel ABC: So wird das Rechtek in einen Triangel verwandelt.

§. 694.

Einen Triangel in eine länglichte Raute zu verwandeln, welche die halbe Grundlinie dieſes Triangels zur Grundlinie, die Höhe deſſelben aber zur Höhe hat.

Aufloͤſung.

Man ziehe mit AB, Tab. XXII. fig. 218, die Parallellinie CD, und teile AB in E in die Hälfte (§. 515.), durch E und B aber ziehe man mit AC Parallellinien EF und BD: So iſt EBDF die verlangte länglichte Raute (§. 527. und 669.). Macht man den Winkel FEB oder DBE, einem gegebenen Winkel gleich: So wird ein Triangel in eine länglichte Raute verwandelt, wozu der Winkel gegeben worden.

§. 695.

Ein Rechtek in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufloͤſung.

Man ſuche zwiſchen der Länge, und der Breite des gegebenen Rechteks die mittlere geometriſche Proportionallinie: So iſt dieſe die Seite von dem verlangten Quadrat (§. 229. 606. 653. und 665.).

§. 696.

Ein Rechtek in ein anderes Rechtek zu verwandeln, deſſen eine Seite gegeben iſt.

Aufloͤ-

Aufloͤſung.

Man ſuche zu der gegebenen Seite des Rechteks und der Laͤnge, und Breite des Rechteks, das man verwandeln ſoll, die vierte geometriſche Proportionallinie (§. 228. 604. und 665.).

§. 697.

Soll man ein Quadrat ABCD, Tab. XXII. fig. 219, oder ein Rechtek ABCD, Tab. XXII. fig. 220, nach einem gegebenen Winkel EAB, oder FBA in eine laͤnglichte Raute, oder eine Raute, oder laͤnglichte Raute in ein Rechtek verwandeln, die alle einerlei Grundlinie haben: So zeichne man im erſten Fall zwiſchen den Parallellinien AB und DF nach dem gegebenen Winkel auf die Grundlinie AB die Raute ABFE (§. 637.), im andern aber zwiſchen den Parallellinien AB und DF, Tab. XXII. fig. 220, auf die Grundlinie AB das Rechtek ABCD (§. 635. und 646.).

§. 698.

Verwandelt man eine Raute, oder laͤnglichte Raute vorerſt in ein Rechtek (§. 697.), und dann dieſes in ein Quadrat (§. 695.): So werden dieſe Rauten in ein Quadrat verwandelt.

§. 699.

Einen Triangel in ein Parallelogrammum zu

verwandeln, das eine beſtimte Seite, und einen beſtimten Winkel hat.

Auflöſung.

1) Man teile die Grundlinie AB, Tab. XXII. fig. 221, in D in zwei gleiche Teile, und trage in LBF den gegebenen Winkel.

2) Man ziehe durch C mit AB, und durch D und B mit AC die Parallellinien CF, DE und BF; So bekomt man das Parallelogrammum DBFE.

3) Man trage die gegebene Seite aus B in L, und ziehe durch L mit BF die Parallellinie LG, durch F mit BL aber die Parallellinie FG, ſo ſchneidet dieſe iene in G (§. 502.).

4) Man verlängere ED, FB und GL, und ziehe GB bis in H, wo ſie EH durchſchneidet.

5) Durch H ziehe man mit DL eine Parallellinie, ſo ſchneidet dieſe FI und GK in I und K, und es iſt IBLK das verlangte Parallelogrammum.

Beweis.

Weil EH, FI und KG, und HK, DL und EG parallel gezogen worden: So ſind EHKG, DBFE, BLGF, HIBD, und IKLB Parallelogramma (§. 429. und 527.), und daher iſt der $\triangle HGE = \triangle HKG$, der $\triangle HIB = \triangle HBD$, und der $\triangle BLG = \triangle BGF$ (§. 632. und 633.). Dieſemnach iſt der $\triangle HGE - \triangle BGF = \triangle HKG - \triangle BLG$

△ BLG, folglich HBFEH=HKLBH(§.87.), und HBFEH-△ HBD=HKLBH-△ HIB, und alſo das Parallelogrammum DBFE=dem Parallelogrammo BIKL (§. 87.). Nun iſt aber DBFE=△ ABC (§. 694.), und daher iſt auch das Parallelogrammum IKLB=△ ABC (§. 25.), es iſt aber BL der gegebenen Linie gleich gemacht worden, und der ∠ KIB= dem gegebenen ∠ FBL (§. 525.), und daher iſt auch geſchehen, was man verlangt hat.

§. 700.

So kan man auch ein iedes Parallelogrammum ABCD in ein anderes Parallelogrammum EFGB verwandeln, Tab. XXII. fig. 222, und Tab. XXIII. fig. 223, das einen gegebenen Winkel, und eine gegebene Seite hat, wenn man nur die Winkel GBC und GBH den gegebenen, und ſo auch die Linien BG der gegebenen gleich macht. Ein Quadrat wird in ein Rechtek verwandelt, deſſen Länge doppelt ſo gros, als die Seite des Quadrats, die Breite aber halb ſo gros, als die Seite dieſes Quadrats iſt, wenn man aus der doppelten, und der halben Seite AB des Quadrats ABCD ein Rechtek AEFG macht, Tab. XXIII. fig. 224.

§. 701.

Ein reguläres Vielek in ein Rechtek zu verwandeln.

Auflö-

Auflöſung.

Weil der Inhalt des Vieleks einem Triangel gleich iſt, deſſen Grundlinie dem Umfang des Vieleks, die Höhe aber der Höhe der Triangel gleich iſt, worinnen das Vielek zerteilet werden kan (§. 675.): So verwandele man das Vielek ABCDEA in einen Triangel ABC, Tab XXIII. fig. 225. und 226, der den Umfang des Vieleks zur Grundlinie AB, und die Höhe ſeiner Triangel zu der Höhe AC hat, iezt aber verwandele man auch dieſen Triangel in ein Rechtek (§. 693.), man mache nemlich aus dem Umfang AB des Vieleks, und der halben Höhe AD der Triangel, worinnen dieſes Vielek zerteilet werden kan, ein Rechtek ABED. Verwandelt man einen Triangel BCK des Vieleks in ein Rechtek BCGF, Tab. XXIII. fig. 226, und ſezzet dieſes Rechtek ſo oft zwiſchen zwei Parallellinien FI und GH, als das Vielek Triangel hat: So wird auch dadurch ein Vielek in ein Rechtek verwandelt (§. 694. und 687.).

§. 702.

Ein Trapezium in ein Rechtek zu verwandeln.

Auflöſung.

Man ziehe die Diagonallinie AC, Tab. XXIII. fig. 227, und verwandele den Triangel ACD in das Rechtek ACHG, den Triangel ABC aber in das Rechtek ACIK (§. 693.): So iſt KGHI das verlangte Rechtek (§. 30.).

Ver-

Verwandelt man dieſes Rechtek in ein Rechtek, das eine beſtimte Seite hat (§. 696.), ſo wird das Trapezium in ein Rechtek von einer beſtimten Seite verwandelt, und verwandelt man jenes Rechtek in einen Triangel (§. 693.), ſo wird das Trapezium in einen Triangel verwandelt.

§. 703.

Wenn man eine Figur in lauter Triangel zerteilet (§. 434.), und ieden nach einerlei Seite, und einerlei Winkel in ein Parallelogrammum verwandelt (§. 699.), dieſe Parallelogramma alsdann aber auf eine gerade Linie mit ihren gleichen Seiten an einander ſezzet: So wird die Figur in ein Parallelogrammum verwandelt, das eine gegebene Seite, und einen gegebenen Winkel hat, und ſo kan man mit einer ieden Figur verfahren.

§. 704.

Einen ieden Triangel, ein iedes Vielek, und einen ieden Cirkel in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflöſung.

Man ziehe aus dem Inhalt des zu verwandelnden Triangels, des Vieleks, oder des Cirkels, die Quadratwurzel (§. 190.): So iſt dieſe die Seite des verlangten Quadrats (§. 653.).

§. 705.

Wer das, was wir von der Verwandelung der Figuren

guren vorgetragen haben, wol gefaſt hat, der wird ſich in einem ieden vorkommenden Fall leicht helfen können.

§. 706.

Wenn man mit den Seiten einer regulären Figur ABCDEFA, Tab. XXIII. fig. 228, die in einem Cirkel beſchrieben worden (§. 435.), Parallellinien ab, bc, cd, de, ef und fa ziehet (§. 529.), die ſich einander durchſchneiden: So machen auch dieſe eine reguläre Figur.

Beweis.

I. Es iſt der ∠ i AB = iab, und der ∠ i AF = ∠ iaf (§. 525.), und daher iſt der ∠ FAB = ∠ fab (§. 85.). Es iſt ferner der ∠ iBA = ∠ iba, und der ∠ iBC = ∠ ibc (§. 525.), und alſo der ∠ ABC = ∠ abc (§. 85.). Weil nun der ∠ FAB = ∠ ABC (§. 430.): So iſt auch der ∠ fab = ∠ abc (§. 85.), und ſo kan man erweiſen, daß der ∠ b = ∠ c, und alle Winkel in der Figur abcdefa einander gleich ſind.

II. Es iſt der ∠ iab = ∠ iba: Denn der ∠ iAB = ∠ iab, und ∠ iBA = ∠ iba, der ∠ iAB aber iſt, weil iA = iB (§. 406. und 550.), = dem ∠ iBA (§. 25.). Ziehet man nunmehr ig perpendicular auf ab: So iſt ∠ iga = ∠ igb (§. 416.), ∠ a = ∠ b, und ig = ig (§. 27.), und daher iſt der

der $\triangle$ iga = $\triangle$ igb, und ag = gb (§. 511.). Weil der $\angle$ iBA = $\angle$ iba, und der $\angle$ iBC = $\angle$ ibc, der $\angle$ iBC und iBA aber gleich ſind (§. 639.): So iſt auch der $\angle$ iba = $\angle$ ibc (§. 39.). Da alſo dieſes, und, wenn ih perpendiculer auf bc iſt, der $\angle$ ihb = $\angle$ igb (§. 416.), und ih = ig (§. 406.): So iſt der $\triangle$ ibg = $\triangle$ ihb, und gb = bh (§. 511.), und weil auch, wie bei ag = gb erwieſen worden, bh = hc, ag + gb = bh + hc, und alſo ab = bc (§. 30. und 42.), und ſo kan man erweiſen, daß alle Seiten in der Figur abcdefga einander gleich ſind.

§. 707.

Der Quadratinhalt eines Cirkels iſt einem Triangel gleich, deſſen Grundlinie der Peripherie, die Höhe aber dem Radio des Cirkels gleichet.

Beweis.

In einem ieden Cirkel kan ein reguläres Vielek beſchrieben werden (§. 568.). Wenn man demnach den Cirkel in unendlich kleine, aber gleiche Teile teilet, und die Sehnen ab, Tab. XXIII. fig. 229, dieſer Bogen ziehet (§. 639. und 641.): So fallen die Sehnen in die Peripherie, und es ſind die Bogen dieſer Sehnen unendlich klein, eben daher aber iſt zwiſchen ihnen, und ihren Sehnen ein unendlich kleiner, und kein Unterſcheid (§. 567.), und es gleichet

der Umfang des Vieleks, welches daher entſtehet, der Peripherie des Cirkels. Es kan alſo der Cirkel als ein Vielek angeſehen werden, von unendlich kleinen Seiten: Iſt aber dieſes, und fallen dieſe Seiten des Vieleks in die Peripherie des Cirkels; So iſt auch zwiſchen der Höhe d c der Triangel, worinnen das Vielek zerteilet werden kan (§. 639. Bew.), und dem Radio a d des Cirkels ein unendlich kleiner, und kein Unterſcheid, und daher gleichet die Höhe dieſer Triangel dem Radio des Cirkels. Nun iſt aber ein iedes Vielek einem Triangel gleich, welcher die Peripherie des Vieleks zur Grundlinie, und die Höhe der Triangel, worinnen es zerteilet werden kan, zu ſeiner Höhe hat (§. 675.), und daher iſt auch der Quadratinhalt des Cirkels einem Triangel gleich, deſſen Grundlinie der Peripherie, die Höhe aber dem Radio des Cirkels gleichet.

§. 708.

Wenn man dieſemnach die Peripherie des Cirkels mit dem halben Radio des Cirkels, oder mit dem vierten Theil des Diameters multipliciret (§. 405. 407. 408. und 668.): So findet man den Quadratinhalt des Cirkels, und es iſt einerlei, ob man die Peripherie mit dem vierten Teil des Diameters, oder mit dem ganzen Diameter multiplicirt, und das Product durch 4 dividiret, oder ob man den Radium

mit

mit der halben, oder mit der ganzen Peripherie multiplicirt, und im lezten Fall das Produkt durch 2 dividiret (§. 669.). Es komt alſo nur darauf an, daß man ſich, um den Flächeninhalt eines Cirkels zu finden, zuvor die Gröſe der Peripherie bekant macht, es geſchiehet aber dieſes, wenn man, weil alle Cirkel einander ähnlich ſind (§. 404.), und alſo alle Diametri zu ihren Peripherien einerlei Verhältnis haben, die Verhältnis des Diameters zur Peripherie beſtimt, da man denn zu dieſer Verhältnis, und dem gegebenen Diametro die vierte geometriſche Proportionalzahl, und die Peripherie dieſes Diametri leicht finden kan (§. 240.).

§. 709.

Aus dem 707. §. folgt, daß auch der Ausſchnitt ABC eines Cirkels, Tab. XXIIII. fig. 230, einem Triangel gleich iſt, welcher den Bogen BC zu ſeiner Grundlinie, und den Radium AB zu ſeiner Höhe hat: Denn wenn man BC in unendlich kleine, aber gleiche Teile teilet, und in die Polygonwinkel aus A gerade Linien ziehet; So fallen, wie vorhin, die Grundlinien der Triangel, die daher entſtehen, in die Peripherie, und ihre Höhe gleichet dem Radio AB des Cirkels, alle dieſe kleine Triangel aber machen den Ausſchnitt ABC aus.

§. 710.

Wenn man dieſemnach die Gröſe des Bogens BC findet, und dieſe mit dem halben Radio, oder dem vierten Teil des Diameters multipliciret: So bekomt man den Quadratinhalt des Ausſchnitts ABC.

§. 711.

Aus dem gegebenen Radio AB eines Cirkels, Tab. XXIIII fig. 231, und der Seite CD eines regulären Vieleks, das in dieſem Cirkel beſchrieben worden, die Seite BD von einem Vielek zu finden, das noch einmal ſo viele Seiten hat.

Auflöſung.

1) Man erhebe ſowol den Radium AD, als die halbe Sehne ED in das Quadrat, und ziehe das Quadrat ED^2 von AD^2 ab, ſo bekomt man das Quadrat AE^2, aus dieſem nun ziehe man die Quadratwurzel (§. 187. 188. und 189.), ſo bekomt man AE.

2) Dieſe Quadratwurzel ziehe man von dem Radio AB ab, ſo iſt der Reſt EB.

3) Man erhebe EB, und die halbe Sehne ED in das Quadrat, und addire die Quadrate EB^2 und ED^2, ſo bekomt man das Quadrat BD^2, aus dieſem nun ziehe man die Quadratwurzel, ſo iſt dieſe die verlangte Seite BD, und die Sehne von dem halben Bogen BD des Bogens CBD, welcher der Bogen von der Seite CD des gegebenen Vieleks iſt.

Beweis.

Beweis.

Wenn der Radius AB auf CD perpendicular gezogen wird: So teilt er ſowol die Sehne CD, als den Bogen CBD in E und B in zwei gleiche Teile (§. 569.), und bei E entſtehen rechte Winkel, und alſo die rechtwinkelichten Triangel AED und BED. Da nun CD, und alſo auch $\frac{1}{2}$CD = ED, und der Radius AD = AB gegeben ſind (§. 406.): So findet man auch AE, wenn man ED^2 von $AD^2 = AB^2$ abziehet (§. 678.), und aus dem Reſt die Quadratwurzel ziehet, man findet aber auch EB, wenn man AE von AB abziehet, und endlich findet man die Sehne BD von dem halben Bogen CBD, wenn man BE^2 und BD^2 addirt, da man BD^2 bekomt (§. 676.), und aus der Summe BD^2 die Quadratwurzel ziehet (§. 677.).

§. 712.

Aus der gegebenen Seite eines regulären Vieleks, welches in einem Cirkel beſchrieben worden, die Seite des Vieleks zu finden, das um dieſen Cirkel beſchrieben iſt.

Auflöſung.

1) Man erhebe den Radium iB, Tab. XXIII. fig. 228, und die halbe Seite GB des Vieleks in das Quadrat, und ziehe das Quadrat BG^2 von dem Quadrat iB^2 ab: So bekomt man das Quadrat iG^2.

2) Aus iG^2 ziehe man die Quadratwurzel: So bekomt man die Linie iG.

3) Zu iG, der halben Seite des Vieleks GB, und dem Radio ig ſuche man die vierte geometriſche Proportionalzahl gb, und addire dieſe zu ſich ſelbſt, ſo bekomt man die verlangte Seite ab des Vieleks, das um den Cirkel beſchrieben iſt.

Beweis.

Wird ig auf ab perpendicular gezogen; So iſt $GB = \frac{1}{2} AB$ (§. 569.), und der Triangel iGB ein rechtwinkelichter Triangel. Wenn man daher iB und GB, die beide bekant ſind, quadrirt, und GB^2 von iB^2 abziehet, aus dem Reſt aber die Quadratwurzel ziehet; ſo bekomt man iG (§. 678.). Nun iſt aber AB ⌗ ab (§. 706.), und daher iſt auch $iG : GB = ig : gb$ (§. 589.), es iſt aber der $\angle big = \angle gia$ (§. 550.), der $\angle igb = \angle iga$, und $ig = ig$ (§. 27.), und daher iſt auch $gb = ag$ (§. 505.), und $2 gb = ab$ (§. 30.).

§. 713.

Die Verhältnis des Diameters zur Peripherie des Cirkels zu beſtimmen.

Auflöſung.

1) Man ſuche aus dem Radio des Cirkels, den man in ſehr kleinen Teilen angenommen hat, und einer bekanten Seite von einem regulären Vielek, das

in

in dieſem Cirkel beſchrieben worden, die Seite eines regulåren Vieleks, das noch einmal ſo viele Seiten hat (§. 611.), aus dieſer Seite aber wieder die Seite eines regulåren Vieleks, das noch einmal ſo viele Seiten hat, und mit dieſer Arbeit halte man ſo lang an, bis man eine Seite findet, die von ihrem Bogen unendlich wenig unterſchieden iſt, die Gröſe dieſer Seite nun multiplicire man mit der Anzahl der Seiten dieſes Vieleks, ſo hat man ſeine Peripherie.

2) Man ſuche aus dieſer gefundenen Seite die Seite eines regulåren Vieleks, das um dieſen Cirkel beſchrieben iſt (§. 712.), und multiplicire auch dieſe Seite mit der Anzahl der Seiten dieſes Vieleks, ſo bekomt man die Peripherie von dieſem Vielek. Weil nun

3) die Peripherie des in dem Cirkel beſchriebenen Vieleks etwas kleiner, die Peripherie des um den Cirkel beſchriebenen Vieleks aber etwas gröſer iſt, als die Peripherie des Cirkels (§. 706.): So kan auch durch dieſen Unterſchied die Gröſe der Peripherie nach denen zum Diameter angenommenen Teilen, und alſo die Verhåltnis des Diameters zur Peripherie beinahe, und ſo genau, wie möglich, beſtimt werden.

§. 714.

Da die Verhåltnis des Diameters zur Peripherie ſchon ſehr genau beſtimt iſt: So hat man auch

nicht nötig, daß man eine ſo mühſame Arbeit unternimt, es hat aber Archimedes dieſe Verhältnis wie 7:22, und Adrian Metius wie 113:355. angegeben, Ludolph von Cölen, ein Holländer, hingegen hat durch die Decimalbrüche gefunden, daß, wenn der Diameter 1 iſt, die Peripherie gröſer als

3.14159265358979323846264338387950,

hingegen aber etwas kleiner als dieſe Zahl ſei, wenn die lezte Ziffer dieſer Zahl 1 iſt, und daß ſich alſo der Diameter zur Peripherie verhalte, wie

100000000000000000000000000000000000:314159 265358979323846264338387950,

man nimt inzwiſchen von dieſen beiden Zahlen nur die drei erſteren Zahlen, und alſo die Verhältnis wie 100:314, hingegen aber wie 1000:3141, und wie 10000:31415 u. ſ. w. an (§. 216.), wenn die Cirkel, deren Peripherie man finden ſoll, ſehr gros ſind, und man einen merklichen Fehler vermeiden will. Man ſucht alſo im erſten Fall die Peripherie nur bis auf 100, im andern bis auf 1000, und im dritten bis auf 10000 Teile des Diameters u. ſ. w.

§. 715.

Wegen der Nulle in dem erſten Glied iſt demnach des von Cöln Verhältnis des Diameters zur Peripherie am bequemſten, man kan in den Decimalzahlen ſehr geſchwinde fortkommen, und wenn der Diame-

Diameter eines Cirkels $\overset{0}{100}$, oder $\overset{I}{100}$, oder $\overset{II}{100}$, oder $\overset{III}{100}$ iſt u. ſ. w., ſo iſt die Peripherie beinahe $\overset{0}{314}$, oder $\overset{I}{314}$, oder $\overset{II}{314}$, oder $\overset{III}{314}$ u. ſ. w, und ſo auch umgewendet.

§. 716.

Die Verhåltnis des Archimedes bringt eine zu groſe Peripherie, und des Metii ſeine iſt gar zu unbequem. Die Verhåltnis des von Cöln hingegen iſt, auſer ihrer Bequemlichkeit, ſo ſcharf, als man ſie zu der Ausůbung nur verlangen kan, eben daher aber gebraucht man ſie faſt durchgehends, und es wird denen die Mühe nicht belohnet, welche die wahre Verhåltnis des Diameters zur Peripherie, und die Quadratur des Cirkels ſuchen (§. 652.).

§. 717.

Wenn man in der Verhåltnis wie 100 zu 314 die Peripherie 314 mit $\frac{100}{4} = 25$ multiplicirt; So bekomt man den Quadratinhalt des Cirkels 7850 (§. 708.): Und wenn man den Diameter 100 mit 100 multiplicirt; ſo erhålt man das Quadrat des Diametri 10000 (§. 653.). Weil nun alle Diameter zu ihren Peripherien einerlei Verhåltnis haben (§. 708.), und wenn iener in 100 Teile geteilt wird, dieſe 314 von dieſen Teilen in ſich begreift (§. 715.): So verhålt

hält ſich auch der Quadratflächeninhalt des Cirkels zu dem Flächeninhalt des Quadrats ſeines Diametri, wie 7850 : 10000, oder wenn man an beiden Zahlen zwei Nulle abſchneidet (§. 216.), wie 785 : 1000, aber nur beinahe, weil die Verhältnis des Diameters zur Peripherie nicht ganz genau iſt (§. 713. und 714.).

§. 718.

Da ſich alſo der Flächeninhalt des einen Cirkels zu dem Flächeninhalt des Quadrats ſeines Diametri verhalten muß, wie der Flächeninhalt eines ieden andern Cirkels zu dem Flächeninhalt des Quadrats ſeines Diametri: So verhalten ſich auch die Flächeninhälte der Cirkel zu einander, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 233.). Wenn alſo der Diameter eines Cirkels noch einmal ſo gros iſt, als der Diameter eines andern Cirkels; So iſt auch der Flächeninhalt des erſteren Cirkels viermal ſo gros, als der Flächeninhalt des lezteren Cirkels: Und es iſt der Flächeninhalt eines Cirkels noch neunmal ſo gros, als der Flächeninhalt eines andern Cirkels, wenn der Diameter von dem erſteren Cirkel dreimal ſo gros iſt, als der Diameter des lezteren Cirkels u. ſ. w.

§. 719.

Da ſich die Cirkelflächen, wie die Quadrate ihrer Diametrorum verhalten (§. 718.): So bekomt man

auch

auch den Diameter von einer Cirkelfläche, die zweien andern Cirkelflächen gleich iſt, wenn man die Diametri der lezteren A B und A C, Tab. XXIIII. fig. 232, in einem rechten Winkel zuſammen ſezt, da dann die Hypothenuſe BC der Diameter von der Cirkelfläche iſt, welche den beiden Cirkelflächen von den Diametris A B und A C gleich iſt, A B hingegen iſt der Diameter von der Cirkelfläche, die der Unterſcheid iſt zwiſchen den Cirkelflächen, die A C und B C zu ihren Diametris haben, und A C iſt der Diameter von der Cirkelfläche, die der Unterſcheid iſt zwiſchen den Cirkelflächen, deren Diametri B C und A C ſind (§. 677. und 678.).

§. 720.

Aus dem gegebenen Diametro eines Cirkels ſeine Peripherie zu finden.

Aufloͤſung.

Weil alle Diametri zu ihren Peripherien einerlei Verhaͤltnis haben, und ſich alſo in allen Cirkeln der Diameter wie 100 zu 314 verhalten muß (§. 708. und 715.): So ſuche man zu 100, 314 und dem gegebenen Diametro die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), ſo iſt dieſe die Peripherie von dem gegebenen Diametro.

Exempel.

Es ſei der gegebene Diameter $\overset{0}{3}\,\overset{I}{8}$; So iſt die Rechnung dieſe:

```
100: 314 = 38
       38
     ----
     2512
     942
    -----
    11932        1̸1̸9̸32 | 119 32/100.
                 1̸1̸1̸00 |
```

Die Peripherie iſt alſo $1\overset{0}{1}\overset{I}{9}\tfrac{32}{100}$ (§. 715.), oder, wenn man den Zähler mit 10 multiplicirt, und durch 100 dividirt, und dieſes Verfahren bei dem übrig bleibenden Bruch $\tfrac{20}{100}$ wiederhohlt, $1\overset{0}{1}\,\overset{I}{9}\,\overset{II}{3}\,\overset{III}{2}$ (§. 153. und 466.), und es iſt hieraus, und weil der Diviſor ſtets 100 iſt, zugleich klar, daß in den Decimalzahlen von der rechten nach der linken Hand zu über die Zahl in der dritten Stelle des Productes aus dem andern in das dritte Glied die höchſte Kennziffer des dritten Gliedes, die niederen aber weiter nach der linken Hand, die höhere hingegen, ſo wie ſie ſteigen, über die zwei Zahlen nach der rechten Hand zu ſtehen kommen (§. 467.). Man hat alſo nur nötig, daß man das Product aus dem andern in das dritte Glied von der Rechten nach der Linken, mit der um zwei erhöheten höchſten Kennziffer des dritten Glieds zu bezeichnen anfängt, und dieſes iſt der beſondere Nuzzen, den uns die Verhältnis wie 100

zu 314 verſchaffet (§. 715.). In dem gemeinen Maas muß man hingegen das Product aus dem andern in das dritte Glied durch 100 dividiren, und den Reſt mit der Anzahl der kleineren Dinge multipliciren, die in den gröſeren ein Ganzes ausmachen, alsdann aber auch dieſes Product durch 100 dividiren (§. 153.).

§. 721.

Wenn die Peripherie zu einem gegebenen Diameter gefunden iſt; So kan man einen beſtimten Teil von der Peripherie leicht finden, wenn man dieſelbe durch die Zahl dieſer Teile dividiret: Und wenn man die gefundene Peripherie durch 360° dividiret; So bekomt man den Teil der Peripherie, welcher einen Grad ausmacht.

§. 722.

Aus der gegebenen Peripherie eines Cirkels ſeinen Diameter zu finden.

Aufloͤſung.

Man wende die Verhaͤltnis des Diameters zur Peripherie um (§. 380.), und ſuche zu 314, 100 und der gegebenen Peripherie (§. 708. und 715.) die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.): So iſt dieſe der Diameter zu der gegebenen Peripherie.

Exem-

Exempel.

Es ſei die gegebene Peripherie $1\overset{0}{1}\overset{I}{9}\overset{II}{3}\overset{III}{2}$: So iſt die Rechnung dieſe:

$$314 : 100 = 11932$$
$$\underline{\qquad\qquad 100}$$
$$1193200$$

```
   1
   83
  261
1193200 | 3800   (° I II III)
 31444
  3111
   33
```

Wenn bei der Diviſion ein Reſt übrig bleibt, und man hängt im Decimalmaas eine o daran, und ſezt die Diviſion fort: So bekomt man noch eine Zahl zum Quotienten, die eine um Eins erhöhete Kennziffer hat, und noch eine Zahl, die eine noch um Eins erhöhete Kennziffer hat, wenn man noch eine Null anhängt und ſo weiter (§. 153. und 467.), hierdurch alſo findet man noch Schuhe, Zolle, Linien u. ſ. w., wenn Ruthen, und Zolle, Linien und ſ. w., wenn Schuhe gegeben ſind:

Exempel.

$$314 : 100 = \overset{0}{7}$$
$$\underline{\quad 7}$$
$$700$$

```
 (7              (9               (29
 18(2 | °        10(2 | |         30(2 | ||
 700  | 2        720  | 2         920  | 2
 314             314              314
```

Und alſo iſt die Peripherie, wenn der Diameter $\overset{\circ}{7}$ hat, $\overset{\circ}{2}\,\overset{|}{2}\,\overset{||}{2}$ u. ſ. w.

§. 723.

Aus dem gegebenen Diameter, oder der Peripherie eines Cirkels ſeinen Flächeninhalt zu finden.

Erſte Auflöſung.

Man finde aus dem gegebenen Diametro die Peripherie, oder, wenn dieſe gegeben iſt, aus ihr den Diameter (§. 720. und 722.), man multiplicire die Peripherie mit dem vierten Teil des Diameters: So iſt das Product der Flächeninhalt von dem Cirkel des gegebenen Diameters, oder der gegebenen Peripherie (§. 708.). Es ſei der gegebene, oder aus der Peripherie $\overset{\circ}{9}\,\overset{|}{4}\,\overset{||}{2}$ gefundene Diameter $\overset{\circ}{3}$: So iſt die Rechnung dieſe:

```
                      °
100: 314 = 3
           3
      ———————
      ° | ||
      942 = der Peripherie
       | ||    °      ° | ||
       75 = 3: 4 = 300: 4 = 1/4
  ———————————————————
     4710          der Peripherie (§. 108.)
    6594
  ———————————————————
    °  |   ||
    7,06,50 = der geſuchten Cirkelfläche (§. 708.).
```

Oder

Oder

$\overset{0}{9}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{2}$ = der Peripherie

$\overset{0}{3}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{0} = \overset{0}{3}$ = dem Diameter (§. 658.)

$$4)\;\frac{2\overset{0}{8},2\overset{I}{6},0\overset{II}{0}}{}$$

$7,\overset{0}{0}6,\overset{I}{5}\overset{II}{0}$ = der geſuchten Cirkelfläche (§. 708.).

Oder

$\overset{0}{4}\,\overset{I}{7}\,\overset{II}{1} = \overset{0}{9}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{2} : 2$ = der $\frac{1}{2}$ Peripherie

$\overset{0}{1}\,\overset{I}{5}\,\overset{II}{0} = \overset{0}{3}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{0} : 2$ = dem Radio

2 3 5 5 0
4 7 1

$\overset{0}{7},0\,\overset{I}{6},\overset{II}{5}\,0$ = der geſuchten Cirkelfläche (§. 708.).

Oder

$\overset{0}{9}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{2}$ = der Peripherie

$\overset{0}{1}\,\overset{I}{5}\,\overset{II}{0} = \overset{0}{3}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{0} : 2$ = dem Radio

4 7 1 0 0
9 4 2

$$2)\;\frac{\overset{0}{1}4,\overset{I}{1}\,3,\overset{II}{0}0}{}$$

$\overset{0}{7},0\,\overset{I}{6},5\,\overset{II}{0}$ = der geſuchten Cirkelfläche (§. 708.).

Andere Auflöſung.

Man erhebe den gegebenen, oder aus der Peripherie gefundenen Diametrum in das Quadrat, und ſuche

ſuche zu 1000, zu 785, und dem Quadrat des gegebenen Diametri die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), ſo iſt dieſe die verlangte Cirkelfläche (§. 717.).

Exempel.

Es ſei der Diameter wie vorhin = $\overset{0}{3}$; So iſt ſein Quadrat $\overset{0}{9}$, und die Rechnung dieſe:

$$1000 : 785 = \overset{0}{9}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 7065 \end{array}$$

$$\frac{\not{7}\not{0}\not{6}\not{5}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}}{\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{0}\not{0}\not{0}} \Big| \; \overset{0}{7},\overset{I}{0}\,6,\overset{II}{5}\,\overset{0}{0} = \text{der geſuchten Peripherie}$$

(§. 153.).

Oder

$$\overset{0}{9}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{0}\,\overset{III}{0} \cdot \overset{0}{9}\,\overset{I}{0}\,\overset{II}{0}\,\overset{III}{0} = \overset{0}{9},\overset{I}{0}\,0,\overset{II}{0}\,0,\overset{III}{0}\,0$$

$$1000 : 785 = \overset{0}{9},\overset{I}{0}\,0,\overset{II}{0}\,0,\overset{III}{0}\,0$$

$$\begin{array}{r} 9000000 \\ \hline 7065000000 \end{array}$$

$$\frac{\not{7}\not{0}\not{6}\not{5}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}\not{0}}{\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{x}\not{0}\not{0}\not{0}} \Big| \; \overset{0}{7},\overset{I}{0}\,6,\overset{II}{5}\,0,\overset{III}{0}\,0 = \text{der geſuchten Cirkelfläche.}$$

§. 724.

Zu einem gegebenen Flächeninhalt den Diameter, oder die Peripherie zu finden.

Aufloͤſung.

Man ſuche zu 785, 1000 und dem gegebenen Inhalt die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.),

(§. 240.), ſo bekomt man das Quadrat des Diametri von dem gegebenen Flächeninhalt (§. 717.), aus dieſem nun ziehe man die Quadratwurzel (§. 187. 188. und 189.), ſo erhält man den verlangten Diameter, die Peripherie aber, wenn man zu dieſem Diameter die Peripherie ſuchet (§. 720.).

Exempel.

Es ſei der Inhalt $\overset{0}{7},\overset{I}{06},\overset{II}{50}$: So iſt die Rechnung dieſe.

785 : 1000 — 70650

1000

70650000

74 70650000 7888888 78888 777	$\overset{0}{9},\overset{I}{00},\overset{II}{00}$

$\overset{0}{9},\overset{I}{00},\overset{II}{00}$ 9 00000	$\overset{0\,I\,II}{300}$ = dem geſuchten Diameter.

§. 725.

Aus dem gegebenen Radio AB des Cirkels, Tab. XXIIII. fig. 230, und dem Bogen BC den Flächeninhalt des Ausſchnitts BACB zu finden.

Aufloſung.

1) Man ſuche zu 100, 314, und dem gegebenen Radio die vierte geometriſche Proportionalzahl

zahl (§. 240.); So bekomt man die halbe Peripherie: Denn die Hälften verhalten ſich eben ſo, wie die Ganzen (§. 216. und 720.).

2) Weil nun die halbe Peripherie 180° hat (§. 721): So ſuche man zu 180°, den Graden des Bogens BC, und der gefundenen halben Peripherie, die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.); So bekomt man die Länge des Bogens BC im Längenmaas.

3) Man multiplicire die Länge dieſes Bogens mit dem halben Radio AB: So iſt das Product der Flächeninhalt des Cirkels (§. 710.). Es ſei $AB = \overset{0\,\mathrm{I}}{12}$, und der Bogen $BC = 12^\circ$; So iſt die Rechnung dieſe:

$$100 : 314 = \overset{0\,\mathrm{I}}{12}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 628 \\ 314 \\ \hline \overset{0\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}}{3768} \end{array} = \text{der } \tfrac{1}{2} \text{ Peripherie.}$$

$$180^\circ : 12^\circ = \overset{0\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}}{3768}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 7536 \\ 3768 \\ \hline 45216 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4 \\ 29x(3 \\ 482x(6 \\ x8000 \\ x88 \\ x \end{array} \;\Big|\; \overset{\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III}}{251}\tfrac{36}{180}\Big|\tfrac{6}{30}\Big|\tfrac{1}{5} = \text{der Länge des Bogens BC}$$

$$\overset{I}{2}\ \overset{II}{5}\ \overset{III}{1}$$

$$\overset{I}{6}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{0} = \overset{0}{1}\ \overset{I}{2} : 2 = 6 = \overset{I}{6}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{0} = \tfrac{1}{2}\ \text{Radio AB}$$

(§. 658.)

$$\overset{I}{1\,5},\overset{II}{0\,6},\overset{III}{0\,0} \qquad \frac{\overset{III}{1}}{6} \cdot \frac{\overset{I}{6}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{0}}{1} = \frac{600}{6} = \overset{II}{1},\overset{III}{0\,0}$$

$$\overset{II}{1},\overset{III}{0\,0}$$

$$\overset{I}{1\,5},\overset{II}{0\,7},\overset{III}{0\,0} = \text{dem Ausſchnitt BACB.}$$

§. 726.

Aus der gegebenen Sehne BC eines Abſchnitts, Tab. XXIIII. fig. 232, und ſeiner Höhe ED den Flächeninhalt des Abſchnitts BCEB zu finden.

Auflöſung.

1) Man ſuche aus der halben Sehne BD, und der Höhe ED den Diameter FE des Cirkels, wovon BEC der Bogen iſt (§. 628.): So kan man den Cirkel von dieſem Bogen beſchreiben, und den Winkel BAC meſſen (§. 488.).

2) Man ſuche den Inhalt des Ausſchnitts BACEB (§. 725.).

3) Man ziehe DE von dem Radio AE ab: So bekomt man AD.

4) Aus der halben Sehne BD und der Höhe AD, ſuche man den Inhalt des Triangels ABC (§. 668.).

5) Man

5) Man ziehe den Flächeninhalt des Triangels ABC von dem Flächeninhalt des Ausſchnitts BACEB ab: So iſt der Unterſchied der Flächeninhalt des Abſchnitts BCEB.

Exempel.

Es ſei DE $= \overset{I}{5}$, und BC $= \overset{0}{2}$: So iſt BD $= \dot{1}$, und die Rechnung dieſe.

$$DE : DB = DB : DF$$

$$\overset{I}{5} : \overset{0}{1}\overset{I}{0} = \overset{0}{1}\overset{I}{0}$$

$$10$$

$$\not{1}\not{0}\not{0} \,|\, \overset{0}{2}\overset{I}{0} = DF$$

$$\not{5}\not{5} \,|\, \overset{I}{5} = DE$$

$$\overset{0}{2}\overset{I}{5} = FE = \text{dem Diameter.}$$

$$100 : 314 = \overset{0}{2}\overset{I}{5}$$

$$25$$

$$1570$$

$$628$$

$$\overset{0}{7}\overset{I}{8}\overset{II}{5}\overset{III}{0} = \text{der Peripherie.}$$

Nun ſei der Winkel B A C = 106°, ſo rechnen wir ſo.

$$360^{0} : 106^{0} = \overset{0}{7}\,\overset{I}{8}\,\overset{II}{5}\,\overset{III}{0}$$

```
            106
      -----------
          47100
         7850
      -----------
         832100
```

```
      (1
  x z x z
  z x 4 8(4    | 0 I II III    (4
  8 3 z x 0(0  | 2 3  1  1  140/336 | 35/84 = dem Bogen B E C.
  3 6 0  0 0   |
    3 6 6 6
      3 3
```

$$\begin{array}{r} \overset{0}{2}\,\overset{I}{3}\,\overset{II}{1}\,\overset{III}{1} \\ \overset{I}{6}\,\overset{II}{2}\,\overset{III}{5} \\ \hline 11555 \\ 4622 \\ 13866 \\ \hline \overset{0}{1,4}\;\overset{I}{4,4}\;\overset{II}{3,7}\;\overset{III}{5} \\ \overset{II}{2,6}\;\overset{III}{0} \\ \hline \overset{0}{1,4}\;\overset{I}{4,4}\;\overset{II}{6,3}\;\overset{III}{5} \end{array}$$

$\overset{I}{6}\,\overset{II}{2}\,\overset{III}{5} = \dfrac{\overset{0}{2}\,\overset{I}{5}}{4} = \dfrac{\overset{0}{2}\,\overset{I}{5}\,\overset{II}{0}\,\overset{III}{0}}{4} = \frac{1}{4}$ des Diameters

$\dfrac{35}{84} \cdot \dfrac{\overset{III}{6}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{5}}{1} = \dfrac{2,18,7\overset{III}{5}}{84} = \overset{II}{2,6}\,\overset{III}{0}\,\dfrac{35}{84}$

$\overset{0}{1,4}\;\overset{I}{4,4}\;\overset{II}{6,3}\;\overset{III}{5}$ = dem Ausſchnitt B A C E B

$\overset{0}{1}\,\overset{I}{2}\,\overset{III}{5}$

$$125 = 25 : 2 = \tfrac{1}{2}\,FE = AE$$

$$\underline{50 = DE}$$

$$75 = AD$$

$$75 = AD$$

$$\underline{100 = BD}$$

$$75{,}00 = \text{dem } \triangle\, BAC$$

$$1{,}4\;4{,}4\;6{,}7\;5 = \text{dem Ausſchnitt } BACEB$$

$$\underline{7\,5{,}0\,0{,}0\,0 = \text{dem } \triangle\, BAC}$$

$$6\,9{,}4\;6{,}7\;5 = \text{dem Abſchnitt } BCEB.$$

§. 727.

Aus den gegebenen Diametris AB und AE, Tab. V. fig. 69, den Flächeninhalt des Ringes zu finden (§. 436.).

Auflöſung.

Man ſuche den Flächeninhalt des Cirkels von dem Radio AE und AB (§. 723.), und ziehe ienen von dieſem ab: So iſt der Reſt der verlangte Flächeninhalt des Ringes (§. 436.).

§. 728.

Aus den gegebenen Diametris AE und AB, Tab. V. fig. 69, und dem Winkel BAC den Flächeninhalt von dem Ausſchnitt des Ringes BEFCB zu finden (§. 436.).

Auflöſung.

Man ſuche den Flächeninhalt des Ringes (§. 727.), und finde zu 360°, den gegebenen Graden des Winkels BAC, und dem Flächeninhalt des Ringes die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), oder man finde den Flächeninhalt des Ausſchnitts AEFA und ABCA (§. 725.), und ziehe ienen von dieſem ab: So weis man den Flächeninhalt des Ausſchnitts von dem Ringe BEFCB.

§. 729.

Weil ſich eine ebene Fläche um eine gerade Linie, die in ihr liegt, herum drehen kan: So wird auch die Lage einer Fläche durch drei Punkte auf ihr beſtimt, die nicht in einer geraden Linie liegen.

§. 730.

Zwei ebene Flächen durchſchneiden einander in einer geraden Linie: Denn die Fläche hat keine Dikke, und ſie ſelbſt iſt eben (§. 418. und 420.).

§. 731.

Wenn eine gerade Linie AB, Tab. XXIIII. fig. 234, auf einer ebenen Fläche CDEF dergeſtalt aufgerichtet iſt, daß ein jeder Punkt, den man in ihr annimt, von der Peripherie eines Cirkels, den man aus dem Punkt A auf dieſer Fläche beſchreibt, gleich weit abſtehet: So ſtehet dieſe Linie auf dieſer Fläche perpendicular, ſchief hingegen, wenn dieſes nicht iſt (§. 414.).

§. 732.

Es macht dieſemnach die Perpendicularlinie AB mit allen Linien, die man auf dieſer Fläche in den Punkt B ziehet, einen rechten Winkel (§. 415.).

§. 733.

Wenn eine gerade Linie AB, Tab. XXIIII. fig. 235, die auf eine ebene Fläche IKLM gezogen iſt, mit zwei in dieſer Fläche gezogenen Linien BC und BD rechte Winkel macht: So ſtehet ſie auf einer jeden andern Linie HBG in dieſer Fläche, die durch B gezogen worden, und ſelbſt auf dieſer Fläche perpendicular (§. 732.).

Beweis.

Um dieſes zu erweiſen: So verlängere man BD und BC, und mache BE=BC, und FB=BD, man ziehe DE und CF, und DC und FE durch

B aber eine andere gerade Linie GH, endlich ziehe man die Linien AC, AG, AF, AE, AH und AD, und ſchlieſe ſo. 1) Weil der ∠ FBC = ∠ EBD (§. 492.), FB = BD, und BE = BC: So iſt der △ BCF = △ BDE, und DE = FC, der ∠ BFC = ∠ BDE, und der ∠ BCF = ∠ BED (§. 503.). 2) Weil der ∠ BFC = ∠ BDE (N. 1.), der ∠ FBG = ∠ HBD (§. 492.), und BF = BD: So iſt auch der △ FBG = △ BDH, FG = HD, und BG = BH (§. 505.). 3) Da der ∠ ABC = ∠ ABE (§. 416.), CB = BE, und AB = AB (§. 27.): So iſt auch der △ ABC = △ ABE, und AC = AE (§. 503.). 4) Weil der ∠ ABF = ∠ ABD (§. 416.), FB = BD, und AB = AB (§. 27.): So iſt auch der △ ABF = △ ABD, und AF = AD (§. 503.). 5) Da AF = AD (N. 4.), AC = AE (N. 3.), und CF = DE (N. 1.): So iſt auch der △ AFC = △ ADE (§. 507.), und der ∠ AFG = ∠ ADH. 6) Weil der ∠ AFG = ∠ ADH (N. 5.), AF = AD (N. 4.), und FG = HD (N. 2.): So iſt der △ AFG = △ ADH, und AG = AH (§. 505.). Weil nun AG = AH (N. 6.), BG = BH (N. 2.), und AB = AB (§. 27.): So iſt auch der △ ABG = dem △ ABH, und der ∠ ABG = ∠ ABH (§. 507.), und alſo AB perpendicular auf die ebene Fläche IKLM (§. 414.).

§. 734.

§. 734.

Durch einen in einer ebenen Fläche ABCD, Tab. XXIIII. fig. 236, gegebenen Punkt E kan nur eine Perpendicularlinie EF gezogen werden, alle andere gerade Linien wie EG aber, welche durch dieſe Fläche und den Punkt E gehen, ſind ſchief, weil FEH ein rechter Winkel (§. 732.), und alſo GEH ein ſpizzer Winkel iſt (§. 415.).

§. 735.

Eben ſo kan aus einem Punkt H, Tab. XXIIII. fig. 236, auſerhalb einer ebenen Fläche nur eine Perpendicularlinie HI auf dieſe Fläche gezogen werden, alle andere gerade Linien wie HK aber, die aus dem Punkt H auf dieſe Fläche gezogen werden, ſind ſchief, weil in dem Triangel HIK keine zwei rechte Winkel HIK und HKI ſein können, und der Winkel HKI ſpiz, und alſo ſchief ſein muß (§. 415. und 543.).

§. 736.

Die Perpendicularlinie HI, Tab. XXIIII. fig. 236, welche aus einem Punkt H auf die Fläche ABCD gezogen wird, iſt die kürzeſte unter allen Linien, die aus dieſem Punkt auf dieſe Fläche gezogen werden, weil bei I ein rechter Winkel (§. 732.), und HK ◀ IK iſt (§. 543. und 558.).

§. 737.

Wenn auf der ebenen Fläche ABCD, Tab. XXIIII. fig. 237, eine gerade Linie EF perpendicular ſtehet: So ſtehet auch eine iede andere ebene Fläche HIKL, in welche die Perpendicularlinie EF zu liegen komt, auf der Fläche ABCD perpendicular (§. 420.). Denn wenn man GH perpendicular auf LH ziehet: So ſtehet EF perpendicular auf FG und FH (§. 733.), und daher ſtehet auch die ebene Fläche HIKL auf ABCD ſenkrecht (§. 420.).

§. 738.

Wenn EF, Tab. XXIIII fig. 237, perpendicular auf die ebene Fläche ABCD fält, und HI iſt parallel EF: So ſtehet auch die Linie HI perpendicular auf ABCD, weil die ebene Fläche HIEF, welche durch dieſe Parallellinie gehet, perpendicular auf ABCD ſtehet, indem ſie durch EF gehet (§ 737.), und der Winkel EFH ein rechter Winkel iſt (§. 732.), folglich auch der Winkel IHF (§. 525.). Eben ſo ſind aber auch zwei gerade Linien EF und IH, die auf einer ebenen Fläche ABCD ſenkrecht ſtehen, einander parallel (§. 544. und 735.).

§. 739.

Weil der Durchſchnitt EF, Tab. XXV. fig 238, der beiden ebenen Flächen ABCD und FGHE auf der ebenen Fläche ihres Neigungswinkels KIL perpendicular

dicular ſtehet (§. 420.): So ſtehen auch iene beide ebene Flächen auf dieſer perpendicular (§. 737.), und ſo auch umgewendet.

§. 740.

Wenn eine ebene Fläche HIKL auf einer andern ebenen Fläche ABCD, Tab. XXIIII. fig. 237, perpendicular ſtehet (§. 420.): So iſt auch die gerade Linie EF, welche auf dem Durchſchnitt LH dieſer beiden Flächen perpendicular ſtehet, ſenkrecht auf die Fläche ABCD. Denn, wenn die Fläche HIKL perpendicular auf ABCD ſtehet, und EFH ein rechter Winkel iſt: So iſt auch, wenn GF durch F perpendicular auf HL iſt, EFG ein rechter Winkel (§. 420.), und es ſtehet FE auf FH und FG, und alſo auch auf ABCD perpendicular (§. 733.).

§. 741.

Wenn ſich zwei ebene Flächen ABCD, und EFG, Tab. XXV. fig 239, durchſchneiden, und auf einer dritten HIKL perpendicular ſtehen (§. 420.): So iſt auch ihr Durchſchnitt MN perpendicular auf dieſe Fläche. Denn wenn man von einem Punkt M des Durchſchnitts der beiden perpendiculären Flächen auf den Durchſchnitt AN der Fläche ABCD eine Perpendicularlinie MN ziehet: So ſtehet dieſe auch auf der Fläche HIKL perpendicular (§. 740.), eben dieſer Perpendicul MN, welcher aus einem Punkt M

des

des Durchſchnitts beider perpendicularen Flächen auf den Durchſchnitt EN der Fläche EFG gezogen wird, ſtehet aber auch auf HIKL perpendicular (§. 740.), und daher fallen beide Perpendicul aus M in den Punkt N (§. 735.), und es iſt N in den beiden Durchſchnitten AN und EN der ſenkrechten Flächen ABCD und EFG mit HIKL, folglich da, wo ſich dieſe Durchſchnitte durchſchneiden, und alſo in beiden ſenkrechten Flächen zugleich. Es iſt alſo MN der Durchſchnitt der ſenkrechten Flächen ABCD und EFG (§. 730.), welcher ſenkrecht auf AN und EN und alſo auch ſenkrecht auf HIKL ſtehet (§. 733.).

§. 742.

Wenn dieſemnach zwei Flächen, die auf einer dritten ſtehen, einander perpendicular durchſchneiden: So ſind ſie beide auf die dritte ſenkrecht (§. 420. und 737.).

§. 743.

Wenn eine gerade Linie AB, Tab. XXV. fig. 240, eine Fläche CDEF niemals erreicht, es mögen auch beide ſo weit verlängert werden, als ſie nur wollen: So iſt iene Linie dieſer Fläche parallel.

§. 744.

Wenn eine gerade Linie AB auſer der ebenen Fläche CDEF, Tab. XXV. fig. 240, einer geraden Linie

nie IK in dieſer Fläche parallel iſt: So iſt ſie dieſer ganzen Fläche parallel. Denn wenn die gerade Linie AB der Linie IK parallel iſt; So können ſie einander nicht erreichen, und wenn ſie auch noch ſo weit verlängert werden (§. 409.): Und weil IK in der Fläche CDEF liegt; So kan auch die Linie AB dieſe Fläche niemals erreichen, eben daher aber iſt die Linie AB der ebenen Fläche CDEF parallel.

§. 745.

Wenn eine gerade Linie AB auſerhalb einer ebenen Fläche CDEF, Tab. XXV. fig. 240, einer geraden Linie IK in dieſer Fläche parallel iſt: So iſt ſie auch einer ieden Linie HG, die mit IK parallel gezogen wird, parallel. Denn gedenkt man ſich, daß durch die Linie AB, und den Punkt H in der Fläche CDEF eine Fläche ABGH gehet: So ſchneidet dieſe die Fläche CDEF in der Linie HG (§. 730.), und es iſt IK, weil ſie AB parallel iſt, auch der Fläche ABGH parallel (§. 744.). Es kan alſo IK die Linie HG nicht erreichen (§. 743.), und da IK in der ebenen Fläche CDEF liegt: So iſt IK parallel HG, und es iſt auch AB parallel HG weil beide in der Fläche ABGH ſind, und AB der Fläche CDEF parallel iſt, und dieſe nirgendswo erreichen kan (§. 743.), folglich auch AB und GH, weil die leztere zugleich in der ebenen Fläche CDEF liegt, niemals zuſammen kommen können.

§. 746.

§. 746.

Wenn eine gerade Linie AB, Tab. XXV. fig. 241, auf zwei Flächen CDEF, und GHIK perpendicular ſtehet: So ſind auch dieſe Flächen einander parallel (§. 420.). Denn wenn man durch die Perpendicularlinie AB eine andere ebene Fläche ziehet, es geſchehe auch nach welcher Richtung es wolle: So ſtehet ſie auf dieſen beiden Flächen ſenkrecht (§. 737.), auf den Durchſchnitten, welche dieſe Fläche mit den Flächen CDEF und GHIK macht, ſtehet aber auch AB perpendicular (§. 732.), und daher ſind dieſe Durchſchnitte einander parallel (§. 544.).

§. 747.

Es erhellet hieraus zugleich, daß alle Perpendicularlinien zwiſchen zweien Parallelflächen einander gleich ſind, weil alle Parallellinien zwiſchen den Durchſchnitten, die eine dritte durch AB gezogene Fläche macht, einander gleich, und Perpendicularlinien ſind (§. 527. und 740.)

§. 748.

Wenn zwei Parallelflächen ABCD und EFGH, Tab. XXV. fig. 242, von einer dritten ebenen Fläche IKLM durchſchnitten werden; So ſind die Durchſchnitte KL und IM einander parallel. Denn die Durchſchnitte KL und IM in der Fläche LKIM

ſind

ſind in den Flächen ABDC und EFGH: Weil nun dieſe parallel ſind, und einander nicht erreichen können (§. 420.); So ſind auch KL und IM parallel (§. 409.).

§. 749.

Wenn zwei ebene Parallelflächen ABCD und EFGH, Tab. XXV. fig. 243, von einer dritten IKLM durchſchnitten werden; So ſind die Neigungswinkel QOP und SRP einander gleich. Denn ihre Durchſchnitte AB und EF ſind Parallellinien (§. 748.), und wenn OR auf dieſe perpendicular ſtehet, und man auf OR eine ebene Fläche ſenkrecht ſezzet: ſo ſind auch QO und SR Parallellinien (§. 748.), und daher iſt der ∠QOP = ∠SRO (§. 420, 525. und 739.).

§. 750.

Wenn zwei gerade Linien AB und CD, Tab. XXV. fig. 244, von den Flächen EFHG, IKML, und NOPQ, die aber alle einander parallel ſind, durchſchnitten werden (§. 420.): So werden ſie in proportionirte Teile geteilet, und es verhält ſich AS: SB = CT: TD.

Beweis.

Wenn man die Punkten der Durchſchnitte A und C, B und D, und S und T zuſammen, von A nach D aber eine gerade Linie ziehet: So ſind auch,

auch, weil dieſe Flächen von ABDC durchſchnitten werden, die Durchſchnitte AC, ST und BD einander parallel, und es iſt SR ⧣ BD, und RT ⧣ AC (§. 748.), eben daher aber iſt AS: SB = AR: RD, und AR: RD = CT: TD (§. 589.), folglich auch AS: SB = CT: TD (§. 212.).

Das vierte Kapittel
von den
Eigenſchaften, der Beſchreibung, Teilung, und Ausmeſſung der Gröſen in den Körpern.

§. 751.

Alle Priſmata und Cylinder ABCDEF und GHIK, Tab. XXVI. fig. 245, welche einerlei Grundfläche haben, und zwiſchen zweien parallellen ebenen Flächen LMNO und PQRS ſtehen, nehmen einerlei körperlichen Raum ein, und ſind einander gleich.

Beweis.

Wenn man dieſe Körper mit einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche LMNO in lauter Scheiben zerſchneidet; So ſind alle dieſe Durchſchnitte einander gleich (§. 440. 442. und 444.): Und wenn dieſe Körper zwiſchen zweien parallellen ebenen Flächen ſtehen (§. 420.), und einerlei Höhe

haben

haben (§. 442. und 444.). So ſchneidet dieſe Fläche in dem einem Körper ſo viele Scheiben ab, als wie in dem andern, eben daher aber nehmen beide Körper einerlei Raum ein, und ſie ſind einander gleich (§. 21.).

§. 752.

Aus dem Bewieſenen iſt klar, daß ein dreiekkigtes Prisma, oder ein Parallelopipedum einem Cylinder, und überhaupt ein gleich dikker einem andern gleich dikken Körper gleich iſt (§. 440.), wenn nur beide einerlei Grundfläche, und einerlei Höhe haben, und es wird zu dieſer Gleichheit der gleich dikken Körper nicht erfordert, daß beide von einerlei Art, oder ſolche Körper ſind, die gleiche und ähnliche Grundflächen haben (§. 442. und 444.).

§. 753.

Weil auch der Würfel ein Prisma iſt (§. 440. 442. und 450.): So ſind auch alle Würfel, die einerlei Seite haben, einander gleich, und ſo auch umgewendet, und ein Prisma, oder ein Cylinder, der mit einem Würfel einerlei Grundfläche, und einerlei Höhe hat, iſt dieſem Würfel gleich.

§. 754.

Wenn man durch die Linien DF und AC eines Parallellopipedi ABCDGFE, Tab. XXVI. fig.

246, eine ebene Fläche leget (§. 420.): So wird daſſelbe in zwei gleiche Prismata ABCDGF, und AHCDFE geteilet, und es iſt alſo ein iedes dreiekkigtes Prisma die Hälfte von einem Parallelopipedo, das eine noch einmal ſo groſe Grundfläche, und die Höhe des Prismatis zu ſeiner Höhe hat. Denn die Diagonallinien AC und FD teilen die Parallelogramma ABCH und FGDE in zwei gleichgroſe Triangel (§. 632. und 633.), und die Prismata ABCDGF und AHCDFE ſtehen zwiſchen zwei parallellen ebenen Flächen ABCH und FGDE (§. 442. und 751.).

§. 755.

Wenn eine Pyramide ABCDE, Tab. XXVI. fig. 247, mit einer ebenen Fläche, aber parallel mit der Grundfläche ABCD, durchſchnitten wird: So iſt der Durchſchnitt abcd der Grundfläche ABCD ähnlich.

Beweis.

Wenn die Pyramide ABCDE mit einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche durchſchnitten wird: So iſt in den Triangeln ABE, ADE und EBD die Linie ab $\#$ AB, ad $\#$ AD, und db $\#$ DB (§. 729. und 748.). Weil alſo der $\triangle$ Eab $\backsim$ dem $\triangle$ EAB (§. 589.): So iſt Ea : ab = EA : AB

AB (§. 586.), und Ea: EA = ab: AB (§.233.), eben ſo iſt aber auch, da der △ Ead ∽ dem △ EAD (§. 589.), Ea: ad = EA: AD (§.586.), und Ea: EA = ad: AD (§. 233.), folglich ab: AB = ad: AD (§. 212.), und ab: ad = AB: AD (§.233.). Da der △ Ead ∽ dem △ EAD; So iſt Ed: da = ED: DA (§. 586.), und Ed: ED = da: DA (§ 233.): Und weil auch der △ Edb ∽ dem △ EDB (§. 589.); So iſt Ed: db = ED: DB (§. 586.), und Ed: ED = db: DB (§. 233.), folglich da: DA = db: DB (§. 212.), und da: db = DA: DB (§.233.). Da alſo in den Triangeln ABD und abd die Seiten proportional ſind: So iſt auch der ∠ bad = ∠ BAD, und wir haben alſo bewieſen, daß ab: ad = AB: AD, und der ∠ bad = ∠ BAD. Da nun auf eben die Art in den Triangeln abc und ABC, bcd und BCD, und acd und ACD erwieſen werden kan, daß ab: bc = AB: BC, und der ∠ b = ∠ B, bc: cd = BC: CD, und der ∠ c = ∠ C, und cd: da = CD: DA, und der ∠ d = ∠ D: So verhalten ſich auch die Seiten in der kleinen Figur abcd, wie die Seiten in der groſen Figur ABCD, und die Winkel in iener Figur ſind den Winkeln in dieſer Figur gleich, eben daher aber iſt die erſte Figur der lezteren Figur ähnlich (§. 581.), und es erſtreckt ſich dieſer Be-

weis auf alle Pyramiden, weil ſie alle auf dieſe Art zerſchnitten werden können.

§. 756.

Pyramiden, die gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen haben, nehmen einerlei körperlichen Raum ein, und ſind einander gleich.

Beweis.

Wenn die Triangel ABC und ABD, Tab. XXVI. fig. 248, die Seitenflächen der Pyramiden ſind, die auf einerlei Seite der Grundfläche ſtehen: So ſind ABC und ABD zwei Triangel die gleiche Grundlinien AB, und wenn man aus ihren Spizzen C und D auf die verlängerte Grundlinie AM die Perpendicularlinien CK und DM fället, auch gleiche Höhen CK und DM haben, CD aber iſt parallel AM (§. 409. 446. 527. und 544.). Ziehet man nun den Durchſchnitt FL mit AM parallel: So iſt CE = DL (§. 527. und 544.), und der Beweis dieſer. Weil der △ ABC ∽ dem △ CFG (§. 589.); So iſt CF : FG = CA : AB (§. 586.), und CF : CA = FG : AB (§. 233.): Und weil der △ AKC ∽ dem △ CFE (§. 589.); So iſt auch CF : CE = CA : CK (§. 586.), und CF : CA = CE : CK (§. 233.), eben daher aber iſt FG : AB = CE : CK (§. 212.). Da ferner aus eben dieſen Gründen DI : DB = IL :

BM,

BM, und DL: DM = IL: BM; So iſt auch DI: DB = DL: DM (§. 212.): Und weil noch aus dieſen Gründen DI: DB = HI: AB; So iſt auch HI: AB = DL: DM (§. 212.). Weil FG: AB = CE: CK, und DL = CE, DM aber = CK; So iſt auch FG: AB = DL: DM, und alſo HI: AB = FG: AB (§. 212.), und HI: FG = AB: AB (§. 233.), es iſt aber AB = AB (§. 27.), und daher iſt auch HI = FG (§. 217.). Da ſich nun dieſer Beweis, wenn man die Pyramiden, parallel mit der Grundfläche, mit einer ebenen Fläche durchſchneidet, auf alle Seitenflächen der Pyramide erſtrekt, und wegen der Aehnlichkeit der Durchſchnitte (§. 755.), auch die gleichnamigen Winkel in dieſen Figuren einander gleich ſind: So ſind die Durchſchnitte, die in einerlei Höhe mit der Grundfläche geſchehen, einander gleich (§. 499.). Nun ſind aber auch die Höhen der Pyramiden einander gleich, und daher können in der einen nicht mehrere parallele Durchſchnitte gemacht werden, als wie in der andern, eben darum aber nehmen ſie einerlei körperlichen Raum ein, und ſie ſind einander gleich.

§. 757.

Gedenkt man ſich, daß die Triangel ABC und ABD, Tab. XXVI. fig. 248, die Durch-

ſchnitte zweier Kegel ſind, welche dieſe Kegel in zwei gleiche Teilen teilen: So ſind auch die Durchſchnitte FG und HI einander gleich. Nun ſind aber dieſe Durchſchnitte die Diametri der Cirkelflächen, die entſtehen, wenn man dieſe Kegel parallel mit der Grundfläche durchſchneidet (§. 449.), und es verhalten ſich die Cirkelflächen, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 718.), und daher ſind auch alle Durchſchnitte, die in zwei gleich hohen Kegeln, die einerlei Grundfläche haben, parallel mit der Grundfläche geſchehen, einander gleich. Da nun, weil ſie einerlei Höhe haben, in einem nicht mehrere Durchſchnitte gemacht werden können, als wie in dem andern: So ſind auch die ganzen Kegel einander gleich.

§. 758.

Ein dreiekkigtes Prisma ABCDEF, Tab. XXVI. fig. 249, kan in drei gleiche Pyramiden geteilt werden.

Beweis.

Man ziehe die Linien FB, FC und BD: So bekomt man die Prismata ABCF, FDEB und BCDF. Da nun die Grundfläche ABC der Grundfläche DEF gleich iſt, beide aber einander parallel ſind, und alſo die Pyramiden ABCF und DEFB gleiche Höhe haben (§. 440. und 442.); So ſind auch dieſe Pyramiden einander gleich (§. 756.).

Weil

Weil ferner der △ BCD = dem △ DBE (§. 632. und 633.), und die Spizzen der Pyramiden BCDF und BDEF in einem Punkt F zuſammen kommen, folglich beide Pyramiden gleich hoch ſind: So ſind auch dieſe Pyramiden einander gleich (§. 756.). Es iſt alſo die Pyramide ABCF der Pyramide EDFB, und die Pyramide BCDF der Pyramide EDFB gleich, und daher iſt auch die Pyramide ABCF der Pyramide BCDF, und alſo alle drei Pyramiden ABCF, DEFB und BCDF gleich (§. 39.), dieſemnach aber kan das dreiekkigte Prisma in drei gleich groſe Pyramiden geteilt werden.

§. 759.

Es iſt alſo, weil ſich über einem ieden Dreiek eine Pyramide, und ein Prisma von gleicher Höhe aufrichten läſt, die dreiekkigte Pyramide der dritte Teil von einem dreiekkigten Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche, und gleiche Höhe hat. Weil nun eine iede geradlinigte Figur, die mehr, als drei Seiten hat, durch Diagonallinien in Triangel zerteilet werden kan (§. 434.); So iſt auch eine iede Pyramide ABEF, BDEF und BCDF, Tab. XXVI. fig. 250, die zuſammen eine vielſeitige Pyramide ausmachen, der dritte Teil von dem dreiekkigten Prismate, das mit ihr einerlei Grundfläche, und einerlei Höhe hat (§. 758.): Und da alle dieſe

Pyramiden die Pyramide ABCDEF ausmachen; So iſt auch eine iede vielekkigte Pyramide, deren Grundfläche mehr als drei Seiten hat (§. 446.), der dritte Teil von einem Prisma, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 760.

Weil der Cirkel als ein Vielek von unzählig vielen Seiten angeſehen werden kan (§. 707. Bew.): So iſt auch der Kegel eine vielekkigte Pyramide von unzählig vielen Seiten, und der Cylinder ein Prisma von unzählig vielen Seiten, eben daher aber iſt der Kegel der dritte Teil von einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat (§. 759.).

§. 761.

Da das Maas und die zu meſſende Gröſe Dinge von einerlei Art ſein müſſen (§. 38. und 463.): So muß man auch zu der Ausmeſſung der Körper (§. 438.), einen Maasſtaab annehmen, welcher ein Körper iſt (§. 462.). Weil man nun ein Quadrat, das eine Ruthe lang, und breit iſt, zu dem Maasſtaab der Flächen angenommen hat (§. 650. und 651.), und der Raum eines Körpers heraus komt, wenn man ſeine Grundfläche mit der Höhe multipliciret, der Würfel aber unter allen Körpern der regulärſte und bequemſte iſt (§. 441. 450. und 753.).

So hat man auch einen Würfel, deſſen Seite eine Ruthe lang iſt, zu dem Maasſtaab der Körper erwählet.

§. 762.

Es iſt alſo eine Cubikruthe eine Ruthe lang, breit, und hoch: Und weil die Ruthe in Schuhe, Zolle, Linien, Scrupel, zweite Scrupel, und ſo weiter geteilt wird (§. 466.); So iſt der Cubikſchuh ein Schuh lang, breit, und hoch, der Cubikzoll ein Zoll lang, breit, und hoch, die Cubiklinie eine Linie lang, breit, und hoch, der Cubikſcrupel ein Scrupel lang, breit, und hoch, der zweite Cubikſcrupel ein zweiter Scrupel lang, breit, und hoch, und ſo weiter.

§. 763.

Findet man alſo, wie viele Cubikruthen, Cubikſchuhe, Cubikzolle u. ſ. w., in einem gegebenen Körper Raum haben: So miſſet man denſelben aus, und die Anzahl dieſer Cubikruthen, Schuhe, Zolle, Linien u. ſ. w., heiſt der körperliche Inhalt, oder nur ſchlechtweg der Inhalt des Körpers.

§. 764.

Den Inhalt eines Würfels zu finden.

Auflöſung.

1) Man meſſe die Seite AB des Würfels, Tab. XXVI. fig. 251, und multiplicire dieſe mit ſich ſelbſt, ſo bekomt man die Grundfläche des Würfels (§. 653.).

2) Man multiplicire das herausgekommene Product noch einmal mit der Seite AB des Würfels: So iſt dieſes Product der geſuchte körperliche Inhalt des Würfels.

Beweis.

Wenn man alle Seiten eines Würfels, in Ruthen, Schuhe, oder Zolle einteilet, und von einem Punkt bis zu dem andern Linien ziehet; So müſſen auf der Grundfläche des Würfels, weil AB der gegenüberſtehenden Seite gleich iſt, in einer Reihe, die neben der Linie AB liegt, ſo viele kleine Würfel von dieſer Teilung Raum haben, als wie in der andern: Und weil BC = AB, und der gegenüberſtehenden Seite gleich iſt (§. 450.); So müſſen auch ſo viele Reihen von dieſen kleinen Würfeln neben einander liegen, als wie viele kleine Würfel auf der Seite AB neben einander Raum haben. Wenn man dieſemnach AB mit ſich ſelbſt multiplicirt: So bekomt man das Quadrat der Grundfläche (§. 253.), und die Anzahl der kleinen Würfel, die auf dieſer Grundfläche Raum haben, folglich die erſte Schicht. Nun ſind aber alle Durchſchnitte, welche über den

Schichten in dem Würfel parallel mit der Grundfläche geſchehen, einander gleich (§. 440. 442. und 450.), und derohalben liegen auch in einer Schicht ſo viele kleine Würfel, als wie in der andern. Weil nun AB = BG (§. 450.): So liegen auch ſo viele Schichten über einander, als wie viele kleine Würfel in der Seite AB neben einander ſtehen können. Wenn man daher AB mit ſich ſelbſt, und das Product, welches heraus komt, noch einmal mit AB, und alſo die Seite des Würfels zweimal mit ſich ſelbſt multipliciret: So iſt dieſes Product der körperliche Inhalt des Würfels.

Exempel.

Es ſei die Seite eines Würfels = $\overset{0}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{4}$

$$
\begin{array}{r}
\overset{0}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{4} \\
234 \\
\hline
936 \\
702 \\
468 \\
\hline
\end{array}
$$

So iſt die Grundfläche des Würfels = $\overset{0}{5},4\overset{I}{7},5\overset{II}{6}$

$$
\begin{array}{r}
\overset{0}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{4} \\
\hline
219024 \\
164268 \\
109512 \\
\hline
\end{array}
$$

und der Inhalt des Würfels = $1\overset{0}{2},81\overset{I}{2},90\overset{II}{4}$

§. 765.

Weil man alſo den körperlichen Inhalt eines Würfels findet, wenn man ſeine Seite zweimal mit ſich ſelbſt multiplicirt, und in dem Längenmaas die Ruthe 10 Schuhe, der Schuh 10 Zolle, der Zoll 10 Linien, die Linie 10 Scrupel, und der Scrupel 10 Zweiteſcrupel hat (§. 466.): So hat auch in dem körperlichen Maas eine Cubikruthe ABCDGFE, Tab. XXVI. fig. 251, 1000 Cubikſchuhe, ein Cubikſchuh 1000 Cubikzolle, ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien, eine Cubiklinie 1000 Cubikſcrupel, ein Cubikſcrupel 1000 Cubikzweiteſcrupel u. ſ. w. (§. 762.)

§. 766.

Dieſemnach hat eine Cubikruthe 1000 Cubikſchuhe, oder 1000000 Cubikzolle, oder 1000000000 Cubiklinien, oder 1000000000000 Cubikſcrupel, oder 1000000000000000 Cubikzweiteſcrupel u. ſ. w. (§. 466.).

§. 767.

Da 1000 Dinge von der kleineren ein Ding in der gröſeren Art ausmachen (§. 60. und 765.): So ſind auch, wenn man das körperliche Maas in Zahlen ausdrukt, ſtets in der vierten Stelle von der rechten nach der linken Hand zu Dinge enthalten, welche tauſendmal mehr gelten, folglich Dinge von einer gröſeren Art, und es machen von der Rechten nach

der Linken 1000 Cubikzweiteſcrupel einen Cubikſcrupel, 1000 Cubikſcrupel eine Cubiklinie, 1000 Cubiklinien einen Cubikzoll, 1000 Cubikzolle einen Cubikſchuh, und 1000 Cubikſchuhe eine Cubikruthe (§. 66.).

§. 768.

Iſt dieſes: So muß man auch bei einer Zahl in dem körperlichen Maas, wenn man die Dinge von der kleineren in Dinge von der gröſeren Art verwandeln will (§. 60.), von der rechten nach der linken Hand zu ſtets drei Zahlen vor die kleinere Dinge annehmen, und damit ſo lang fortfahren, bis man von den gegebenen kleineren Dingen an die Ruthen komt. Wenn alſo eine Zahl aus Cubiklinien beſtehet: So muß man drei Zahlen vor die Cubiklinien, drei Zahlen vor die Cubikzolle, und noch drei Zahlen vor die Cubikſchuhe annehmen; So ſind die Zahlen, welche zur linken Hand übrig bleiben, Cubikruthen. Man unterſcheidet dieſe drei Zahlen durch einen Punkt, oder ein Comma, und ſchreibt über die rechte Zahl in ieder Klaſſe die Kennziffern der Decimalbrüche, die leeren Stellen aber fült man mit 0 aus (§. 156. 162. und 467.). Dieſemnach werden 5603456789 Cubiklinien ſo bezeichnet: $\overset{0}{5},\ 60\overset{I}{3},\ 45\overset{II}{6},\ 78\overset{III}{9}$, und es begreift die gegebene Zahl in ſich 5 Cubikruthen, 603 Cubikſchuhe, 456 Cubikzolle, und 789 Cubik-

linien: Und wenn man ein gegebenes Körpermaas in kleinere Dinge verwandeln ſoll; So geſchiehet dieſes, wenn man ſo lang drei Nulle anhängt, bis man die Stelle der verlangten kleineren Dinge bekomt. Es werden alſo $\overset{\circ}{5}$ in Schuhe verwandelt, wenn man drei o anhängt, da man $300\overset{\prime}{0}$ bekomt, in Zolle werden hingegen $\overset{\circ}{5}$ verwandelt, wenn man drei o vor die Schuhe, und noch drei o vor die Zolle anhängt, in welchem Fall man $300000\overset{\prime\prime}{0}$ bekomt u. ſ. w.

§. 769.

Wenn man bei dieſer Ausmeſſung der Körper durch kleine Würfel, und der Einteilung dieſes Maaſes Quadratmaas mit Längenmaas multipliciren ſoll; So muß man den Factor, welcher Dinge von der gröſeren Art enthält, durch die Anhängung ein, oder etlicher Nulle zu der Kennziffer erheben, die der Factor hat, welcher kleinere Dinge in ſich begreift: Denn die Seiten des Würfels müſſen mit einem Maas von einerlei Einheiten gemeſſen werden, wenn man den körperlichen Inhalt finden will (§. 104. und 763.). So muß man zum Beiſpiel den Factor $\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{4}$ in $\overset{\circ}{2}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{0}$ verwandeln, wenn der andere Factor $\overset{\circ}{3},4\overset{\prime}{4},5\overset{\prime\prime}{2}$ iſt, eben ſo muß man auch den Factor $\overset{\circ}{2},5\overset{\prime}{1}$ in $\overset{\circ}{2},5\overset{\prime}{1},0\overset{\prime\prime}{0}$ verwandeln, wenn der andere Factor $\overset{\circ}{3}\overset{\prime}{1}\overset{\prime\prime}{2}$ iſt (§. 466.):

Auch muß man, wenn man Långenmaas in Kårpermaas dividiren ſoll, dem erſteren ſtets eine, dem lezteren aber drei Nulle anhången, und dadurch beide zu gleichen Kennziffern erheben, oder wenn man Flåchenmaas in Kårpermaas dividiren ſoll, ſo muß man dieſem, wie vorhin, drei, dem erſteren aber zwei o anhången (§. 658.), wenn beide ungleiche Kennziffern haben. Und wenn bei dieſer Diviſion ein Reſt übrig bleibet: So muß man, um noch kleinere Dinge zu bekommen, drei o an den Dividendum, und bei dem Långenmaas eine, bei dem Flåchenmaas aber zwei o an den Diviſor, oder, weil gleiche Nulle im Dividendo und dem Diviſor einander aufheben, nur zwei Nulle an den Dividendum, und keine an den Diviſor hången, wenn dieſer aus Långenmaas beſtehet, hingegen aber nur eine Null an den Dividendum, und keine an den Diviſor, wenn der leztere Flåchenmaas enthålt. Ueberhaupt muß man auch bemerken, daß Flåchenmaas mit Långenmaas multiplicirt Kårpermaas, und Långenmaas in Kårpermaas dividirt Flåchenmaas, Kårpermaas durch Flåchenmaas aber dividirt Långenmaas gibt (§. 107). Wenn man hingegen Kårpermaas mit genanten Zahlen multiplicirt, oder dividirt (§. 60.): So bekomt man in beiden Fållen Kårpermaas (§. 104. und 108.).

§. 770.

§. 770.

Man teilt die Cubikruthe auch in Schachtruthen, wovon eine 10 Fus lang, 10 Fus breit, und 1 Fus hoch iſt, die Schachtruthe aber in Balkenruthen, deren eine 10 Fus lang, und 1 Fus breit, und hoch iſt, eben ſo teilt man den Cubikſchuh in Schachtſchuhe, wovon einer 10 Zoll lang, 10 Zoll breit, und 1 Zoll hoch iſt, den Schachtſchuh aber in Balkenſchuhe, deren einer 10 Zoll lang, und 1 Zoll breit, und hoch iſt, u. ſ. w. Es macht alſo eine Schachtruthe 100 Cubikſchuhe, eine Balkenruthe aber 10 Cubikſchuhe, und ein Schachtſchuh 100 Cubikzolle, ein Balkenſchuh aber 10 Cubikzolle, u. ſ. w., 1000 Cubikſchuhe, oder eine Cubikruthe aber 10 Schachtruthen, und eine Schachtruthe 10 Balkenruthen, 1000 Cubikzolle, oder ein Cubikſchuh hingegen 10 Schachtſchuhe, und ein Schachtſchuh 10 Balkenſchuhe aus (§. 767.), u. ſ. w. Wenn man daher dieſes Flächenmaas in Zahlen ausdrukt: So bedeuten ſtets in der zweiten Stelle von der rechten nach der linken Hand zu die Zahlen ſchon Dinge von einer gröſeren Art, und ſie ſind zehnteilige Brüche (§. 154.). Man kan alſo dieſe Zahlen mit den Kennziffern der zehnteiligen Brüche bezeichnen (§. 156.), und es iſt, wenn man $\overset{0}{2},2\overset{|}{1}$ mit $\overset{0}{2}$ multipliciren ſoll, und $\overset{0}{2}$ in $\overset{0}{2}\overset{|}{0}$ verwandelt hat (§. 769.) einerlei, ob

man

man das Product 4420 ſo ſchreibt $\overset{\circ}{4},42\overset{I}{0}$ (§.768.), oder, wenn man $\overset{\circ}{2}\overset{I}{2}\overset{II}{1}$ mit $\overset{\circ}{2}\overset{I}{0}$ multiplicirt (§.659.), ſo $\overset{\circ}{4}\overset{I}{4}\overset{II}{2}\overset{III}{0}$ (§.160.), eben die leztere 4 Cubikruthen, 4 Schachtruthen, und 2 Balkenruthen kommen aber auch heraus, wenn man $\overset{\circ}{2}\overset{I}{2}\overset{II}{1}$ (§.659.) mit $\overset{\circ}{2}$ multiplicirt, und das Product von der rechten nach der linken Hand zu mit II zu bezeichnen anfängt, nemlich $\overset{\circ}{4}\overset{I}{4}\overset{II}{2}$ (§.160.). Eben ſo bekomt man, wenn man $\overset{\circ}{2},1\overset{I}{2}$ mit $\overset{\circ}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{2}$ multipliciren ſoll, und $\overset{\circ}{2},1\overset{I}{2}$ in $\overset{\circ}{2}\overset{I}{1}\overset{II}{2}00$ verwandelt (§.769.), $\overset{\circ}{4},9\overset{I}{1}8,40\overset{II}{0}$, oder wenn man $\overset{\circ}{2}\overset{I}{1}\overset{II}{2}\overset{III}{0}\overset{IIII}{0}$ mit $\overset{\circ}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{2}$ multiplicirt $\overset{\circ}{4}\overset{I}{9}\overset{II}{1}\overset{III}{8}\overset{IIII}{4}\overset{V}{0}\overset{VI}{0}$ (§.160.), und eben dieſe 4 Cubikruthen, 9 Schachtruthen, 1 Balkenruthe, 8 Cubikſchuhe, und 4 Schachtſchuhe, bekomt man, wenn man $\overset{\circ}{2}\overset{I}{1}\overset{II}{2}$ (§.659.) mit $\overset{\circ}{2}\overset{I}{3}\overset{II}{2}$ multiplicirt, und das Product von der rechten nach der linken Hand zu mit IIII zu bezeichnen anfängt, nemlich $\overset{\circ}{4}\overset{I}{9}\overset{II}{1}\overset{III}{8}\overset{IIII}{4}$ (§.160.).

§. 771.

Weil der Inhalt des Würfels heraus komt, wenn man ſeine Seite zweimal mit ſich ſelbſt multiplicirt (§.764.), und die zwölfſchůhige Ruthe in ſtets 12 kleinere Teile geteilt wird (§.468.): So machen auch bei dieſer ſtets 1728 kleinere Dinge ein nechſt

gröſeres aus, und ſo verhält es ſich auch bei der ſechszehnſchühigen Ruthe, nur daß 4096 Cubikfus eine Cubikruthe machen. Soll man alſo gröſere Dinge in kleinere verwandeln; ſo multiplicire man dieſelbe mit 1728: Soll man hingegen umgewendet kleinere Dinge in gröſere verwandeln; So dividire man ſie durch 1728 (§. 104. und 108.), und nur bei der ſechszehnſchühigen Ruthe multiplicire man die Cubikruthen mit 4096, wenn man Cubikſchuhe, hingegen dividire man Cubikſchuhe durch 4096, wenn man Cubikruthen haben will.

§. 772.

Es enthält dieſemnach die zwölfſchühige Cubikruthe 1728 Cubikſchuhe, oder 2985984 Cubikzolle, oder 5159780352 Cubiklinien, oder 8916100448256 Cubikſcrupel, die ſechszehnſchühige Ruthe hingegen 4096 Cubikſchuhe, oder 7077888 Cubikzolle, oder 12230690464 Cubiklinien, oder 21134633121792 Cubikſcrupel u. ſ. w. (§. 468.).

§. 773.

Soll man in dem zwölf- und ſechszehnſchühigen Maas Flächenmaas mit Längenmaas multipliciren, oder Flächenmaas in Körpermaas, oder Längenmaas in Körpermaas dividiren: So muß man dieſe Maaſen auf einerlei Art bringen (§. 104. 107. 108. 662. 769. und 771.).

§. 774.

Wenn man Decimalcubikmaas in gemeines zwölfſchühiges Cubikmaas verwandeln will: So laſſe man die Cubikruthen, weil ſie in einem Maas ſo gros ſind, als wie in dem andern, aus der Rechnung (§. 466. und 468.), und ſuche, wenn das erſtere Maas Cubikſchuhe hält, zu 1000, 1728, und dem gegebenen Maas die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240. 766. und 772.). Soll man hingegen zwölfſchühiges Körpermaas in Decimalkörpermaas verwandeln: So ſuche man, wenn Schuhe gegeben ſind, zu 1728, 1000, und dem gegebenen Maas, wobei man die Cubikruthen ebenwol weg läſt, die vierte geometriſche Proportionalzahl. Wenn Zolle gegeben ſind: So bringe man die Zolle von den beiden Maaſen, die eine Cubikruthe ausmachen, in die erſte Verhältnis, und ſo die Linien, wenn Linien gegeben ſind, u. ſ. w. (§. 766. und 772.). So nun verfahre man auch, wenn man Decimalcubikmaas in ſechszehnſchühiges Cubikmaas, oder dieſes in jenes verwandeln ſoll, man muß inzwiſchen bei dem gegebenen zwölf- und ſechszehnſchühigen Cubikmaas, das man in Decimalmaas verwandeln ſoll, merken, daß man erſt alles in kleinere Arten auflöſen muß (§. 104. und 771.): Denn wenn man 4^{0}, 1052^{I}, 105^{II} zwölfſchühiges Cubikmaas hat, das man verwandeln ſoll; So

ſind dieſes, wenn man $\overset{0}{4}$ weg läſt, und $\overset{I}{1052}$ mit 1728 multipliciret, dazu aber $\overset{II}{105}$ addirt, $\overset{II}{1817961}$: Und wenn man in dem ſechszehnſchůhigen Cubikmaas $\overset{0}{12}$, $\overset{I}{124}$, $\overset{II}{1603}$ hat, die man verwandeln ſoll, ſo ſind dieſes, wenn man die Ruthe weg läſt, und $\overset{I}{124}$ mit 1728 multiplicirt, und dazu $\overset{II}{1603}$ addirt, $\overset{II}{215875}$, und dieſe Zahlen kommen in die Rechnung, und die Stelle des dritten Glieds (§. 771.).

§. 775.

Weis man die Verhältnis zweier Cubikruthen, oder zweier Cubikſchuhe, die nach verſchiedenen Längenmaaſen gemeſſen worden: So kan man auch leicht ein Körpermaas in das andere verwandeln. Wir nehmen an, es habe der eine Schuh 1000 Teile, der andere aber 900 ſolcher Teile, und die Ruthe von ienen Füſen 16, von dieſen aber 12 Schuhe: So verhalten ſich die Schuhe, wie 1000: 900, und die Ruthen wie 1000.16:900.12, das iſt, wie 16000 : 10800. Wenn man daher 1000, und auch 900 in den Cubum erhebt; So verhalten ſich die gemeine Cubikſchuhe von der ſechszehenſchůhigen und zwölfſchůhigen Ruthe zu einander, wie 1000000000 : 729000000, oder wenn man beiderſeits mit 1000000 dividirt, wie 1000: 729 (§. 216.), eben ſo verhalten ſich aber auch die gemeine Cubikzolle, Cubiklinien u. ſ. w. (§. 468.): Und erhebt

erhebt man 16000, und auch 10800 in den Cubum; So verhalten ſich die gemeine und Decimalcubikruthen von dem ſechszehnſchůhigen und dem zwölfſchůhigen Maas, wie 4096000000000 : 1259712000000, oder wenn man beiderſeits mit 1000000 dividirt, wie 4096000 : 1259712 (§. 216.). Eben ſo verhalten ſich aber auch die Decimalcubikſchuhe, Decimalcubikzolle, Decimalcubiklinien u. ſ. w., weil bei einem, wie bei dem andern Långenmaas die Ruthe in 10 ſtets kleinere Teile geteilt wird (§. 216. 466. u. 664.). Wenn man dieſemnach 25 Cubikruthen, die nach dem ſechszehnſchůhigen Maas gemeſſen worden, in Cubikruthen verwandeln ſoll, die zwölfſchůhiges Maas haben: So kehre man, weil das leztere Maas kleiner iſt, als wie das erſtere, die Verhåltnis der Cubikruthen um, und ſuche zu 1259712, 4096000, und 25 die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.). Sind an einer Ruthe ſo viel Schuhe, wie an der andern, und der erſtere hålt 1000 Teile, der andere aber 900 ſolcher Teile: So verhalten ſich auch die Cubikruthen wie die Cubikſchuhe, und wie 1000 : 729 (§. 215. und 468.).

§. 776.

Den kôrperlichen Inhalt eines Parallelopipedi zu finden.

Aufloſung.

1) Man multiplicire die Långe der Grundflåche

AB, Tab. XXVI. fig. 252., mit der Breite BC, ſo bekomt man die Grundfläche (§. 665.).

2) Das Product, welches hierbei herauskomt, multiplicire man mit der Höhe BG: So iſt dieſes Product der verlangte Inhalt des Parallelopipedi ABCDGFE.

Beweis.

Wenn man alle Seiten des Parallelopipedi in Ruthen, oder Schuhe, oder Zolle einteilet, und von einem Teilungspunkt bis zu dem andern Linien ziehet; So haben, da AB der gegenüber ſtehenden Seite gleich iſt, in einer Reihe, die neben AB liegt, nicht mehrere kleine Würfel von dieſer Teilung neben einander Raum, als wie in der andern: Und weil BC der gegenüber ſtehenden Seite gleich iſt (§. 433.); So liegen auch in BC nicht mehrere Reihen, als wie in der gegenüber ſtehenden Seite, und es müſſen ſo viele Reihen neben einander liegen, als wie viele kleine Würfel in BC neben einander Raum haben. Wenn man daher AB mit BC multiplicirt; So bekomt man die Grundfläche ABC (§. 665), und die Anzahl der kleinen Würfel, die auf der Grundfläche Raum haben, folglich die erſte Schicht. Es ſind aber alle Durchſchnitte, die mit der Grundfläche parallel geſchehen, einander gleich (§. 440. und 442.), und daher müſſen auch in einer Schicht ſo viele Würfel über einander liegen, als wie in der andern, ſo viele Schich-

Schichten aber über einander, als wie viele kleine Würfel in der Höhe BG über einander geſtelt werden können. Wenn man demnach AB mit BC, und das Product, welches heraus komt, mit BG multiplicirt: So iſt dieſes Product der körperliche Inhalt des Parallelopipedi.

Exempel.

Es ſei AB	=	$\overset{0}{2}\overset{1}{4}$
und BC	=	$\overset{0}{2}\overset{1}{1}$
		24
		48
So iſt die Grundfläche ABC	=	$\overset{0}{5},0\overset{1}{4}$
Nun ſei BG	=	$\overset{0}{3}\overset{1}{5}$
		2520
		1512
So iſt der Inhalt des Parallelopipedi ABCDGFE	=	$1,\overset{0}{7},6\overset{1}{4}0$

Wenn das Parallelopipedum ABCDEFG ſchief iſt, Tab. XXVI. fig. 253: So fälle man aus einem Punkt E in der oberen Fläche auf die Ebene, worauf dieſer Körper ſtehet, die Perpendicularlinie

EH, und multiplicire ſeine Grundfläche in dieſe Höhe, ſo bekomt man ſeinen Inhalt (§. 442. und 751.).

§. 777.

Den Inhalt eines dreiekkigten Prismatis zu finden.

Auflöſung.

Man multiplicire die Grundfläche ABC, Tab. XXVI. fig. 246, durch die Höhe BG: So iſt das Product der körperliche Inhalt des Prisma ABCDGF.

Beweis.

Der Triangel ABC iſt die Hälfte von dem Parallelogrammo ABCH (§. 632. und 633.). Wenn man daher den Triangel ABC mit der Höhe BG multiplicirt: So bekomt man den Inhalt des halben Parallelopipedi ABCHEFGD (§. 776.), und folglich den Inhalt des dreiekkigten Prismatis ABCDGF (§. 754.).

Exempel.

Es ſei $AC = \overset{0}{2}\overset{I}{3}$, $IB = \overset{0}{1}\overset{I}{2}\overset{II}{3}$, und $BG = \overset{0}{6}\overset{I}{2}\overset{II}{4}$: So iſt die Rechnung dieſe.

$$
\begin{array}{rr}
AC = & \overset{0}{2}\,\overset{I}{3}\,\overset{II}{0} \\
IC = & \overset{0}{1}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{3} \\
\hline
 & 690 \\
 & 460 \\
 & 230 \\
\hline
 & \overset{0}{2},8\,\overset{I}{2},9\,\overset{II}{0}
\end{array}
$$

2)

So iſt der Inhalt der Grundfläche

$$
\begin{array}{lrr}
ABC & = & \overset{0}{1},4\,\overset{I}{1},4\,\overset{II}{5} \\
BG & = & \overset{0}{6}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{4} \\
\hline
 & & 56580 \\
 & & 28290 \\
 & & 84870 \\
\hline
\end{array}
$$

So iſt der Inhalt des Priſma

$$ABCDGF = \overset{0}{8},8\,2\,\overset{I}{6},4\,8\,\overset{II}{0}$$

Iſt das Priſma nicht ſenkrecht: So muß man, wie bei dem ſchiefen Parallelopipedo, eine Perpendicularlinie fällen (§. 776.), damit man ſeine Höhe bekomt.

§. 778.

Den Inhalt eines ieden vielekkigten Prismatis zu finden.

Aufloͤſung.

Man multiplicire die Grundflaͤche ABCDE, Tab. XXVII. fig. 254, mit der Hoͤhe BH: So iſt das Product der koͤrperliche Inhalt des Prisma ABCDEFGHIK.

Beweis.

Wenn man die Grundflaͤchen ABCDE und GHIKF durch Diagonallinien in Triangel zerteilet, ſo daß man dieſe Diagonallinien in beiden Flaͤchen aus einerlei Puncten ziehet: So ſind die △ ABE und FGH, BDE und HKF, und BCD und HIK einander gleich (§. 442. 503. und 507.), und es wird, wenn man durch FH und BE, und BD und KH die Diagonalflaͤchen BEFH und BDKH legt, das Prisma ABCDEFGHIK in ſo viele dreiekkigte Prismata ABEFGH, BDEFHK und BCDKHI geteilet, als die Grundflaͤche Triangel hat. Wenn man daher die Grundflaͤchen der dreiekkigten Prismatum ABE, BDE und BCD mit der Hoͤhe BH multiplicirt (§. 777.): So bekomt man den Inhalt des Prisma ABCDEFGHIK, eben dieſen Inhalt aber bekomt man auf einmal, wenn man die ganze Grundflaͤche ABCDE mit der Hoͤhe BH multipliciret.

Exempel.

$$\tfrac{1}{2}\,BE = \overset{0}{2}\,\overset{I}{2}$$

$$AL = \overset{0}{1}\,\overset{I}{8}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ 22 \\ \hline \end{array}$$

So iſt der $\triangle ABE = \overset{0}{3},\overset{I}{9}6$

$$\tfrac{1}{2}\,BE = \overset{0}{2}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{0}$$

$$DM = \overset{0}{1}\,\overset{I}{8}\,\overset{II}{6}$$

$$\begin{array}{r} 1320 \\ 1760 \\ 220 \\ \hline \end{array}$$

So iſt der $\triangle BDE = \overset{0}{4},0\overset{I}{9},2\overset{II}{0}$

$$\tfrac{1}{2}\,BD = \overset{0}{2}\,\overset{I}{3}\,\overset{II}{2}$$

$$CN = \overset{0}{1}\,\overset{I}{8}\,\overset{II}{0}$$

$$\begin{array}{r} 18560 \\ 232 \\ \hline \end{array}$$

So iſt der $\triangle BCD = \overset{0}{4},1\overset{I}{7},6\overset{II}{0}$

Da der $\triangle ABE = \overset{0}{3},9\overset{I}{6},0\overset{II}{0}$

= = $BDE = 4,09,20$

und = = $BCD = 4,17,60$

So iſt die Grundfläche $ABCDE = 1\overset{0}{2},2\overset{I}{2},8\overset{II}{0}$

Nun ſei die Höhe BH = $\overset{\circ}{5}\,\overset{\prime}{3}\,\overset{\prime\prime}{0}$

3668	400
611	400

So iſt das Prisma ABCDE

FGHIK = $6\overset{\circ}{4},8\,0\overset{\prime}{8},4\,0\,\overset{\prime\prime}{0}$

Auch hier fälle man, um die Höhe zu bekommen, wie bei dem ſchiefen Parallelopipedo eine Perpendicularlinie, wenn das Prisma ſchief iſt (§. 776.).

§. 779.

Aus dem gegebenen Diameter, und der Höhe eines Cylinders den körperlichen Inhalt dieſes Cylinders zu finden.

Auflöſung.

Man rechne die Grundfläche des Cylinders aus (§. 723.), und multiplicire dieſe mit der Höhe: So bekomt man den körperlichen Inhalt des Cylinders.

Beweis.

Weil der Cylinder ein Prisma von unzählig vielen Seiten iſt (§. 760.), und der Inhalt des Prisma heraus komt, wenn man ſeine Grundfläche mit der Höhe multipliciret (§. 778.): So bekomt man auch den körperlichen Inhalt des Cylinders, wenn man ſeine Grundfläche mit der Höhe multipliciret.

Exem-

Exempel.

Es ſei der Diameter eines Cylinders $\overset{0}{4}\overset{I}{4}$, und die Höhe $\overset{0}{6}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{5}$. So rechnen wir ſo.

```
100 : 314 = 44
             44
        ------------
        1256
       1256
       ------------
        0 I II III
       13816
              0 I II III
              1 100 = ¼ des Diameters
       ------------
       1381600
      13816
       ------------
       0  I  II  III
      15,19,76,00 = der Grundfläche
               0 I II III
               6 2 5 0 = der Höhe des Cylinders
       ------------
      759880000
     30395200
    91185600
  ----------------
      0   I   II  III
    94,985,000,000 = dem Inhalt des Cylinders
```

Iſt der Cylinder ſchief: So fälle man, wie bei dem ſchiefen Parallelopipedo, eine Perpendicularlinie, um die Höhe zu bekommen (§. 776.).

Den Inhalt von der Dikke eines hohlen Cylinders findet man, wenn man den Cylinder, der die Höhlung ausmacht, von dem ganzen Cylinder abziehet, oder wenn man den Ring, welcher die Dikke des

des hohlen Cylinders iſt, ausrechnet (§. 727.), und dieſen mit der Höhe des Cylinders multipliciret.

§. 780.

Aus dem 776. 777. 778. und 779. §. iſt klar, daß man den körperlichen Inhalt eines Priſma und Cylinders, und überhaupt eines gleichdikken Körpers findet (§. 440.), wenn man ſeine Grundfläche mit der Höhe multipliciret. Wenn man daher den Inhalt dieſer Körper durch die Höhe dividiret: So bekomt man die Grundfläche, hingegen aber die Höhe, wenn man die Grundfläche in ienen Inhalt dividiret (§. 107.).

Exempel.

Es ſei der körperliche Inhalt 94°,985′, die Höhe des Körpers 6°2′5″, und die Grundfläche deſſelben 15°,19′,76″; So iſt die Rechnung dieſe:

```
    4 3
    5 4 1
  6 7 7 7
 1 2 1 2 1 3
3 2 4 3 0 5 5
9 4 9 8 5 0 0 0 | 15°,19′,76″ = der Grundfläche
6 2 5 5 5 5 5 5 |    des Körpers (§. 769.).
 6 2 2 2 2 2
   6 6 6 6
```

```
    54
    69
   2763
   7918
  180903
 3334348 |
94985000 |
15197666 |
  151977
   1519
```

$\overset{0}{6}\,\overset{I}{2}\,\overset{II}{5}$ = der Höhe des Körpers (§. 769.).

§. 781.

Wenn Prismata, und Cylinder, und überhaupt gleich dikke Körper gleiche Grundflächen haben, ſo verhalten ſie ſich in ihren Inhälten wie ihre Höhen, hingegen aber wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind.

Beweis.

Wenn man die Grundfläche dieſer Körper mit ihrer Höhe multipliciret: So bekomt man ihren körperlichen Inhalt (§. 780.). Sind daher ihre Grundflächen gleich; So werden die Höhen durch eine dritte Zahl, die Grundfläche, multiplicirt: Und ſind ihre Höhen gleich; So werden die Grundflächen durch eine dritte Zahl, die Höhe, multiplicirt, eben daher aber verhalten ſich dieſe Körper, wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, hingegen aber wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind (§. 215.). Wenn zum Beiſpiel die Grundfläche des einen, wie das andere Prisma $\overset{0}{4}$, und

die

die Höhe des einen $\overset{\circ}{2}$, die Höhe des andern aber $\overset{\circ}{3}$ iſt; So iſt der Inhalt des erſten $\overset{\circ}{8}$, und der Inhalt des andern $\overset{\circ}{12}$, und es verhält ſich 8 : 12 = 2 : 3: Iſt hingegen die Grundfläche des einen $\overset{\circ}{2}$, und die Grundfläche des andern $\overset{\circ}{6}$, ihre gemeinſchaftliche Höhe aber $\overset{\circ}{4}$; So iſt der Inhalt des erſten $\overset{\circ}{8}$, und der Inhalt des andern $\overset{\circ}{24}$, und es verhält ſich 8 : 24 = 2 : 6.

§. 782.

Weil ſich die Cylinder, die gleiche Höhen haben, wie ihre Grundflächen (§. 781.), und die Cirkelflächen zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 718.): So müſſen ſich auch die Cylinder, die gleiche Höhe haben, zu einander verhalten, wie die Quadrate der Diametrorum ihrer Grundflächen. Ein Cylinder und ein Würfel, die gleich dik ſind, und einerlei Höhe haben, verhalten ſich hingegen, wie 785 : 1000. Denn ſie haben einerlei Höhe, und darum müſſen ſie ſich wie ihre Grundflächen verhalten (§. 781.), dieſe aber verhalten ſich wie 785 : 1000 (§. 442. und 717.).

§. 783.

Den Inhalt einer Pyramide zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

Weil eine iede Pyramide der dritte Teil von einem Prisma iſt, das mit ihm gleiche Grundfläche, und Höhe hat (§. 759.); So multiplicire man die Grundfläche mit der Höhe (§. 777. und 778.), und dividire das Product durch 3: Oder man multiplicire die Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, oder $\frac{1}{3}$ der Grundfläche mit der ganzen Höhe der Pyramide (§. 107.); So iſt im erſten Fall der Quotient, im andern aber ſind die Producte der geſuchte Inhalt der Pyramide.

Exempel.

Es ſei AB, Tab. XXVII. fig. 255, = $\overset{I}{2}\overset{II}{4}$, BC = $\overset{II}{2}$, und die Höhe DF = $\overset{I}{9}$: So iſt die Rechnung dieſe.

$$AB = \overset{I}{2}\overset{II}{4}$$

$$BC = \overset{I}{2}\overset{II}{0}$$

So iſt die Grundfläche ABCE = $\overset{I}{4},8\overset{II}{0}$

Und da die Höhe DF = $\overset{I}{9}\overset{II}{0}$

$$3)\ 4\overset{I}{3},20\overset{II}{0}$$

So iſt der Inhalt der Pyramide

$$ABCDE = 1\overset{I}{4},40\overset{II}{0}$$

Oder

Da die Grundfläche ABCE = $\overset{I}{4},8\overset{II}{0}$

und $\frac{1}{3}$ der Höhe DF = $\overset{I}{3}\overset{II}{0}$

So iſt der Inhalt der Pyramide

ABCDE = $1\overset{I}{4},40\overset{II}{0}$

Ferner

Da $\frac{1}{3}$ der Grundfläche ABCDE = $\overset{I}{1},6\overset{II}{0}$

und die Höhe DF = $\overset{I}{9}\overset{II}{0}$

So iſt der Inhalt der

Pyramide ABCDE = $1\overset{I}{4},40\overset{II}{0}$

Wenn die Pyramide ſchief iſt: So fälle man aus der Spizze auf die Ebene ihrer Grundfläche eine Perpendicularlinie, um die Höhe zu bekommen (§. 446. und 756.)

§. 784.

Den Inhalt eines Kegels zu finden.

Auflöſung.

Weil der Kegel der dritte Teil von einem Cylinder iſt, der mit ihm gleiche Grundfläche, und Höhe hat (§. 760.); So multiplicire man die Grundfläche mit der Höhe (§. 779.), und dividire das Product durch 3: Oder man multiplicire die Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, oder $\frac{1}{3}$ der Grundfläche mit der ganzen Höhen (§. 107.); So iſt im erſten

Fall

Fall der Quotient, im andern aber ſind die Producte der geſuchte Inhalt.

Exempel.

Es ſei der Diameter AB, Tab. XXVII. fig. 256, = 8 (I), und CD = 144 (o I II): So iſt die Rechnung dieſe.

```
100: 314 = 8
             8
   ─────────────────
   o  I  II III
   2  5  1  2
              I  II III
              2  0  0 = ¼ des Diameters
   ─────────────────
   o  I   II   III
 5 0,2 4,0 0 = der Grundfläche des Kegels
          o  I  II III
          1  4  4  0 = CD = der Höhe des Kegels
   ─────────────────
   2 0 0 9 6 0 0 0
   2 0 0 9 6 0 0
   5 0 2 4 0 0
   ─────────────────
       I      II      III
3) 7 2 3,4 5 6,0 0 0
   ─────────────────
der Inhalt des Kegels ABC = 2 4 1,1 5 2,0 0 0
                                I      II      III
```

Oder

$$5\overset{I}{0},2\overset{II}{4},0\overset{III}{0} = \text{der Grundfläche}$$

$$\overset{I}{4}\,\overset{II}{8}\,\overset{III}{0} = \tfrac{1}{3} \text{ der Höhe } CD$$

$$\begin{array}{r} 40192000 \\ 2009600 \\ \hline 24\overset{I}{1},15\overset{II}{2},00\overset{III}{0} \end{array} = \text{dem Inhalt des Kegels } ABC$$

Ferner

$$5\overset{I}{0},2\overset{II}{4},0\overset{III}{0} : 3 = 1\overset{I}{6},7\overset{II}{4},6\overset{III}{6}\tfrac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1\overset{I}{6},7\overset{II}{4},6\overset{III}{6} \\ \overset{0}{1}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{4}\,\overset{III}{0} = CD \\ \hline 6698640 \\ 669864 \\ 167466 \\ \hline 24\overset{I}{1},15\overset{II}{1},04\overset{III}{0} \end{array}$$

$$\overset{III}{\tfrac{2}{3}} \cdot \frac{\overset{0}{1}\,\overset{I}{4}\,\overset{II}{4}\,\overset{III}{0}}{1} = \frac{\overset{II}{2},88\overset{III}{0}}{3} = 96\overset{III}{0}$$

$$\begin{array}{r} 24\overset{I}{1},15\overset{II}{1},04\overset{III}{0} \\ 96\overset{III}{0} \\ \hline 24\overset{I}{1},15\overset{II}{2},00\overset{III}{0} \end{array} = \text{dem Inhalt des Kegels } ABC.$$

Iſt der Kegel ſchief: So fälle man, wie bei der ſchiefen Pyramide, eine Perpendicularlinie, um die Höhe zu bekommen (§. 447. und 757.)

§. 785.

Es iſt aus dem 783. und 784. §. klar, daß man den Inhalt einer Pyramide, und eines Kegels, und überhaupt eines ſpizzen Körpers findet (§. 440.), wenn man ſeine Grundfläche mit der Höhe multipliciret, und das Product durch 3 dividiret, oder die Grundfläche mit $\frac{1}{3}$ der Höhe, oder $\frac{1}{3}$ der Grundfläche mit der ganzen Höhe dieſes Körpers multipliciret. Wenn man daher den körperlichen Raum eines ſpizzen Körpers durch $\frac{1}{3}$ der Höhe dividiret: So bekomt man die ganze, und wenn man denſelben durch die ganze Höhe dividiret, $\frac{1}{3}$ von der Grundfläche, hingegen aber bekomt man die ganze Höhe, wenn man den körperlichen Raum durch $\frac{1}{3}$ der Grundfläche, $\frac{1}{3}$ der Höhe aber, wenn man dieſen Inhalt durch die ganze Grundfläche dividiret (§. 107.).

§. 786.

Wenn Pyramiden, und Kegel, und überhaupt ſpizze Körper gleiche Grundflächen haben, ſo verhalten ſie ſich in ihrem Inhalt, wie ihre Höhen, hingegen aber, wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind.

Beweis.

Multiplicirt man die Grundflächen dieſer Körper mit $\frac{1}{3}$ der Höhe: So bekomt man ihren Inhalt (§. 785.). Wenn alſo die Grundflächen gleich

ſind; So wird $\frac{1}{3}$ der Höhen durch eine dritte Zahl, die Grundfläche, multiplicirt: Und ſind ihre Höhen gleich; So werden ihre Grundflächen durch eine dritte Zahl, $\frac{1}{3}$ der Höhe, multiplicirt, eben darum aber verhalten ſich ſpizze Körper wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, hingegen aber, wie ihre Grundflächen, wenn ſie gleiche Höhen haben. Iſt zum Beiſpiel die Grundfläche des einen, wie des andern ſpizzen Körpers 2, und die Höhe des einen 6, des andern aber 9; So iſt der Inhalt des erſten $\frac{2.6}{3} = \frac{12}{3} = 4$, und der Inhalt des andern $\frac{2.9}{3} = \frac{18}{3} = 6$, und alſo $4:6 = 6:9$: Wenn hingegen die Höhe des einen, wie des andern 6, und die Grundfläche des einen 4, des andern aber 12 iſt: So iſt der Inhalt des einen $\frac{6.4}{3} = \frac{24}{3} = 8$, und der Inhalt des andern $\frac{6.12}{3} = \frac{72}{3} = 24$, und als $8:24 = 4:12$.

§. 787.

Den Inhalt eines abgekürzten rechtwinkelichten Kegels zu finden.

Auflöſung.

1) Man ſuche zu AG, Tab. XXVII. fig. 257, dem Unterſchied der Radiorum AF und DH, der Höhe

Höhe DG des abgekürzten Kegels, und dem Radio AF der Grundfläche die vierte geometriſche Proportionalzahl: So bekomt man die unbekante Höhe CF des ganzen Kegels ABC (§. 240.).

2) Aus dem Diameter AB, und der Höhe FC finde man den Inhalt des Kegels ABC (§. 784.).

3) Man ziehe die Höhe FH des abgekürzten Kegels von der gefundenen Höhe FC des ganzen Kegels ABC ab: So bekomt man die Höhe HC des abgeſchnittenen Kegels DEC.

4) Aus dem Diametro DE, und der Höhe HC ſuche man den Inhalt des Kegels DEC (§. 784.), und ziehe dieſen von dem Inhalt des Kegels ABC ab: So bekomt man den Inhalt des abgekürzten Kegels ABED.

Beweis.

Da der Triangel AFC ein rechtwinkelichter Triangel, und der ∠ AFC ein rechter Winkel iſt (§. 448.): So iſt auch, wenn DG durch D mit CF parallel gezogen wird, der ∠ AGD $\doteq$ dem ∠ AFC (§. 544.), nun iſt aber auch der ∠ CAF $\doteq$ dem ∠ CAF (§. 27.), und daher iſt der △ AGD ∽ dem △ AFC, und AG: GD = AF: FC (§. 586.). Wenn man alſo FC findet; So weis man die Höhe des ganzen Kegels: Und wenn man DG = FH (§. 447. und 527.) von FC abziehet; So bekomt man HC (§. 98.). Findet man

daher aus AB und FC den Kegel ABC, und aus DE und HC den Kegel DEC (§. 784.), und ziehet dieſen von ienem ab: So bekomt man den abgekürzten Kegel ABED.

Exempel.

Es ſei die Axe FH = DG = $\overset{0}{3}\overset{|}{6}$. Es ſei ferner AF = $\overset{0}{2}\overset{|}{2}$, und DH = $\overset{0}{1}$: So iſt AG = $\overset{0}{1}\overset{|}{2}$, und die Rechnung dieſe.

$$AG : DG = AF : x$$

$$\overset{0}{1}\overset{|}{2} : \overset{0}{3}\overset{|}{6} = \overset{0}{2}\overset{|}{2} : x$$

$$\begin{array}{r} \overset{0}{2}\overset{|}{2} \\ \hline 72 \\ 72 \\ \hline \overset{0}{7},9\overset{|}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \;\;1 \\ 1\,7 \\ 7\,9\,2 \\ 1\,2\,2 \\ \;\;1 \end{array} \Bigg| \; \overset{0}{6}\overset{|}{6} = FC \; (\S. 658.).$$

$$100 : 314 = \overset{0\ \mathrm{I}}{44} = AB$$

44

1256

1256

$$\overset{0\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}\ \mathrm{III}}{13816}$$

$$\overset{0\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}\ \mathrm{III}}{1100} = \tfrac{1}{4}\text{ des Diameters } AB$$

1381600

13816

$$\overset{0\quad \mathrm{I}\quad \mathrm{II}\quad \mathrm{III}}{15{,}19{,}76{,}00} = \text{der Grundfläche } AB$$

$$\overset{0\ \mathrm{I}\ \mathrm{II}\ \mathrm{III}}{2200} = \tfrac{1}{3}\, FC$$

3039520000

30395200

$$\overset{0\qquad \mathrm{I}\qquad \mathrm{II}\qquad \mathrm{III}}{33{,}434{,}720{,}000} = \text{dem Kegel } ABC$$

$$\overset{0\ \mathrm{I}}{66} = CF$$

$$\overset{0\ \mathrm{I}}{36} = FH$$

$$\overset{0\ \mathrm{I}}{30} = HC$$

100 : 314 = 2 = DE

2

628

50 = $\frac{1}{2}$ DH = $\frac{1}{4}$ DE

3,14,00 = der Grundfläche DE

100 = $\frac{1}{3}$ HC

3,140,000 = dem Kegel DEC

33,434,720 = dem Kegel ABC

3,140,000 = dem Kegel DEC

30,294,720 = dem abgekürzten Kegel ABED.

§. 788.

Eben ſo findet man auch bei einer ieden rechtwinkelichten abgekürzten Pyramide ABCDEOGH Tab. XXVII. fig. 258, die ganze Höhe IL der Pyramide, wenn man zu NM, FM = KL (§. 446.), und NL die vierte geometriſche Proportionalzahl findet. Ziehet man nun KL von IL ab; So weis man KI: Und findet man nunmehr den Inhalt der Pyramiden ABCDI und OGHEI (§. 783.), und ziehet dieſe von iener ab; So bekomt man die abgekürzte Pyramide ABCDEOGH.

§. 789.

§. 789.

Weil der Winkel HFB, Tab. XXVII. fig. 259, wenn man CG mit EF parallel ziehet, dem Winkel CGB gleich iſt (§. 525.), und der ∠HBF = dem ∠CBG (§. 27.); So iſt auch GB:GC = FB: FH (§. 586.): Und weil, wenn EB und HI auf AI perpendicular ſind, der Winkel FHI = dem ∠ FEB (§. 525 und 544.), und der ∠ HFI = dem ∠ EFB (§. 27.); So iſt auch FE:EB = FH: HI (§. 586. 729. und 735.). Wenn man daher zu FB — EC = GB, GC = EF (§. 527.), und FB die Axe FH des ganzen Kegels, und zu der Axe FE des abgeſchnittenen Kegels, und ſeiner Höhe EB, und der ganzen Axe FH die Höhe HI des ganzen Kegels findet: So weis man auch HL = HI — IL = HI — EB (§. 527.), und dieſemnach kan man den ſchiefen Kegel ABH und DCH ausrechnen (§. 784.), und dieſen von ienem abziehen; So bekomt man den Inhalt des abgeſchnittenen ſchiefen Kegels ABCD. Eben ſo findet man auch die ganze Höhe einer abgekürzten ſchiefen Pyramide ABCDEFGH, Tab. XXVII. fig. 260, wenn man zu RK = MK — OL, RL = OM, und MK die Axe MN, und zu MO, OR, und der Axe MN die Höhe NP findet, da dann auch QN = NP — QP = NP — OR bekant iſt.

§. 790.

§. 790.

Einen Viſirſtaab zu machen, wodurch man finden kan, wie viele Maas von einer flüßigen Materie in einem cylindriſchen Gefäſe enthalten ſind.

Auflöſung.

1) Man nehme ein Gefäſe ABCD, Tab. XXVII. fig. 261, das eine Maas hält, und ein vollkommener Cylinder iſt, und trage ſeinen Diameter AB aus A in B, Tab. XXVII. fig. 262, in A aber richte man eine Perpendicularlinie A 8 auf.

2) Man trage den Diameter aus A in 1, und ziehe B 1: So iſt dieſe Länge der Diameter von einem Gefäſe, das zwei Maas hält, und eben ſo hoch iſt, als das Gefäſe von einer Maas.

3) Man trage B 1 aus A in 2, und ziehe B 2: So iſt dieſe Länge der Diameter von einem Gefäſe, das drei Mas hält, und eben ſo hoch iſt, als das Gefäſe von einer Maas.

4) Den Diameter B 2 trage man wieder aus A in 3, und fahre, wie zuvor, fort, ſo iſt A 4 der Diameter von einem Gefäſe das 4 Maas, A 5 der Diameter von einem Gefäſe, das 5 Maas hält, und ſo weiter.

5) Man nehme einen Staab, welcher 1 Zoll breit und $\frac{3}{4}$ Zoll dik iſt, und trage auf die eine Seite, Tab XXVII. fig. 263, die Diameter der Maaſe, auf

die

die andere Seite aber die Höhe eines Maaſes, ſo oft als man kan.

Beweis.

Wenn zwei Cylinder einerlei Höhe haben: So verhalten ſie ſich in ihrem Inhalt, wie die Quadrate ihrer Diametrorum (§. 782.), und daher muß das Quadrat des Diametri eines cylindriſchen Gefäſes, das zwei Maas enthält, zweimal, das Quadrat des Diametri eines ſolchen Gefäſes aber, welches drei Maas enthält, dreimal ſo gros ſein, als das Quadrat des Diametri eines ſolchen Gefäſes, das nur ein Maas enthält, und ſo weiter, es iſt aber das Quadrat von B 1 oder von A 2 zweimal ſo gros, als das Quadrat von AB oder A 1, weil AB = A 1 (§. 676.), und das Quadrat von B 2 oder von A 3 iſt dreimal ſo gros, als das Quadrat von AB, weil das Quadrat von AB das Quadrat des Diametri von einem cylindriſchen Gefäſe iſt, das eine Maas, und das Quadrat von A 2 das Quadrat des Diametri von einem ſolchen Gefäſe iſt, das zwei Maas hält (§. 676.), und daher ſind auch A 1, A 2, A 3, und ſo weiter, die Diametri von den cylindriſchen Gefäſen, die eine, zwei, drei Maas halten, u. ſ. w., und alle einerlei Höhe haben. Wenn man alſo den Diameter eines Cylinders mit der Seite, worauf die Diametri der Maaſe ſtehen, miſſet; So weis man, wie viele Maas auf dem Boden Raum haben: Und miſſet

man die Höhe dieſes Cylinders mit der Seite, worauf die Höhen der Maaſe ſtehen; So weis man auch, wie viele Maaſe über einander ſtehen, und es iſt das Product dieſer Zahlen der verlangte Inhalt an Maaſen.

§. 791.

Wenn man den Diameter AB eines landüblichen Maaſes, Tab. XXVII. fig. 262, in 500, oder in 1000 Teile teilet (§. 601.), und dieſe in ihr Quadrat erhebt, dieſes Quadrat aber mit zwei multiplicirt; So bekomt man das Quadrat von AB und A 1, und das Quadrat von B 1: Ziehet man hieraus die Quadratwurzel (§. 187. und 188.); So bekomt man B 1 = A 2, und den Durchmeſſer von einem gleich hohen Gefäſe, das zwei Maaſe hält. Addirt man iezt das Quadrat von AB und A 2, oder multiplicirt das Quadrat von AB mit 3, weil das Quadrat von AB das einfache, und das Quadrat von A 2 das zweifache von dem Quadrat des Diameters einer Maas iſt, ſo bekomt man das Quadrat von B 2 = A 3: ziehet man nun auch hieraus die Wurzel; So bekomt man B 2 = A 3, und den Diameter von einem gleich hohen Gefäſe, das drei Maas enthält, und ſo kan man, wenn man weiter fortfährt, durch die Rechnung die Diameter der Gefäſe finden, die 4, 5, 6, 7 und 8 Maas halten, und ſo weiter.

§. 792.

§. 792.

Ein gegebenes Faß zu viſiren, oder zu finden, wie viele Maas daſſelbe hält.

Aufloͤſung.

1) Man meſſe mit dem Viſirſtaab (§. 790.), und zwar der Seite, worauf die Diametri der Maaſe ſind, den Boden AB des Faſſes, Tab. XXVIII. fig. 264.

2) Mit eben dieſer Seite des Viſirſtaabs meſſe man auch den Diameter DC des Faſſes an dem Spundloch, beide Diameter aber im Lichten, oder zwiſchen dem Holz.

3) Man meſſe mit der Seite des Viſirſtaabes, worauf die Hoͤhen der Maaſe befindlich ſind, die Laͤnge des Faſſes EF, aber auch im Lichten, oder zwiſchen den Boͤden AB und FG. Jezt

4) addire man die Diameter AB und CD, und halbire ihre Summe, oder dividire ſie durch 2, ſo bekommt man die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl (§. 234.): Dieſe Zahl nun multiplicire man mit der Laͤnge EF; So iſt das Product die Anzahl der Maaſe, die in dieſem Faß Raum haben. Endlich

5) dividire man die Zahl dieſer Maaſe durch die Zahl der Maaſe, die eine Ohm macht, und die uͤbrigbleibende Maaſe durch die Zahl der Maaſe, die ein Viertel ausmacht, ſo bekomt man den Gehalt des Faſ-

ſes

ſes in Ohm, Vierteln, und Maaſen, und es iſt geohmet, oder viſiret (§. 108.).

Beweis.

Durch die Meſſung und Vergleichung der Böden erfährt man, wie viele Maaſe auf dem Boden Raum haben, und durch die Meſſung der Länge des Faſſes findet man, wie viele Maaſe über einander liegen: Wenn man daher die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl der Böden mit der Länge multiplicirt; So bekomt man die Zahl der Maaſe, die in dem Faß Raum haben (§. 790.).

Exempel.

Es ſei AB=8, und CD=10, und die Länge EF=13: So iſt die Rechnung dieſe.

Da AB	=	8
und CD	=	10
So iſt die Summe		18
und die halbe Summe	2)	9
Da nun die Länge EF	=	13
So hält das Faß		117 Maas.

Wenn nun 80 Maas eine Ohm, und 4 Maas ein Viertel machen: So machen 108 Maas 1 Ohm 8 Viertel und 5 Maas.

§. 793.

§. 793.

Weil das Faß kein vollkommener Cylinder iſt, und bei D einen Bauch hat: So komt auch dieſe Viſirung der Fäſſer mit der geometriſchen Schärfe nicht überein, die Erfahrung lehret inzwiſchen, daß ein Faß einem Cylinder gleichet, der den mittleren arithmetiſchen Proportionalcirkel zwiſchen dem Cirkel des Bodens, und dem Cirkel des Bauches zu den Grundflächen, die Länge des Faſſes aber zu ſeiner Höhe hat.

§. 794.

Ein Faß, das nicht voll iſt, kan ſo leicht nicht viſiret werden: Stelt man es indeſſen auf den Boden; So kan man es, wie ein volles Faß, viſiren (§. 792.).

§. 795.

Einen Viſirſtaab zu verfertigen, wodurch man finden kan, wie viele Maas in einem ieden hohlen Körper befindlich ſind.

Auflöſung.

1) Man gieſe eine Maas Waſſer in ein Gefäſe, das ein Parallelopipedum iſt, und rechne den körperlichen Raum aus, den dieſes Waſſer einnimt.

2) Man ziehe aus dieſem Inhalt die Kubikwurzel, ſo bekomt man die Seite von einem Cubo, der eine Maas hält.

3) Man trage dieſe Seite ſo oft, als man kan, auf einen Staab, der 1 Zoll breit und $\frac{3}{4}$ Zoll dik iſt, und zwar nach dem Maasſtaab, wornach man die Länge, Breite und Höhe des Waſſers gemeſſen hat.

4) Damit man auch kleinere Teile meſſen könne: So teile man die Seite des Cubi, der eine Maas hält, in 10 gleiche Teile, einen ſolchen Teil wieder in 10 gleiche Teile, und ſo weiter, ſo kan die Seite des Cubi von einer Maas eine Ruthe, der zehnte Teil davon ein Schuh, und der zehnte Teil eines Schuhes ein Zoll ſein, u. ſ. w., und man kan dieſe Teile eben ſo bezeichnen, wie die Ruthen, Schuhe und Zolle, und auch wie mit Ruthen, Schuhen und Zollen rechnen (§. 466. 654. und 757. u. f.), und es bedeuten die Ruthen alzeit ganze Maaſe.

§. 796.

Wenn man nach dem vorigen Maasſtaab einen Körper viſiren ſoll: So meſſe man die Linien, die man an dem Körper wiſſen muß, um ſeinen Inhalt auszurechnen, nach dieſem Maasſtaab aus, und finde darnach den Inhalt des Körpers; So zeigt das Product die Maaſe in der Ruthenzahl an, und man bekomt noch 1000, 1000000 Teile, u. ſ. w.

§. 797.

Rechnet man ſonſt auch den Inhalt eines hohlen Körpers nach einem ieden andern Maasſtaab aus,

und dividirt dieſen Inhalt durch den Inhalt eines Maaſes, der nach eben dem Maasſtaab ausgerechnet worden: So bekomt man ebenwol den Inhalt der Maaſe von dem hohlen Körper.

§. 798.

Die Kugel iſt zwei Drittel von einem Cylinder, welcher die Axe der Kugel zum Diametro ſeiner Grundfläche, eben dieſe Axe aber auch zu ſeiner Höhe hat.

Beweis.

Wenn man in dem Quadrat ABCD, Tab. XXVIII. fig. 265, die Diagonallinie AC ziehet, und mit CB den Bogen BD beſchreibt, dieſes Quadrat aber um ſeine Höhe CD bewegt: So beſchreibt das Quadrat ABCD einen Cylinder ABMN, der rechtwinkelichte Triangel ADC einen Kegel ACN, und der Quadrant CBD eine halbe Kugel BDM (§. 444. 448. und 451.). Wenn daher der Cylinder ABMN parallel mit MB durchſchnitten wird, und alſo HE parallel CB iſt: So iſt EH der Radius von dem Durchſchnitt in dem Cylinder, EF der Radius von dem Durchſchnitt in dem Kegel, und EG der Radius von dem Durchſchnitt in der halben Kugel. Nun iſt aber der $\angle$ ADC $=$ $\angle$ FEC (§. 444. und 544.), und der $\angle$ ACD $=$ dem $\angle$ ACD (§. 27.), und daher iſt auch der $\triangle$ ADC $\backsim$ dem

 $\triangle$FEC,

△FEC, und AD: DC=FE: EC (§. 586.), AD aber iſt =DC (§. 429.), und daher iſt EF= EC (§. 217.), es iſt aber auch ferner EH=CB (§. 527.), und CG=CB (§. 406.), und daher iſt EH=CG (§. 39.). Dieſemnach iſt CG der Radius von dem Durchſchnitt des Cylinders, EC der Radius von dem Durchſchnitt des Kegels, und EG der Radius von dem Durchſchnitt der halben Kugel. Wenn man daher das Quadrat von EC von dem Quadrat von CG abziehet: So bleibt das Quadrat von EG übrig (§. 676.). Weil ſich nun die Cirkelflächen wie die Quadrate ihrer Diametrorum verhalten (§. 718.), und alle dieſe Durchſchnitte Cirkel ſind (§. 403.): So bleibt auch, wenn man den Cirkel vom Radio EC, den Durchſchnitt des Kegels, von dem Cirkel des Radii CG, dem Durchſchnitt des Cylinders, wegnimt, der Cirkel von dem Radio EG, und der Durchſchnitt der halben Kugel übrig (§. 719.). Weil ſich nun dieſer Beweis auf alle Durchſchnitte erſtrekt: So folgt auch, daß der Inhalt der halben Kugel übrig bleibt, wenn man den Inhalt des Kegels von dem Inhalt des Cylinders wegnimt, es iſt aber der Kegel ein Drittel von dem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche, und gleiche Höhe hat (§. 760.), und derohalben muß auch die halbe Kugel BMD zwei Drittel von dem Cylinder ABMN, und die ganze Kugel zwei Drittel von einem Cylinder ſein,

der

der noch einmal ſo gros iſt, als wie der vorige, und mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Es iſt alſo die Kugel $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder, der ihre Axe zur Höhe, und eben dieſe Axe zum Diametro ſeiner Grundfläche hat.

§. 799.

Der Würfel von dem Diametro der Kugel verhält ſich zu der Kugel, wie 300 zu 157, aber nur beinahe.

Beweis.

Wenn der Diameter der Kugel 100 iſt: So iſt der Inhalt ſeines Würfels 1000000 (§. 764.), der Inhalt des Cylinders aber, der den Diameter der Kugel zum Diametro der Grundfläche, und eben dieſen Diameter zur Höhe hat 785000 (§. 779.). Wenn man alſo, da die Kugel $\frac{2}{3}$ von dieſem Cylinder iſt (§. 798.), 785000 durch 3 dividirt, und den Quotienten mit 2 multiplicirt: So iſt der Inhalt der Kugel 523333$\frac{1}{3}$, und alſo verhält ſich der Inhalt des Würfels von dem Diametro zu dem Inhalt der Kugel wie 1000000: 523333$\frac{1}{3}$, oder, wenn man, um den Bruch wegzuſchaffen, beiderſeits mit 3 multiplicirt, wie 3000000: 1570000 (§. 215.), und wenn man wieder beiderſeits durch 10000 dividirt, wie 300: 157 (§. 216.), aber nur beinahe, weil dieſe Verhältnis auf die Verhältnis des Diameters ge-

gründet iſt, die man bei der Ausrechnung der Grundfläche des Cylinders gebrauchet, dieſe aber nur beinahe zutrift (§. 713.).

§. 800.

Weil ſich der Würfel des Diametri zu dem Inhalt der Kugel verhält wie 300: 157 (§. 799.), und ſich alſo eine Kugel zu dem Würfel ihres Diametri verhalten muß, wie eine iede andere Kugel zu dem Würfel ihres Diametri, in einer ieden Proportion aber ſich das erſte zu dem dritten, wie das andere zu dem vierten Glied verhält (§. 233.): So verhalten ſich auch die Kugeln in ihren Inhälten zu einander, wie die Würfel ihrer Diametrorum. Iſt daher der Diameter einer Kugel noch einmal ſo gros, als der Diameter einer andern Kugel; So iſt auch iene achtmal gröſer, als wie dieſe: Und wenn der Diameter einer Kugel dreimal ſo gros iſt, als wie der Diameter einer andern Kugel; So iſt auch iene ſieben und zwanzigmal gröſer als wie dieſe.

§. 801.

Der Inhalt einer Kugel iſt dem Inhalt einer Pyramide gleich, welche die äuſere Fläche der Kugel zur Grundfläche, den Radium dieſer Kugel aber zur Höhe hat.

Beweis.

Beweis.

Wenn man ſich vorſtellet, daß die Kugelfläche in unendlich kleine Figuren, in Drei- oder Vierekke geteilt ſei; So ſind dieſe kleine Flächen von einer Ebene unendlich wenig verſchieden, und ſie können als ebene Flächen betrachtet werden, die gerade Linien aber, die man aus dem Mittelpunkt der Kugel in die Spizzen dieſer kleinen Figuren ziehet, teilen dieſe Kugel in unendlich viele Pyramiden, und die Höhen dieſer Pyramiden gleichen dem Radio des Cirkels (§. 707. Bew.). Es beſtehet alſo die Kugel aus unendlich vielen Pyramiden, welche den Radium der Kugel zur Höhe haben, und in dem Mittelpunkt der Kugel mit ihren Spizzen zuſammen kommen, die Grundflächen aller dieſer Pyramiden aber ſind der ganzen Kugelfläche gleich (§. 30.), und daher gleichet auch der Inhalt der Kugel dem Inhalt einer Pyramide, welche die Kugelfläche zur Grundfläche, und den Radium der Kugel zur Höhe hat.

§. 802.

Multiplicirt man dieſemnach die Kugelfläche mit dem dritten Teil des Radii, oder mit dem ſechſten Teil des Diametri der Kugel (§. 408. und 785.); So bekomt man ihren körperlichen Inhalt: Und dividirt man den Inhalt der Kugel mit dem dritten Teil des Radii, oder mit dem ſechſten Teil des Diameters;

meters; So iſt der Quotient die Kugelfläche (§. 785.), hingegen aber $\frac{1}{3}$ des Radii, oder $\frac{1}{6}$ des Diametri der Kugel, wenn man ihren Inhalt durch die Kugelfläche dividirt (§. 107.).

§. 803.

Die Kugelfläche verhält ſich zu dem gröſten Cirkel, wie 4 zu 1.

Beweis.

Wenn der Diameter 100 iſt: So iſt der Flächeninhalt des gröſten Cirkels 7850 (§. 723.), der Inhalt der Kugel aber $523333\frac{1}{3}$ (§. 799. Bew.). Dividirt man nun dieſen Inhalt mit dem ſechſten Teil des Diameters $= \frac{100}{6}$: So iſt die Kugelfläche 31400 (§. 148. und 802.), und es verhält ſich alſo die Kugelfläche zum gröſten Cirkel der Kugel, wie 31400 : 7850, und wenn man beiderſeits mit 7850 dividirt, wie 4 zu 1 (§. 216.).

§. 804.

Wenn man die Peripherie des gröſten Cirkels mit dem vierten Teil des Diameters multiplicirt; So komt die Fläche des gröſten Cirkels heraus (§. 708.): Und wenn man dieſe Peripherie mit dem ganzen Diameter multiplicirt; So entſtehet eine Fläche, die noch viermal ſo gros iſt, als die Fläche des

des gröſten Cirkels. Nun iſt aber dieſe die Kugelfläche (§. 803.), und derohalben bekomt man auch die Kugelfläche, wenn man die Peripherie des gröſten Cirkels durch ihren Diameter multiplicirt.

§. 805.

Soll man alſo die Kugelfläche von einer Kugel finden, deren Diameter bekant iſt: So ſuche man aus dieſem Diameter die Peripherie (§. 720.), und multiplicire dieſe mit eben dieſem Diametro, ſo iſt das Product die verlangte Kugelfläche.

§. 806.

Aus dem gegebenen Diametro der Kugel ihren Inhalt zu finden.

Erſte Auflöſung.

Man ſuche aus dem gegebenen Diameter den Inhalt der Kugelfläche (§. 805.), und multiplicire dieſe mit dem ſechſten Teil des Diameters, oder mit dem ganzen Diameter, und dividire das Product durch 6: So iſt im erſten Fall das Product, im andern aber der Quotient der verlangte Inhalt (§. 802.).

Exempel.

Es ſei der Diameter $\overset{0}{1}\overset{1}{2}$: So iſt die Rechnung dieſe.

```
100 : 314 = 12
            12
        ------
           628
          314
        ------
           o I II III
           3768 = der Peripherie
              o I II III
              1200 = dem Diameter
        ------
          753600
         3768
        ------
         o   I   II   III
         4,52,16,00 = der Kugelfläche
                   I II III
                   200 = 1/6 des Diameters
        ------
           I      II    III
        904,320,000 = dem Inhalt der
                            Kugel.
```

Oder

```
          o   I   II   III
          4,52,16,00 = der Kugelfläche
                o I II III
                1200 = dem Diameter
        ------------
          904320000
        4521600
        ------------
        5425920000
     6)------------
          I     II    III
        904,320,000 = dem Inhalt der
                           Kugel.
```

Andere Auflöſung.

1) Man erhebe den gegebenen Diameter in den Cubum (§. 764.).

2) Weil

2) Weil ſich der Würfel von dem Diametro einer Kugel zu dieſer Kugel verhält, wie 300: 157 (§. 799.), und zu dieſer Verhältnis, und einem ieden gegebenen Cubo die vierte geometriſche Proportionalzahl leicht gefunden werden kan: So ſuche man zu 300, 157, und dem gefundenen Cubo dieſe Zahl, ſo iſt ſolche der verlangte Inhalt.

Exempel.

Es ſei wie vorhin der Diameter $\overset{0}{1}\overset{|}{2}$: So iſt die Rechnung dieſe.

$\overset{0}{1}\overset{|}{2}$ = dem Diameter
$\overset{0}{1}\overset{|}{2}$

24
12

$\overset{0}{1},4\overset{|}{4}$ = der Grundfläche des Würfels
$\overset{0}{1}\overset{|}{2}$

288
144

$\overset{0}{1},72\overset{|}{8}$ = dem Cubo vom Diametro $\overset{0}{1}\overset{|}{2}$.

300:

300 : 157 = 1728

	157
	12096
	8640
	1728
	271296

27129600000 | 904,320 (§. 769.) = dem Inhalt der Kugel.
33333300 |

Dritte Auflöſung.

Weil die Kugel zwei Drittel von dem Cylinder iſt, der die Axe der Kugel zum Diameter der Grundfläche, eben dieſe Axe aber auch zu ſeiner Höhe hat (§. 798.): So rechne man den Inhalt eines ſolchen Cylinders aus, und dividire das Product durch drei, den Quotienten aber multiplicire man mit 2, ſo iſt dieſes leztere Product der verlangte Inhalt.

Exempel.

Es ſei wie vorhin der Diameter der Kugel 12: So rechnen wir ſo.

o I II III
3768 = der Peripherie der Grundfläche des Cylinders (1. Exem.)

I II III
300 = $\frac{1}{4}$ des Diameters des Cylinders

o I II III
1,13,04,0'0 = der Grundfläche des Cylinders

o I II III
1200 = der Höhe des Cylinders

226080000
1130400

o I II III
1,356,480,000 = dem Inhalt des Cylinders

3)
I II III
452,160,000 = $\frac{1}{3}$ des Inhalts des Cylinders
2 Mult.

I II III
904,320,000 = dem Inhalt der Kugel.

§. 807.

Den körperlichen Inhalt von der Dikke ABCDAEFGHE einer hohlen Kugel zu finden, Tab. XXVIII. fig. 266.

Auflöſung.

Weil die Dikke einer hohlen Kugel entſtehet, wenn ſich der halbe Ring ADCGHEA um ſeinen Dia-

Diameter AC bewegt (§. 451.), und alſo ADCBA, und EHGFE Kugeln ſind: So meſſe man die Axen AC und EG, und rechne den Inhalt dieſer beiden Kugeln aus (§. 806.), alsdann aber ziehe man die kleinere von der gröſeren ab; So iſt der Reſt der verlangte Inhalt.

§. 808.

Aus dem gegebenen Inhalt einer Kugel den Diameter zu finden.

Auflöſung.

1) Weil ſich der Inhalt der Kugel zum Cubo ihres Diametri verhält, wie 157, zu 300 (§. 799.): So ſuche man zu 157, 300, und dem gegebenen Inhalt der Kugel die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), ſo bekomt man den Cubum von dem Diameter, den man finden ſoll.

2) Man ziehe aus dieſem die Cubikwurzel (§. 193. 194. und 195.); So iſt dieſe der verlangte Diameter.

Exempel.

Es ſei der Inhalt der Kugel $904^{\prime}, 320^{\prime\prime}$: So rechnen wir ſo.

$$157 : 300 = 904320$$

$$\frac{300}{271296000}$$

```
    1
    2
  4 4 4
  1 9 2
1 2 4 3 8
2 7 1 2 9 6 0 0 0  }   °   '   ''
1 8 7 7 7 7 7 7 7  }  1,7 2 8,0 0 0
  1 8 8 8 8 8 8
    1 1 1 1 1
```

```
°   '    '' ° ' ''
1,7 2 8,0 0 0 | 1 2 0 = dem Diameter der Kugel
1
―――――――――
  7 2 8
  3 . .
  ―――――
  6 . .
  1 2 .
      8
  ―――――
  7 2 8
  ―――――
  0 0 0
```

§. 809.

Weil die halbe Kugel MBDM, Tab. XXVIII. fig. 265, übrig bleibt, wenn man den Kegel ACNA von dem Cylinder ABMNA wegnimt (§. 798. Bew.): So bekomt man auch den Inhalt des Abſchnitts der Kugel PGDP, wenn man den Inhalt des abgekürzten Kegels AFPNA von dem Inhalt des Cylinders AHONAH abziehet, zuvor aber ſich $AD = DC = \frac{1}{2} DQ$, und $EF = EC = DC - DE$

bekant

bekant macht (§. 628. und 798. Bew.), den Inhalt der Zona DCEFD, Tab. XXVIII. fig. 267, findet man, wenn man den Abſchnitt FEGF von dem Abſchnitt DCGD abziehet, und die Zona ABEFA bekomt man, wenn man den Abſchnitt FEGF von der halben Kugel ABGA wegnimt.

§. 810.

Den Inhalt des Ausſchnitts einer Kugel findet man, wenn man zu 360°, zu den Graden des Bogens DB von dem Winkel DEB, Tab. XXVIII. fig. 268, und zu dem Inhalt der Kugel die vierte geometriſche Proportionalzahl findet, den Inhalt des Ausſchnitts von einer halben Kugel hingegen, wenn man zu 360°, zu den Graden des Bogens CB von dem Winkel BDC, Tab. XXVIII. fig. 269, und dem Inhalt der Kugel die vierte geometriſche Proportionalzahl findet. Den Inhalt eines Ausſchnitts einer Kugel FHEGFH, der aus einem Abſchnitt FEGF, und dem Kegel FHEFH zuſammen geſezt iſt, bekomt man endlich, wenn man den Inhalt des Abſchnitts und des Kegels addirt. Eben ſo, wie man den Ausſchnitt einer Kugel findet: So findet man auch den Ausſchnitt eines Cylinders ABFEDCA, Tab. XXVIIII. fig. 270, und den Ausſchnitt eines Kegels ACBIAC, Tab. XXVIIII. fig. 271, oder eines abgekürzten Kegels AFGHBIAFA, man ſucht nemlich zu 360°,

zu

zu den Graden des Winkels FED, und dem Inhalt des Cylinders, oder zu 360° zu dem Winkel AIB, und dem Inhalt des ganzen, oder des abgekürzten Kegels die vierte geometriſche Proportionalzahl, ſo bekomt man im erſten Fall den Ausſchnitt des Cylinders, im andern den Ausſchnitt des ganzen Kegels, und im dritten den Ausſchnitt des abgekürzten Kegels. Wenn endlich in einem Cylinder ein abgekürzter Kegel ausgehöhlt iſt: So muß man den Ausſchnitt des abgekürzten Kegels CIHEKDC, Tab. XXVIIII. fig. 272, von dem Ausſchnitt des Cylinders ABIGFKA abziehen, da man dann den Ausſchnitt ABCHGFEDA bekomt. Iſt in der Mitte eines abgeſchnittenen Kegels ein Cylinder ausgehöhlt: So muß man den Inhalt des Ausſchnitts des Cylinders DCIHEKD, Tab. XXVIIII. fig. 273, von dem Inhalt des Ausſchnitts des abgekürzten Kegels ABIGFKA abziehen, da man den Ausſchnitt ABCHGFEDA bekomt. Den Inhalt von dem Ausſchnitt BFGCDIHFB eines Cylinders, worinnen ein kleinerer Cylinder ausgehöhlt iſt, findet man, wenn man den Ausſchnitt FAGIEHF von dem Ausſchnitt BACDEFB abziehet.

§. 811.

Wenn man das, was wir von der Ausrechnung der Körper vorgetragen haben, wol begriffen hat:

So wird man auch den Inhalt von einem ieden Körper, der aus ienen zuſammen geſezt iſt, leicht finden können, wenn man nur den ganzen Körper in die Körper teilet, woraus er beſtehet. Man findet daher den Inhalt eines Octaedri, weil es aus acht Pyramiden beſtehet, wenn man eine ausrechnet, und dieſen Inhalt mit 8 multiplicirt, den Inhalt des Dodecaedri, welches aus zwölf gleichen Pyramiden zuſammen geſezt iſt, wenn man eine ausrechnet, und das Product mit 12 multiplicirt, und den Inhalt eines Icoſaedri, das zwanzig gleich groſſe Pyramiden hat, wenn man den Inhalt von einer findet, und dieſen mit 20 multiplicirt (§. 783.). So findet man auch den Inhalt eines Dammes von einem Teiche, wenn man die Prismata AKDGOM, Tab. XXVIIII. fig. 274, KDGONFCL, LBCFNE und ONFGIH, imgleichen die Pyramiden MOGI und NEFH ausrechnet, und dieſe Inhälte addirt, zu der Summe aber das Prisma ONFGIH, und die Pyramiden MOGI und NEFH addirt, weil dieſer Teil des Dammes auch an der Seite ABCD liegt, wenn derſelbe in einem Thal geſchlagen iſt.

§. 812.

Den Inhalt eines ieden irregulären Körpers zu finden.

Auflö-

Aufloͤſung.

1) Man lege den zu meſſenden Koͤrper in ein hohles Parallelopipedum ABCDEFG, Tab.XXVIIII. fig. 275, und gieſe Waſſer daruͤber, zugleich aber bemerke man die Hoͤhe BH des Waſſers.

2) Man nehme den Koͤrper aus dem Waſſer, und bemerke die Hoͤhe BI des Waſſers: So kan man IH meſſen, und dieſe Hoͤhe iſt die Hoͤhe des Raums, den der irregulaͤre Koͤrper eingenommen hat, die Grundflaͤche FEDG aber die Grundflaͤche dieſes Raums, weil er ſo viel Waſſer aus ſeiner Stelle getrieben hat, als dieſer Raum ausmacht. Dieſemnach

3) multiplicire man FE mit ED, und das Product mit IH: So komt der Inhalt des irregulaͤren Koͤrpers heraus.

§. 813.

Wer ſich die Ausrechnung der Flaͤchen, die wir §. 253. u. folg. vorgetragen haben, wol bekant gemacht hat, der wird, wenn er die Beſchaffenheit der mathematiſchen Koͤrper genau betrachtet hat, die Flaͤchen dieſer Koͤrper leicht finden, auch ſich in der Teilung der Koͤrper bald helfen koͤnnen, wenn er nur auf das zuruͤk gehet, was wir §. 686. und folg. von der Teilung der Figuren vorgetragen haben, und bei den gleich dikken Koͤrpern die Grundflaͤche, oder die Hoͤhe, bei den

Spizzen aber allein die Grundfläche in gleiche Teile teilet (§. 751. und 756.).

§. 814.

Einen Würfel zu finden, der etlichemal ſo gros iſt, als ein anderer.

Aufloſung.

Man multiplicire den Inhalt des gegebenen Würfels mit 2, 3, 4, und ſo weiter, und ziehe aus demſelben die Cubikwurzel (§. 193. 194. und 195.): So iſt geſchehen, was man verlangt hat.

§. 815.

Ein Prisma, einen Cylinder, oder einen Kegel etlichemal ſo gros zu machen, als einen andern.

Aufloſung.

Man mache dieſe Körper bei einerlei Grundfläche noch etlichemal ſo hoch, oder bei einerlei Höhe ihre Grundfläche etlichemal ſo gros: So iſt das Verlangte geſchehen (§. 781. und 786.).

§. 816.

Eine Kugel zu finden, die etlichemal ſo gros iſt, als eine andere.

Aufloſung.

Man erhebe den Diameter der gegebenen Kugel

in

in den Cubum, und multiplicire dieſen Cubum mit 2, 3, 4, u. ſ. w., aus dem Product aber ziehe man die Cubikwurzel (§. 193. 194. und 195.), ſo iſt das Verlangte geſchehen, und der Diameter zu einer Kugel gefunden, die etlichemal ſo gros iſt, als die gegebene (§. 800.).

§. 817.

Ein Prisma in ein anderes Prisma zu verwandeln, das mit ienem einerlei Höhe, aber eine Grundfläche von einer andern Figur hat.

Aufloſung.

Man verwandele die Grundfläche des gegebenen Körpers in die verlangte Grundfläche (§. 693. u. folg.), und laſſe die Höhe, wie vorhin, ſo iſt das Verlangte geſchehen (§. 751.).

§. 818.

Eine Pyramide in eine Pyramide von einer andern Grundfläche, oder in einen Kegel zu verwandeln, die aber beide mit iener gleiche Höhe haben.

Auflöſung.

Man verfahre eben ſo, wie zuvor: Und wenn man eine Pyramide in einen Kegel verwandeln ſoll; So finde man zu der Grundfläche den Diameter (§. 724.), hingegen verwandele man die Grund-

fläche des Kegels in einen Triangel, der den Radium zur Höhe, und die Peripherie zur Grundlinie hat, (§. 707.), dieſen aber in die verlangte Grundfläche (§. 693. u. folg.), wenn man einen Kegel in eine Pyramide verwandeln ſoll (§. 756. und 757.).

§. 819.

Ein Prisma und einen Cylinder in ein anderes Prisma, oder einen Cylinder zu verwandeln, wozu die Gröſe der Grundfläche gegeben iſt.

Aufloſung.

Man dividire den Inhalt des zu verwandelnden Körpers durch die gegebene Grundfläche: So bekomt man die Höhe zu der gegebenen Grundfläche (§. 780.).

§. 820.

Eine Pyramide, oder einen Kegel in eine andere Pyramide, oder einen andern Kegel zu verwandeln, wozu die Grundfläche gegeben iſt.

Aufloſung.

Man dividire den Inhalt des zu verwandelnden Körpers durch $\frac{1}{3}$ der gegebenen Grundfläche, oder durch die ganze Grundfläche, und multiplicire den Quotienten mit 3: So bekomt man die Höhe der Pyramide, oder des Kegels zu dieſer Grundfläche (§. 785.).

§. 821.

Eine Pyramide in ein Prisma, oder einen Kegel in einen Cylinder zu verwandeln.

Aufloſung.

Man mache aus der Grundfläche dieſer Körper, und $\frac{1}{3}$ der Höhe ein Prisma, oder einen Cylinder; So iſt das Verlangte geſchehen (§. 758. 759. und 760.): Oder wenn die Grundfläche gegeben iſt, die das Prisma, oder der Cylinder haben ſoll; So dividire man dieſe in den Inhalt der Pyramide, oder des Kegels; So bekomt man die Höhe des Prisma, oder des Cylinders (§. 780.). Soll umgewendet ein Prisma in eine Pyramide, oder ein Cylinder in einen Kegel verwandelt werden: So behalte man die Grundfläche bei, und mache ſie dreimal ſo hoch (§. 758. 759. und 760.).

§. 822.

Eine Kugel in einen Cylinder zu verwandeln.

Aufloſung.

Man mache aus der Axe der Kugel einen Cylinder, der die Cirkelfläche dieſer Axe zur Grundfläche, zwei Drittel von der Axe aber zu ſeiner Höhe hat (§. 798.).

§. 823.

Eine Kugel in einen Kegel zu verwandeln.

Aufloͤſung.

Weil der Cylinder, der die Cirkelflaͤche der Axe der Kugel zur Grundflaͤche, $\frac{2}{3}$ von der Axe aber zur Hoͤhe hat, der Kugel gleich iſt (§. 822.), und ein Kegel, der dreimal ſo hoch iſt, als dieſer Cylinder, aber eben die Grundflaͤche hat, dieſem Cylinder gleich iſt (§. 821.): So nehme man, wie vorhin den Cirkel von der Axe der Kugel zur Grundflaͤche des Kegels an, und mache dieſen Kegel zweimal ſo hoch, als die Axe der Kugel iſt, weil $\frac{2}{3}$ der Axe multiplicirt mit $3 = \frac{6}{3} = 2$. Axen iſt.

§. 824.

Einen ieden Koͤrper in einen Wuͤrfel zu verwandeln.

Aufloͤſung.

Man ziehe aus dem Inhalt des gegebenen Koͤrpers die Cubikwurzel (§. 193. 194. und 195.): So iſt dieſe die Seite eines gleich groſen Wuͤrfels.

§. 825.

Wer die Geſtalt der mathematiſchen Koͤrper genau betrachtet hat, und im Zeichnen ein wenig geuͤbt iſt, der wird auch einen ſolchen Koͤrper, dem Auge, und dem Maasſtaab nach, leicht zeichnen koͤnnen. Ihre Zeichnung, nach einem gewiſſen Augenpunkt, gehoͤrt in die Perſpectiv, wovon wir alſo hier nicht handeln koͤnnen.

Der zwete Abſchnitt
von
der ebenen Trigonometrie.

§. 826.

Die Trigonometrie lehret entweder, wie man aus drei gegebenen Teilen eines Triangels, der in einer ebenen Fläche befindlich iſt, die übrigen unbekanten Teile durch die Rechnung finden ſoll, wenn wenigſtens eine Seite gegeben iſt (§. 384.), oder wie man aus drei gegebenen Seiten, oder Winkeln eines Triangels, der von drei Cirkelbogen auf der Oberfläche einer Kugel eingeſchloſſen iſt, die übrigen ausrechnen ſoll. Nur mit den erſteren wollen wir uns beſchäftigen.

§. 827.

Weil aus drei Winkeln eines geradlinigten Triangels unendlich viele Triangel gemacht werden können, deren gleichnamige Seiten alle proportional ſind (§. 586.): So folgt auch, daß man in einem gegebenen Triangel nichts finden kann, wenn nicht wenigſtens eine von ſeinen Seiten gegeben iſt.

§. 828.

In der Trigonometrie ſtelt man die Winkel, die man durch Cirkelbogen meſſen kan (§. 483. und

 484.),

484.), durch Seiten, oder durch gerade Linien vor. Wie dieſes möglich iſt, das wollen wir zeigen, und die Namen dieſer Linien erklären.

§. 829.

Wenn man aus einem Punkt C in der Peripherie eines Cirkels auf den Radium + BA eine Perpendicularlinie CD fallen läſt, Tab. XXX. fig. 276: So heiſt dieſe Linie der Sinus des Bogens BC, dieſer Sinus aber iſt auch der Sinus des Winkels BAC, weil der Bogen BC das Maas dieſes Winkels iſt (§. 483. und 484.).

§. 830.

Weil AB, Tab. XXX. fig. 276, perpendicular auf DC iſt (§. 829.): So iſt auch, wenn CD bis in F verlängert wird, CD = DF, und der Bogen CB = BF (§. 570.), eben daher aber iſt der Sinus eines Winkels BAC die halbe Sehne CD von ſeinem doppelten Bogen CBF.

§. 831.

Weil die halbe Sehne CD, Tab. XXX fig. 276., ſowol des Bogens BC, als des Bogens CIE halbe Sehne iſt, und bei dem Winkel EAC aus dem Punkt C keine andere Perpendicularlinie auf den verlängerten Schenkel AE gezogen werden

kan,

kan, als CD: So iſt auch CD der Sinus des Bogens CIE, und des Winkels EAC (§. 829. und 830.), und es haben alſo zwei Winkel, die zuſammen 180° halten, einerlei Sinus, und es iſt der Sinus CD des ſpizzen Winkels BAC zugleich der Sinus des ſtumpfen Winkels EAC, der mit dem Winkel BAC zwei rechte Winkel, und 180° ausmacht. So haben zum Beiſpiel der Sinus von 32° und 148° einerlei Sinus.

§. 832.

Da der ſpizze Winkel BAC um deſto gröſer wird, ie näher er dem rechten Winkel BAI komt (§. 496.): So wird auch der Sinus CD um deſto gröſer, ie näher ſein Winkel einem rechten Winkel komt, hingegen iſt er um deſto kleiner, ie näher der Punkt C an B iſt.

§. 833.

Weil die Sinus der Winkel ſo lang zunehmen, bis ihr Sinus dem Radio des Cirkels gleich wird (§. 832.): So iſt auch der Radius der gröſte Sinus, und der Sinus eines rechten Winkels, alle andere aber die kleiner ſind, als er, die können als Brüche des Radii betrachtet werden, eben darum nun heiſt der Radius der Sinus totus, oder der Sinus maximus, alle kleinere Sinus aber Sinus partiales

§. 434.

§. 834.

Weil die Sinus auf dem Radio perpendicular ſtehen (§. 829.): So ſind alle Sinus einander parallel (§. 544.).

§. 835.

Die Linie AE, Tab. XXX. fig. 277, welche den Bogen AC in dem Punkt A berührt, auf dem Radio AB ſenkrecht ſtehet (§. 577.), und durch den verlängerten Schenkel BC in E durchſchnitten wird, heiſt der Tangent des Bogens AC, und des Winkels ABC, der dieſen Bogen zu ſeinem Maas hat, die verlängerte Linie BE hingegen der Secans des Bogens AC, und des Winkels ABC, der eben dieſen Bogen zu ſeinem Maas hat.

§. 836.

Auch bei dem ſtumpfen Winkel NBC iſt der Tangent und Secant des Winkels ABC, der mit ihm 180° ausmacht, der Tangent und Secant dieſes Winkels: Und weil der Winkel ABC um deſto gröſer wird, ie näher er dem rechten Winkel ABG komt (§. 496.); So nehmen auch die Tangenten und Secanten ſo, wie der Winkel von A nach G einem rechten Winkel näher komt, ſtets zu, und der Tangent iſt dem Radio AB gleich, wenn der Winkel ABC 45° hält (§. 557. und 558.): Wenn dieſer Winkel hin-

gegen einem rechten Winkel gleich wird; So gehet der Tangent und Secant in das Unendliche, weil der verlängerte Schenkel BG den Tangenten AE nicht berühren kan, indem ſie beide parallel ſind (§. 544.).

§. 837.

Weil der Sinus DC und Tangent AE auf dem Radio AB perpendicular ſtehen (§. 829. und 835.): So ſind auch beide einander parallel (§. 544.).

§. 838.

Der Bogen CG, Tab. XXX. fig. 277, den man noch zu AC hinzu thun muß, wenn der Bogen AG einen Quadranten, und 90° ausmachen ſoll, heiſt die Ergänzung oder das Complementum des Bogens AC, der Sinus CF aber des Bogens CG, und des Winkels CBG heiſt der Coſinus, oder der Sinus Complementi des Bogens AC. Das Stük AD des Radii hingegen, das zwiſchen dem Sinus CD, und der Peripherie enthalten iſt, der Sinus Verſus, oder der Querſinus des Bogens AC, und des Winkels ABC. Er heiſt auch Sagitta, oder der Pfeil. In Rückſicht auf den Sinus Verſus wird der §. 829. erklärte Sinus zuweiln der Sinus rectus, Sinus naturalis, Sinus primus, oder ſchlechtweg der Sinus genent.

§. 839.

§. 839.

Weil DC und BG, und DB und CF, Tab. XXX. fig. 277, parallel ſind (§. 834.): So iſt auch der Coſinus CF des Bogens AC dem Stük DB des Radii gleich, das von dem Sinus CD abgeſchnitten wird (§. 527.), und es iſt der Querſinus AD des Bogens AC der Unterſcheid zwiſchen dem Coſinus des Bogens AC, und dem Radio AB des Cirkels. Auch der ſpizze und der ſtumpfe Winkel haben einerlei Coſinum, und der Coſinus wird um deſto kleiner, ie näher der Winkel ABC dem rechten Winkel ABG komt, hingegen aber um deſto gröſer, ie näher der Punkt C an A zu liegen komt.

§. 840.

Der Tangent GH von dem Bogen CG, Tab. XXX. fig. 277, welcher die Ergänzung zu dem Bogen AC iſt, wird des Bogens AC und des Winkels ABC Cotangent, oder Tangens Complementi genennet, der Secans BH des Bogens CG aber des Bogens AC und des Winkels ABC Coſecans, oder Secans Complementi.

§. 841.

Der ſtumpfe Winkel hat ebenwol keinen eigenen Cotangenten und Coſecanten, ſondern der Cotangent und Coſecant des ſpizzen Winkels, der mit

ihm

ihm 180° ausmacht, iſt ſein Cotangent und Coſecant (§. 836.). Je näher der Punkt C an dem Punkt A iſt, um deſto gröſer iſt auch der Cotangent HG und Coſecant BH, und iener iſt dem Radio AB gleich, wenn der Winkel ABC 45° ausmacht (§. 557. und 558.), der Cotangent aber verſchwindet ganz, wenn der Bogen AC einem rechten Winkel gleich wird, unendlich iſt hingegen der Cotangent, wenn der Bogen AC keine Gröſe hat, und der Secant in AB fält.

§. 842.

Da $DB^2 = BC^2 - DC^2$, Tab. XXX. fig. 277, (§. 676.): So findet man auch, wenn der Sinus eines Bogens gegeben iſt, den Coſinum dieſes Bogens, wenn man das Quadrat des Sinus von dem Quadrat des Radii abziehet, und aus dem Reſt die Quadratwurzel ziehet (§. 678.), den Sinus Verſus AD aber, wenn man den Coſinus DB von dem Radio AB abziehet.

§. 843.

Da der $\angle BAE = \angle BDC$, Tab. XXX. fig. 277, (§. 837.), und der $\angle ABE = \angle ABE$ (§. 27.): So iſt auch der $\triangle BDC \sim \triangle BAE$, und $BD : DC = AB : AE$, und $BD : BC =$ ab: BE:

BE: (§. 586.). Da nun $BD = \sqrt{(CB^2 - CD^2)}$ (§. 676. und 842.): So kan auch der Tangent AE, und Secans BE gefunden werden, wenn der Sinus DC und Coſinus DB bekant ſind, oder weil der leztere aus dem erſten gefunden wird (§. 842.), wenn allein der Sinus DC gegeben iſt. Es iſt aber auch der Tangent $AE = \sqrt{(BE^2 - AB^2)}$, und der Secant $BE = \sqrt{(AB^2 + AE^2)}$ (§. 676.).

§. 844.

Weil der ∠BAE = dem ∠BGH, Tab. XXX. fig. 277 (§. 835. und 840.), und der ∠AEB = ∠HBG (§. 525. und 837.): So iſt auch der △ABE ∽ dem △BGH, und AE: AB = BG: GH (§. 586.), und weil BG = AB (§. 406.), AE: AB = AB: GH (§. 25.), folglich $GH = AB^2 : AE$ (§. 242.). Wenn demnach, da man aus dem Sinus eines Winkels den Tangenten AE finden kan (§. 843.), der Sinus eines Winkels bekant iſt: So kan man auch daraus ſeinen Cotangenten GH finden. Da ferner der Winkel D = ∠G (§. 829. und 840.), und der ∠DCB = dem ∠CBG (§. 525. und 834.): So iſt auch der △BDC ∽ dem △BGH, und DC: CB = BG: BH (§. 486.), und, weil CB = BG (§. 406.), DC: CB = CB: BH, folglich $BH = CB^2 : DC$ (§. 242.), und dem-

nach

nach findet man auch den Coſecanten zu einem Winkel, wenn der Sinus dieſes Winkels gegeben iſt.

§. 845.

Die Sinus, Tangenten, Secanten, Coſinus, Querſinus, Cotangenten, und Coſecanten von ähnlichen Bogen verhalten ſich, wie ihre verſchiedene Radii.

Beweis.

Wenn mit dem Radio AF, Tab. XXX. fig. 278, und AH ein Cirkel beſchrieben wird: So ſind die Bogen FC und HE des Winkels EAH einander ähnlich (§. 485.), und es iſt des Bogens FC Sinus CB, Tangent FG, Secant AG, Coſinus AB, Sinus verſus BF, Cotangent NM, und Coſecant AM, des Bogens HE Sinus aber ED, Tangent HI, Secant AI, Coſinus AD, Sinus verſus DH, Cotangent KL, und Coſecant AK. Der Beweis iſt daher dieſer. Weil die Winkel B, D, F und H einander gleich ſind (§. 834. und 837.), und der ∠ IAH = dem ∠IAH (§. 27.); So ſind auch die △ ABC, ADE, AFG und AHI einander ähnlich (§.586.): Und weil der ∠N = dem ∠ L (§. 835.), und der ∠ KAL = ∠ KAL (§. 27.); So iſt auch der △ANM ∽ dem △ALK (§. 586.). Dieſemnach verhält ſich der Radius AC: Radio AE =

der Sinus CB: Sinu ED, der Radius AF: Radio AH = der Tangent FG: Tangent HI, der Radius AF: Radio AH = der Secant AE: Secant IK, der Radius AC: Radio AE = der Coſinus AB: Coſinu AD, und, da auch AC: AE = AF: AH, folglich AF: AH = AB: AD (§. 212.), und AF: AH = AF — AB: AH — AD (§. 379. N. 4.), der Radius AC: Radio AE = der Querſinus AF — AB = FB: Querſinu AH — AD = DH (§. 217.), der Radius AN: Radio AL = der Cotangent NM des Bogens FC: Cotangenten LK des Bogens HE, und der Radius AN: Radio AL = der Coſecant AM des Bogens FC: Coſecant AK des Bogens HE.

§. 846.

Wenn man demnach den Radium AF und AH, Tab. XXX. fig. 278, in gleiche Teile teilet: So muß auch der Sinus, Tangens, Secans, Coſinus, Cotangens und Coſecans des Bogens FC ſo viel von den Teilen des Radii AF bekommen, als der Sinus, Tangent u. ſ. w., des Bogens HE von den Teilen des Radii AH bekomt, und es iſt bei einerlei Winkel, die Verhältnis aller Radiorum zu dem Sinus, dem Tangent, dem Secant, dem Coſinus, dem Cotangent, und Coſecant ſtets ein und eben dieſelbe, wenn man nur den Radium, er

mag

mag ſo gros oder ſo klein ſein, als er will, in gleich vielen gleichen Teilen annimt. Man kan alſo dieſe Verhältniſſe, wenn man zu dem Radio eine gewiſſe Anzahl von gleichen Teilen annimt, durch Zahlen ausdrukken, und es iſt die Zahl, welche der Sinus, Tangent u. ſ. w. eines Winkels iſt, bei einem ieden Radio ſtets ein und eben dieſelbe Zahl.

§. 847.

In dem, was wir ſo eben ausgeführt haben, liegt der Grund, warum man den Radium als 1 angenommen, und in 10000000 geteilet, hieraus aber gefunden hat, wie viele von ſolchen Teilen der Sinus, Tangent und Secant eines ieden Winkels von einer Minute bis zu 90° bekomt. Dieſe Zahlen hat man in Tabellen gebracht, und neben die Grade und Minuten der Winkel geſchrieben, und dieſelbe um der Bequemlichkeit willen ſo eingerichtet, daß die Winkel unter 45°, und ihre Complementa zu 90° neben einander ſtehen, eben daher aber ſtehet der Anfang der Winkel, der von 0 anfängt, und der Winkel von 90° vorn beiſammen, und man findet von vorne von 0 Grad bis zum 45° auf der linken, von 45° bis zum 90° von hinten aber auf der rechten Seite die Sinus, Tangentes und Secantes, welche leztere aber man heut zu Tage

ſelten gebraucht. Um der Multiplication und Diviſion in ſo groſen Zahlen überhoben zu ſein (§. 271. und 282.): So hat man die natürliche Sinus, natürliche Tangenten u. ſ. w. (§. 838.), durch Logarithmen ausgedrukt, die man die künſtlichen Sinus, künſtlichen Tangenten u. ſ. w. nent. Damit ich denen, welchen die Erfindung der Sinus, Tangenten, Secanten, und ihrer Logarithmorum unbekant iſt, das Vergnügen mache, daß ſie die Erfindung dieſer Dinge hier ſelbſt einſehen können, und nicht nötig haben, ſich andere Schriften dazu anzuſchaffen: So will ich die dazu gehörigen Aufgaben hier abhandeln, und zwar ſo, wie ſie der Baron Wolf in ſeinen Elementis Matheſeos vorgetragen hat, mich aber ſo kurz, wie möglich, zuſammen faſſen, und zuvor einige Säzze abhandeln. Andere Arten findet man in Stevins Cosmographie, in Gellibrands Trigonometria britannica, in Joach. Rhetici und Valent. Othonis Opere palatino de Triangulis, und anderen mehr.

§. 848.

Aus dem gegebenen Radio AC des Cirkels, Tab. XXX. fig. 279, die Seite AB des regulären Zehneks zu finden.

Aufloſung.

1) Es ſei AC = BC = AD, und daher ſchlieſen wir vor erſt ſo. Da der Bogen AB das

Maas

Maas des Winkels ACB iſt, und dieſer Bogen, weil die Sehne AB den zehnten Teil der Peripherie abſchneidet, $= 360^\circ : 10$; So iſt auch der Winkel $ACB = 36^\circ$, und die beiden Winkel BAC und ABC haben noch 144° (§. 546.): Und, weil $AC = BC$ (§. 406.); So iſt ſowol der Winkel BAC, als der Winkel $ABC = 144^\circ : 2 = 72^\circ$ (§. 550.). Der Winkel CBD iſt den Triangeln ABC und BCD gemein, und darum iſt in beiden Triangeln ein Winkel dem andern gleich, der $\angle DAC =$ dem $\angle ABC + \angle ACB = 72^\circ + 36^\circ = 108^\circ$, (§. 549.), und daher iſt der $\angle ADC + \angle ACD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ (§. 542.): Und weil $AC = AD$; So iſt der $\angle ADC =$ dem $\angle ACD$ (§. 550.), und ieder $= 72^\circ : 2 = 36^\circ$. Da alſo in den Triangeln BCA und BCD der $\angle B =$ dem $\angle B$, und der $\angle BCA =$ dem $\angle BDC$: So iſt auch der $\triangle BCA \sim$ dem $\triangle BCD$, und $BD : BC = BC : BA$ (§. 586.).

2) Nun ſei die Seite AB des regulären Zehneks $= x$, $AC = BC = AD = a$: So iſt, da $AB + AD = BD$, und $x = AB$, AD aber $= a$, $BD = x + a$.

3) Sezt man nun in der Proportion BD: BC = BC: BA die Werthe dieſer Linien: So iſt

$x + a : a = a : x$ (N. 2.)

Und daher $x^2 + ax = a^2$ (§. 228.).

Dividirt man nun in dieſer unreinen quadratiſchen Gleichung ax durch $2x$ (§. 345.); So iſt der Quotient $\frac{a}{2}$, und das Quadrat von $\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$. Addirt man daher beiderſeits $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ (§. 27.).

So iſt $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2$ (§. 85.)

Es iſt aber $a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$

und daher iſt $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$ (§. 25.)

Ausgezogen die $\sqrt{} = \sqrt{}$

So iſt $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 345.)

Abgezogen $-\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}a$ (§. 27.)

So iſt $x = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 340.)

Man bekomt alſo die Seite des regulären Zehneks, wenn man den Radium in das Quadrat erhebt, und von dieſem Quadrat $\frac{5}{4}$ nimt, daraus aber die Quadratwurzel ziehet (§. 187. 188. und 189.), und von dieſer den halben Radium abziehet.

§. 849.

§. 849.

Wenn man dieſemnach auf den Diameter AB, Tab. XXX. fig. 280, den Radium CD = a perpendicular aufrichtet, und CB in F in zwei gleiche Teile teilet, da $CF = \frac{1}{2}a$, alsdann aber DF aus F in E trägt; So iſt EC die Seite des regulären Zehneks: Denn $CD^2 + CF^2 = DF^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$, (§. 676.), folglich, da DF = FE, $FE - CF = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

§. 850.

Aus dem gegebenen Radio DC des Cirkels, Tab. XXX. fig. 281, die Seite AB des regulären Fünfeks zu finden.

Aufloſung.

1) Es ſei $DC = BC = a$, AB die zu findende Seite des regulären Fünfeks = x, und DB die Seite des regulären Zehneks $= \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ (§. 848.): So iſt $BE = AE = \frac{1}{2}AB$ (§. 570.), und, weil $AB = x$, $\frac{1}{2}AB = BE = \frac{1}{2}x$.

2) Weil nun in dem Triangel DEB der Winkel DEB ein rechter Winkel iſt (§. 570.): So iſt $DB^2 = DE^2 + EB^2$ (§. 676.).

3) Man erhebe $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = DB$ (N. 1.) in das Quadrat, und nehme an, damit dieſes deſto beſſer geſchehen könne, es ſei $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = m$: So iſt $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = m - \frac{1}{2}a$, und wenn man $m - \frac{1}{2}a$

mit ſich ſelbſt multiplicirt, das Quadrat von $m - \frac{1}{2}a = m^2 - am + \frac{1}{4}a^2$

4) Sezt man in dem Quadrat $m^2 - am + \frac{1}{4}a^2$ vor m^2 den Werth $\frac{5}{4}a^2$ (N. 3.); So iſt von $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = DB$ das Quadrat $\frac{5}{4}a^2 - am + \frac{1}{4}a^2$ (§. 25.): Und ſezt man an ſtatt m ſeinen Werth $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (N. 3.); So iſt von $\sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a = DB$ das Quadrat $\frac{5}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{1}{4}a^2$ (§. 25.) $= \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = DB^2$.

5) Da alſo $DB^2 = DE^2 + EB^2$ (N. 2.): So iſt, wenn man ſtatt DB^2 ſeinen Werth ſezzet, $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = DE^2 + EB^2$ (§. 25.).

6) Weil $DE = DC - EC$, und $DC = a$ (N. 1.): So iſt auch $DE = a - EC$.

7) Es iſt $BC^2 = BE^2 + EC^2$, und wenn man beiderſeits BE^2 abziehet, $BC^2 - BE^2 = EC^2$ (§. 87.), nun iſt aber $BC = a$ (N. 1.), und $BC^2 = a^2$, und daher iſt $a^2 - BE^2 = EC^2$, und, weil ferner $BE = \frac{1}{2}x$ (N. 1.), und $BE^2 = \frac{1}{4}x^2$, ſo iſt $a^2 - \frac{1}{4}x^2 = EC^2$, und wenn man beiderſeits die Quadratwurzel ausziehet $\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = EC$.

8) Weil $DE = a - EC$ (N. 6.), und $EC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (N. 7.): So iſt auch $DE = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 25.).

9) Jezt nehme man an, es ſei $\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = c$: So iſt $DE = a - c$ (N. 8.). Erhebt man nun

nun beide Glieder dieſer Gleichung in das Quadrat: So iſt $DE^2 = a^2 - 2ac + c^2$ (§. 305.).

10) Man ſezze an ſtatt c wieder $\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (N. 9.); So iſt $DE^2 = a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + c^2$ (§. 25.): Und an ſtatt c^2 ſezze man $a^2 - \frac{1}{4}x^2$; So iſt $DE^2 = a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + a^2 - \frac{1}{4}x^2$, und $DE^2 = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 302.).

11) Da $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = DE^2 + EB^2$ (N. 5.), und $DE^2 = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (N. 10.): So iſt auch $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + EB^2$ (§. 25.). Weil ferner $EB = \frac{1}{2}x$ (N. 1.), und alſo $\frac{1}{2}x . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x^2 = EB^2$: So iſt $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2a^2 - \frac{1}{4}x^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + \frac{1}{4}x^2$ (§. 25.), $= \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = 2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 202.). Da nun auch $2a^2 = \frac{8}{4}a^2$: So iſt $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{8}{4}a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 25.).

12) In der Gleichung $\frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{8}{4}a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ ſubtrahire man von beiden Gliedern $\frac{6}{4}a^2$: So iſt $-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{2}{4}a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 304.).

13) In der Gleichung $-a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{2}{4}a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ addire man zu beiden Gliedern $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$: So iſt $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{2}{4}a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} + 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)}$ (§. 303.), und $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{2}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$ (§. 302.).

 14) Zu

14) Zu den Gliedern der Gleichung $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a^2$ addire man ferner $a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: So iſt $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 303.), und $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 302.).

15) Dividirt man iezt in der Gleichung $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ mit a: So iſt $2\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 306.).

16) Man erhebe die Gleichung $2\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}x^2)} = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ in das Quadrat; So iſt $4(a^2 + \frac{1}{4}x^2) = \frac{1}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{5}{4}a^2$: Und multiplicirt man im erſten Glied der Gleichung wirklich mit dem Coefficient 4; So iſt $4a^2 - \frac{4}{4}x^2 = \frac{1}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{5}{4}a^2$, und $4a^2 - \frac{4}{4}x^2 = \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 302.), und, da $\frac{4}{4}x^2 = x^2$, $4a^2 - x^2 = \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

17) Addirt man iezt in der Gleichung $4a^2 - x^2 = \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ zu beiden Gliedern x^2: So iſt $4a^2 = x^2 + \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{2}a^2}$, und, da $4a^2 = \frac{16}{4}a^2$, ſo iſt $\frac{16}{4}a^2 = x^2 + \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 25.)

18) Von den Gliedern der Gleichung $\frac{16}{4}a^2 = x^2 + \frac{6}{4}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ ziehe man $\frac{6}{4}a^2$ ab: So iſt $\frac{10}{4}a^2 = x^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§. 87. und 304.).

19) In der Gleichung $\frac{10}{4}a^2 = x^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ ziehe man ferner beiderſeits ab $a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: So iſt $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = x^2$ (§. 87. und 304.). Weil nun $\frac{10}{4}a^2 = \frac{4}{4}a^2 + \frac{6}{4}a^2$, und $\frac{4}{4}a^2 = a^2$: So

iſt

iſt $a^2 + \frac{5}{4} a^2 = \frac{10}{4} a^2$ (§. 25.), und demnach iſt $a^2 + \frac{5}{4} a^2 - a \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = x^2$.

20) Vermöge N. 1. iſt $a = DC$, und alſo $a^2 = DC^2$, und daher $DC^2 + \frac{5}{4} a^2 - a \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = x^2$ (N. 19.), es iſt aber auch $\frac{5}{4} a^2 - a \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = DB^2$ (N. 4.), und daher iſt $DC^2 + DB^2 = x^2$ (§. 25.). Nun iſt aber DC^2 das Quadrat des Radii, oder des regulären Sechseks (§. 642.), und DB^2 das Quadrat von der Seite des regulären Zehneks (N. 1.), x^2 aber das Quadrat von der Seite des regulären Fünfeks, und daher iſt das Quadrat der Seite des regulären Sechseks, und das Quadrat der Seite des regulären Zehneks, dem Quadrat der Seite des regulären Fünfeks gleich. Wenn man dieſemnach die Seite des Zehneks findet (§. 848.), und dieſe ſowol, als den Radium in das Quadrat erhebet, aus der Summe dieſer Quadrate aber die Quadratwurzel ziehet: So bekomt man die Seite des regulären Fünfeks.

§. 851.

Wenn man daher den Radium CD auf den Diameter AB, Tab. XXX. fig. 280, perpendicular aufrichtet, CB in F in zwei gleiche Teile teilet, und mit DF aus F den Bogen DE beſchreibt, und die Linie DE ziehet; So iſt ED die Seite des regulären Fünfeks: Denn DC iſt der Radius, und CE die Seite des regulären Zehneks (§. 676. und 849.).

§. 852.

Den Sinum eines Winkels von 30° zu finden.

Auflöſung.

Weil die Seite AC des regulären Sechseks, Tab. XXX. fig. 282, dem Radio AB gleich iſt, (§. 642.), die Seite dieſes Sechseks aber die Sehne eines Bogens von 60° (§. 629. Bew.), und die halbe Sehne dieſes Bogens der Sinus von 30° iſt (§. 830.): So bekomt man auch den Sinum des Winkels von 30°, wenn man den Radium, oder den Sinum totum (§. 833.), durch 2 dividiret, da dann der Quotient der verlangte Sinus iſt.

§. 853.

Den Sinum eines Winkels von 45° zu finden.

Auflöſung.

Da die Seite BC des Viereks BCFG, Tab. XXX. fig. 283., die Sehne des Bogens BEC von 90° (§. 629. Bew.), und CD der Sinus von 45° iſt (§. 830.), BA und AC aber die Radii ſind (§. 405.): So erhebe man den Sinum totum AC (§. 833.) in das Quadrat, und duplire daſſelbe, weil BA = AC (§. 406.), alsdann aber ziehe man aus dieſem Product die Quadratwurzel, ſo bekomt man BC (§. 676.),

und

und die Sehne von 90°, dieſe nun halbire man, ſo iſt das Verlangte geſchehen.

§. 854.

Den Sinum eines Winkels von 36° zu finden.

Auflöſung.

Weil die Seite des regulären Fünfeks die Sehne eines Bogens von 72° (§. 629. Bew.), und die halbe Sehne von dieſem Bogen der Sinus des Winkels von 36° iſt (§. 830.): So finde man die Seite des regulären Fünfeks, man erhebe nemlich die Seite des regulären Zehneks, und den Sinum totum in das Quadrat, addire beide, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel (§. 850.), dieſe aber halbire man, ſo iſt der Sinus von 36° gefunden.

§. 855.

Aus dem gegebenen Sinu DB eines Bogens AD, Tab. XXX. fig. 284, den Coſinum BC = DE zu finden.

Auflöſung.

Man erhebe den Sinum totum DC in das Quadrat, aber auch den Sinum DB, und ziehe dieſes Quadrat von ienem ab, ſo bekomt man das Quadrat BC^2, aus dieſem nun ziehe man die Quadratwurzel (§. 187. 188. und 189.): So iſt das Verlangte geſchehen (§. 842.).

§. 856.

§. 856.

Aus dem gegebenen Sinu CD eines Bogens AC, Tab. XXX. fig. 285, und dem Coſinu DB den Sinum CF = AF des halben Bogens CE = AE zu finden.

Aufloͤſung.

Man ziehe den Coſinum DB von dem Sinu toto ab; So bekomt man den Sinum verſum AD (§. 842.), dieſen nun und den Sinum CD erhebe man in das Quadrat, man addire beide, ziehe aus ihrer Summe die Quadratwurzel AC (§. 187. 188. und 189.), und halbire dieſe: So bekomt man den Sinum CF des halben Bogens CE (§. 676. und 830.).

§. 857.

Aus dem gegebenen Sinu AF, Tab. XXX. fig. 285, und dem Coſinu FB eines Bogens AE, den Sinum CD des doppelten Bogens AC zu finden.

Aufloͤſung.

Weil der ∠ AFB = dem ∠ ADC (§. 829.), und der ∠ FAB = dem ∠ CAB (§. 27.): So iſt der △ AFB ∽ dem △ ADC, und AB : BF = AC : CD (§. 586.). Wenn man daher zum Sinu toto AB, dem Coſinu FB, und dem doppelten Sinu AF = AC des Bogens AE die vierte geo-

metriſche

metriſche Proportionalzahl findet (§. 240.): So bekomt man den verlangten Sinum.

§. 858.

Aus zwei gegebenen Sinus GH und IF, Tab. XXX. fig. 286, den Sinum FL von dem halben Bogen GF zu finden, welcher halbe Bogen die halbe Differenz iſt zwiſchen den Bogen AG und AF.

Aufloſung.

Weil GH, FI und BC, und AB, GE und FD parallel ſind (§. 834.): So iſt HG = KI, und KE = FD (§. 527.), und der Winkel GKF ein rechter Winkel (§. 544.). Dieſemnach ziehe man den kleinern Sinum HG von dem gröſeren IF ab: So bekomt man den Unterſcheid FK. Aus dem kleineren Sinu HG finde man den Coſinum GE, und aus dem gröſeren Sinu FI den Coſinum FD (§. 855.), und ziehe dieſen von ienem ab: So bekomt man den Unterſcheid GK dieſer beiden Sinus. Man erhebe die Unterſchiede FK und GK in das Quadrat, und addire dieſe, aus ihrer Summe aber ziehe man die Quadratwurzel FG (§. 187. 188. und 189.), ſo bekomt man GF (§. 676.), und den Sinum FL von dem halben Bogen GF des Unterſcheids beider Bogen AG und AF, wenn man die Sehne GF halbirt.

§. 859.

§. 859.

Aus zwei gegebenen Sinus FG und DE zweier Bogen AF und AD, Tab. XXX. fig. 287, deren Unterſcheid DF nicht über 45 Minuten iſt, den Sinum IL des Bogens AI zu finden, der zwiſchen dieſe Sinus fält.

Auflöſung.

Weil IK parallel DH (§. 834.): So iſt der △ DHF ∽ dem △ IKF, und weil der Bogen DF nur einige Minuten hat, und, ohne einen merklichen Fehler, vor eine gerade Linie genommen werden kan, DF : DH = IF : IK (§. 527. und 589.). Wenn man demnach zu dem Unterſcheid DF der Bogen von denen gegebenen Sinus, zu dem Unterſcheid DH der gegebenen Sinus, und dem Unterſcheid IF des Bogens AF des kleineren Sinus GF, und des Bogen AI von dem zu ſuchenden Sinus LI die vierte geometriſche Proportionalzahl findet (§. 240.): So bekomt man IK. Addirt man nun IK zu dem kleinern Sinu FG = KL (§. 527. und 834.): So bekomt man den verlangten Sinum IL.

§. 860.

Aus dem gegebenen Sinu DE einer Minute, oder 60'', Tab. XXXI. fig. 288, den Sinum BC ein, oder etlichen Secunden zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

Weil die Bogen AB und AD ſo gar klein ſind: So kan man den Bogen ABD, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, vor eine gerade Linie annehmen. Da nun BC parallel DE (§. 834.); So iſt der △ ADE ∽ dem △ ABC, und AD : DE = AB : BC (§. 589.). Wenn man daher zu AD, DE, und AB die vierte geometriſche Proportionalzahl findet (§. 240.); So bekomt man den verlangten Sinus BC, und ſo kan man auch den Sinum ein, oder etlichen Tertien finden.

§. 861.

Aus dem Sinu von 30° (§. 852.), dem Sinu von 15° (§. 856.), dem Sinu von 45° (§. 853.), und dem Sinu von 36° (§. 854.) eine Sinustafel zu verfertigen.

Auflöſung.

1) Man finde aus dem Sinu von 36° den Sinum von 18°, 9°, 4° 30', 2° 15' (§. 856.), den Sinum 54°, 72°, 81°, 85° 30', 87° 45' (§. 855.), den Sinum 27°, 13° 30', 6° 45', 40° 30', 20° 15', 42° 45' (§. 856.), den Sinum 63°, 76° 30', 83° 15', 49° 30', 69° 45', 47° 15' (§. 855.), den Sinum von 31° 30', 15° 45', 38° 15', 24° 45' (§. 856.), den Sinum 58° 30', 74° 15', 51° 45', 65° 15' (§. 855.),

endlich den Sinum 29° 15' (§ 856.), und deſſen Coſinum 60° 45' (§. 855.).

2) Aus dem Sinu von 45° finde man den Sinum von 22° 30' und 11° 15' (§. 856.), den Sinum 67° 30' und 78° 45' (§. 855.), und endlich den Sinum 33° 45' (§. 856.), und den Sinum 56° 15' (§. 855.).

3) Aus dem Sinu von 30°, und 54° finde man den Sinum von 12° (§. 858.).

4) Man finde aus dem Sinu von 12° den Sinum von 6°, 3°, 1° 30', 45' (§. 856.), den Sinum von 78°, 84°, 87°, 88° 30', 89° 15' (§ 855.), den Sinum von 39°, 19° 30', 9° 45', 42°, 21°, 10° 30', 5° 15', 43° 30', 21° 45', 44° 15' (§. 856.), den Sinum von 51°, 70° 30', 80° 15', 48°, 69°, 79° 30', 84° 45', 46° 30', 68° 15', 45° 45' (§. 855.), den Sinum von 25° 30', 12° 45', 35° 15', 24°, 34° 30', 17° 15', 39° 45', 23° 15' (§. 856.), den Sinum 64° 30', 77° 15', 54° 45', 66°, 55° 30', 72° 45', 50° 15', 66° 45' (§. 855.), den Sinum von 32° 15', 33°, 16° 30', 8° 15', 27° 45' (§. 856.), den Sinum von 57° 45', 57°, 73° 30', 81° 45', 62° 15' (§. 855.), den Sinum von 28° 30', 14° 15', 30° 45' (§. 856.), und dieſer ihre Coſinus 61° 30', 75° 45',

$75^{\circ}45'$, $53^{\circ}45'$ (§. 855.), endlich den Sinum von $30^{\circ}45'$ (§. 856.), und deſſen Coſinum $59^{\circ}15'$ (§. 855.).

5) Aus dem Sinu von 15° finde man den Sinum von $7^{\circ}30'$, und $3^{\circ}45'$ (§. 856.), den Sinum von 75°, $82^{\circ}30'$, $86^{\circ}15'$ (§. 855.), den Sinum $37^{\circ}30'$, $18^{\circ}45'$, $41^{\circ}15'$ (§. 856.), und dieſer ihre Coſinus $52^{\circ}30'$, $71^{\circ}15'$, $48^{\circ}45'$ (§. 855.), endlich den Sinum von $26^{\circ}15'$ (§. 856.), und deſſen Coſinum $63^{\circ}45'$ (§. 855.).

6) Wenn man nun dieſe Sinus in Ordnung bringt, und ſie ſo, wie ſie bis zu 90° anwachſen, unter einander ſchreibt: So wird man gewahr, daß der Unterſcheid zweier auf einander folgenden Sinus $45'$ iſt, und daher finde man die Sinus, die zwiſchen ſie fallen, nach der Anweiſung des 859. §. Endlich

7) finde man die Sinus der Secunden von 1 bis 60, wie wir im 860. §. gezeigt haben, ſo bekomt man die verlangte Tafel.

§. 862.

Aus dem gegebenen Sinu CD, Tab. XXX. fig. 277, den Tangenten AE zu finden.

Aufloͤſung.

Man ſuche zu dem Coſinu DB, dem Sinu DC, und dem Sinu toto die vierte geometriſche Proportionalzahl AE: So iſt der Tangent gefunden (§. 843).

§. 863.

Aus dem gegebenen Sinu CD, Tab. XXX. fig. 277, eines Winkels ſeinen Secanten BE zu finden.

Aufloſung.

Man ſuche zu dem Coſinu DB, dem Radio BC, und dem Radio AB die vierte, oder eigentlich die dritte geometriſche Proportionalzahl (§. 243. und 843.), ſo iſt der Secant gefunden.

Findet man aus dem Sinu CD=BF, den Coſinum CF=DB, zu BF, CF, und BG, und BF, BC und BG aber den Tangenten GH, und Secanten BH (§. 862. und 863.): So bekomt man den Cotangenten GH, und Coſecanten BH, man findet aber auch dieſe, wenn man den Sinum totum in das Quadrat erhebt, und dieſes durch den Tangenten dividirt, oder wenn man den Sinum totum in das Quadrat erhebt, und dieſes durch den Sinum dividirt (§. 844.).

§. 864.

Den Logarithmum eines ieden Sinus zu finden.

Aufloſung.

Weil die Tafeln der Logarithmorum nur die Logarithmi vor die Zahlen von 1 bis 10000, oder bis 100000 enthalten: So ſind in denſelben die Logarithmi

rithmi der Sinus, die viel gröſer ſind, nicht enthalten, und daher muß man dieſe Logarithmi nach der Aufgabe, die im 287. §. enthalten iſt, ausrechnen. Es iſt inzwiſchen dieſe Erfindung der Logarithmen der Sinus mit einer ganz unbeſchreiblichen Mühe verknüpft, und darum findet man die Logarithmen der Sinus auf die folgende Art.

1) Man nehme von dem Sinu, wozu man den Logarithmum finden will, vorn, oder zur linken Hand 4, oder 5 Zahlen weg, und ſuche zu dieſen Zahlen in den Tafeln den Logarithmum, zum Exempel von dem Sinu 2756374 des Winkels von 16° nehme man die Zahlen 2756 vorn weg, und ſuche ihren Logarithmum 3.4402792.

2) Man vermehre zur Linken die erſte Zahl dieſes Logarithmi mit ſo vielen Einheiten, als zur rechten Hand Zahlen übrig geblieben ſind, in unſerem Exempel die Characteriſtica 3 mit 3, weil 3 Zahlen von dem gegebenen Sinu übrig geblieben ſind; So iſt 6.4402792 der Logarithmus von 2756000.

3) Man ziehe den aufgeſuchten Logarithmum von dem nächſt gröſeren, und den Logarithmum 3.4402792 der Zahl 2756 von dem Logarithmo 3.4404368 der Zahl 2757 ab; So weis man ihre Differenz 1576 und auch die Differenz der Zahlen 2756000 und 2757000, deren Unterſcheid 1000 iſt.

4) Man ſuche zu dem Unterſcheid dieſer Zahlen, wozu die aufgeſuchte Logarithmi gehören, zu dem Unterſcheid der Logarithmórum dieſer Zahlen, und den bei N. 1. übrig gebliebenen Zahlen die vierte geometriſche Proportionalzahl (§. 240.), alſo in unſerem Fall zu 1000, 1576 und 374 die Zahl 589, dieſe nun addire man zu dem bei N. 2. gefundenen Logarithmo 6.4402792 von 2756000; So iſt die Summe 6.4403381, und wenn man die Characteriſtica 6 in 9 verwandelt, weil die Sinus, wozu man die Logarithmi ſucht, in den groſen Tafeln aus gröſeren Zahlen beſtehen, als wie in den gemeinen Tafeln, der Logarithmus des Sinus von 16° = 9.4403381.

§. 865.

Es hat dieſe Berechnung keine Genauigkeit, die Logarithmi aber ſind von den wahren nicht viel unterſchieden, beſonders wenn man die groſen Tafeln gebrauchet. Man hat den Radium in 10000000000 Teilen angenommen, und dazu die Sinus gefunden: Weil aber die Rechnung damit zu weitläuftig iſt; So hat man in den gemeinen Tafeln den Radium nur in 10000000 Teilen beibehalten, und auch drei Zahlen zur Rechten von den Sinus, Tangenten u. ſ. w. weggelaſſen (§. 847.), die Logarithmi aber ungeändert beibehalten, weil ſie nur, wenn man mit ihnen

allein

allein rechnet, als Logarithmi der Linien betrachtet werden müſſen, die zu gewiſſen Winkeln gehören.

§. 866.

Den Logarithmum eines Tangenten zu finden.

Aufloſung.

Weil ſich der Coſinus zu dem Sinu verhält, wie der Sinus totus zum Tangenten (§. 862.), und die Logarithmi das Multipliciren in Addiren, und Dividiren in Subtrahiren verwandeln (§. 271. und 282.): So addire man den Logarithmum des Sinus, und Sinus totius, und ziehe von der Summe den Logarithmum des Coſinus ab; So bekomt man den Logarithmum des Tangenten.

§. 867.

Den Logarithmum eines Secanten zu finden.

Aufloſung.

Da ſich der Coſinus zu dem Radio verhält, wie eben dieſer Radius zum Secanten (§. 863.), und die Logarithmi das Multipliciren in Addiren, und das Dividiren in Subtrahiren verwandeln (§. 271. und 282.): So addire man den Logarithmum des Sinus totius zu ſich ſelbſt, oder multiplicire ihn mit 2, und ziehe von dem Product den Logarithmum des Coſinus ab; So erhält man den Logarithmum des Secanten.

§. 868.

In einem rechtwinkelichten Triangel ABE, Tab. XXX. fig. 277, aus der Hypothenuſa BE, und einem ſpizzen Winkel EBA die übrigen Seiten AE und AB zu finden.

Auflöſung.

Weil der ∠ A = dem ∠ D (§. 837.), und der ∠ EBA = dem ∠ EBA (§. 27.); So iſt der △ BDC ∽ dem △ ABE, und CB : CD = BE : EA (§. 586.). Da nun CB der Radius, und CD der Sinus des gegebenen Winkels iſt: So iſt der Sinus totus : Sinu des Winkels CBE = BE : AE: Und weil aus eben dem Grund BC : DB = BE : AB, BC aber der Radius, und DB der Coſinus iſt; So iſt auch der Sinus totus : Coſinu des Winkels CBD, oder dem Sinu des Winkels BCD = BE : AB. Wenn man daher den Sinum totum BC, den Sinum CD, und den Coſinum DB in denen Tabellen aufſchlägt, und zu dem Sinu toto, dem Sinu DC, und der Hypthenuſa BE, die vierte geometriſche Proportionalzahl findet; So bekomt man die Seite AE: Und wenn man die vierte geometriſche Proportionalzahl zu dem Sinu toto BC, dem Coſinu DB, und der Hypothenuſa BE ſuchet; So erhält man die Seite AB. Weil inzwiſchen bei dieſer Rechnung das Multipliciren und Dividiren ſehr beſchwerlich iſt:

So

So ſchlågt man in den Tabellen, ſtatt der Sinus, ihre Logarithmen auf, eben ſo ſchlågt man aber auch den Logarithmum der Hypothenuſa auf, und addirt die Logarithmen des andern und dritten Glieds, von der Summe aber ziehet man den Logarithmum des erſten Glieds ab, und ſuchet zu dem Logarithmo, der übrig bleibt, unter den gemeinen Zahlen die Zahl auf, welcher er am nåchſten komt, ſo ſtehet daneben die Zahl, wovon er der Logarithmus iſt, und dieſe iſt die verlangte Seite.

Exempel.

Es ſei die Hypothenuſa BE = $2^{\circ}\,3^{I}\,4^{II}$, und der Winkel EBA = $32^{\circ}\,12^{I}$: So iſt die Rechnung dieſe.

Log. des Sin. des ∠ EBA = $32^{\circ}\,12^{I}$ = 9.7266264
Log. von BE = $2^{\circ}\,3^{I}\,4^{II}$ = 2.3692159
12.0958423
Log. Sin. tot. BC = 10.0000000
Log. von AE = 2.0958423

Schlågt man nun dieſen in den Tabellen unter den gemeinen Zahlen auf: So komt ihm der Logarithmus von der Zahl 124 am nåchſten, und die Linie AE hat $1^{\circ}\,2^{I}\,4^{II}$.

2) Da der Winkel EBA = $32^{\circ}\,12^{I}$: So iſt der ∠ BEA = $57^{\circ}\,48^{I}$ (§. 551.). Wenn nun,

wie vorhin, BC = $2^{\circ}3'4''$; So iſt die Rechnung dieſe.

Log. des Sin. des ∠ BEA = $57^{\circ}48'$ = 9.9274695
Log. von BE = $2^{\circ}3'4''$ = 2.3692159

12.2966854
Log. des Sin. tot BC = 10.0000000

Log. von AB = 2.2966854

welchem in den Tabellen 198 am nächſten komt, und es iſt alſo die Linie AB = $1^{\circ}9'8''$.

§. 869.

Aus einem ſpizzen Winkel BAC eines rechtwinkelichten Triangels, Tab. XXXI. fig. 289, und der Seite AC, die Seite BC zu finden, die dem gegebenen Winkel entgegen ſtehet.

Auflöſung.

Weil der △ AED ∽ dem △ ACB (§. 868.), und AE: ED = AC: CB (§. 586.), AE aber der Sinus totus, und DE der Tangent iſt: So ſchlage man den Logarithmum des Sinus totius, den Logarithmum des Tangenten von dem gegebenen Winkel, und den Logarithmum der Seite AC in den Tabellen auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den erſteren Logarithmum ab, den Logarithmum aber, welcher dieſem Reſt am nächſten komt, ſuche man in den Tafeln auf; So iſt die Zahl, wovon er der Logarithmus iſt, die Seite BC.

Es

Es ſei der $\angle A = 21^{\circ}$, und $AC = 3^{\circ}4^{\prime}8^{\prime\prime}$: So rechnen wir ſo.

Log. des Tang. ED vom $\angle A\ 21^{\circ} = 9.5841774$
Log. von $AC = 3^{\circ}4^{\prime}8^{\prime\prime} = 2.5415792$

12.1257566
Log. des Sin. tot. $AE = 10.0000000$

Log. von $CB = 2.1257566$

Schlägt man nun dieſen in den Tabellen auf: So komt ihm der Logarithmus 133 am nächſten, und es iſt $CB = 1^{\circ}3^{\prime}3^{\prime\prime}$.

Iſt AC und der Winkel ABC gegeben: So kan man den Winkel BAC finden, wenn man ienen von 90° abziehet (§. 551.), und alsdann nach der Aufgabe verfahren.

§. 870.

Aus einer Seite AC und dem ſpizzen Winkel BAC, Tab. XXXI. fig. 290, die Hypothenuſa AB zu finden.

Auflöſung.

Weil der $\triangle AED \backsim$ dem $\triangle ACB$ (§. 868.), und $AE : AD = AC : AB$ (§. 586.), AE aber der Coſinus, und AD der Radius iſt: So ſchlage man den Logarithmum des Coſinus des gegebenen Winkels BAC, und den Logarithmum der Seite AC auf, man addire den Logarithmum von AC, und den Logarithmum des Sinus totius AD, und ziehe

ziehe den Logarithmum des Coſinus von dieſer Summe ab, den Logarithmum aber, welcher dem Reſt am nächſten komt, ſchlage man in den Tabellen auf; So iſt die Zahl, wovon dieſer der Logarithmus iſt, die Hypothenuſa AB.

Es ſei der Winkel $A = 2\overset{\circ}{1}$, und $AC = \overset{\circ}{3}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{8}$: So iſt die Rechnung dieſe.

Log. des Sin. tot. AD =	10.0000000
Log. von $AC = \overset{\circ}{3}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{8}$ =	2.5415792
	12.5415792
Log. des Coſin. des ∠ $A = 2\overset{\circ}{1}$ =	9.9701517
Log. von AB =	2.5714275

Wenn man nun dieſen in den Tabellen aufſchlägt: So komt ihm der Logarithmus von 372 am nächſten, und es iſt $AB = \overset{\circ}{3}\overset{\prime}{7}\overset{\prime\prime}{2}$.

Weil AE: AD = AC: AB, Tab. XXXI. fig. 289, und alſo der Sinus totus: Secanten = AC: AB: So kan man auch durch dieſe Proportion die Hypothenuſa AB finden, die Secanten ſind inzwiſchen nicht in allen Tafeln.

§. 871.

Aus den Cathetis AC und BC, Tab. XXXI. fig. 289, eines rechtwinkelichten Triangels, den ſpizzen Winkel A zu finden.

Aufloͤſung.

Da der △ AED ∽ dem △ ACB (§. 868.), und AC: CB = AE: ED (§. 586.), AE aber

der

der Sinus totus, und ED der Tangent iſt: So ſchlage man die Logarithmen von AC, CB, und dem Sinu toto in den Tabellen auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den Logarithmum von AC ab, ſo bekomt man den Logarithmum des Tangenten DE, die Zahl nun, welche dieſem am nächſten komt, ſuche man in den Tabellen unter den Tangenten auf; So findet man daneben die Gröſe des Winkels BAC.

Es ſei AC = $\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{2}$, und CB = $\overset{\circ}{3}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{6}$: So iſt die Rechnung dieſe.

Log. von CB = $\overset{\circ}{3}\overset{\prime}{4}\overset{\prime\prime}{6}$ =	2.5390761
Log. Sin. tot. AE =	10.0000000
	12.5390761
Log. von AC = $\overset{\circ}{4}\overset{\prime}{5}\overset{\prime\prime}{2}$ =	2.6551384
Log. tang. DE =	9.8839377

Schlägt man iezt dieſen Logarithmum in den Tabellen auf: So komt ihm der Logarithmus des Tangenten von $37^{\circ}\,26'$ am nächſten, und es hat alſo der Winkel A $37^{\circ}\,26'$.

Ziehet man dieſen Winkel von 90° ab; So bekomt man den Winkel ABC (§. 551.).

Da man ſich alſo durch dieſe Aufgabe einen ſpizzen Winkel bekant macht: So kan man aus den Cathetis

Cathetis die Hypothenuſe durch die Logarithmi finden (§. 870.).

§. 872.

Aus der Hypothenuſa AB, und der Seite BC eines rechtwinkelichten Triangels ABC, Tab. XXXI. fig. 290, die ſpizzen Winkel zu finden.

Auflöſung.

Weil der △ AED ∽ dem △ ACB (§. 868.), und AB : BC = AD : DE (§. 586.), AD aber der Radius, und DE der Sinus des Winkels BAC iſt; So ſchlage man die Logarithmi von AB, von BC, und dem Sinu toto in den Tabellen auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den erſteren ab: So bekomt man den Logarithmum des Sinus DE. Schlägt man nun den Logarithmum in den Tabellen auf, der dieſem am nechſten komt: So bekomt man den Winkel BAC, den Winkel ABC aber, wenn man ienen von 90° abziehet (§. 551.).

Es ſei AB = $5^{0}4^{I}2^{II}$, BC = $5^{0}0^{I}2^{II}$; So rechnen wir ſo.

Log. von BC = $5^{0}0^{I}2^{II}$ = 2.7007073
Log. Sin. tot. AD = 10.0000000

12.7007073
Log. von AB = $5^{0}4^{I}2^{II}$ = 2.7339993

Log. des Sinus DE des ∠ BAC = 9.9667080

Schlägt

Schlägt man dieſen in den Tabellen auf: So komt ihm der Logarithmus von $67^{\circ} 51'$ am nächſten, und es iſt alſo der Winkel BAC = $67^{\circ} 51'$.

Da AB: BC = AD: DE, und DE der Coſinus des Winkels ABC iſt: So iſt auch AB: BC = der Sinus totus: Coſinu des Winkels BAC, und demnach kan man hierdurch den Winkel ABC finden, den die Seiten AB und BC einſchlieſen.

Da auch AC: AB = AE: AD, Tab. XXXI. fig. 289, AE aber der Sinus totus, und AD der Secant iſt: So iſt auch, wenn die Seiten AC und AB gegeben ſind, und man den Winkel BAC finden will, den ſie einſchlieſen, AC: AB = der Sinus totus AE: Secant AD, und demnach kan man auch nach dieſer Proportion den Winkel finden, welchen die Hypothenuſa AB, und die Seite AC einſchlieſen.

§. 873.

In einem ieden Triangel ABC, Tab. XXXI. fig. 291, verhalten ſich die Seiten wie die Sinus der ihnen entgegen ſtehenden Winkeln.

Beweis.

Da man über einen ieden Triangel ABC einen Cirkel beſchreiben kan, und alsdann die Winkel A, C, und B dieſes Triangels Winkel an der Peripherie,

ihre

ihre entgegen ſtehende Seiten BC, AB, und AC aber die Sehnen von den Bogen ſind, die von den Schenkeln dieſer Winkel abgeſchnitten werden (§. 573.), und die Winkel an der Peripherie den halben Bogen, worauf ſie ſtehen, zu ihrem Maas haben (§. 560.): So iſt auch $\frac{1}{2}$ BC der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}$ BC, folglich der Sinus des Winkels A (§. 830.), $\frac{1}{2}$ AC iſt der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}$ AC, und der Sinus des Winkels B, und $\frac{1}{2}$ AB iſt der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}$ AB, und des Winkels C. Da nun BC: AC = $\frac{1}{2}$ BC: $\frac{1}{2}$ AC (§. 216.); So iſt auch BC: AC = Sinus A: Sinu B: Und da AC: AB = $\frac{1}{2}$ AC: $\frac{1}{2}$ AB (§. 216.); So iſt AC: AB = Sinus B: Sinu C: Und weil endlich AB: BC = $\frac{1}{2}$ AB: $\frac{1}{2}$ BC (§. 216.); So iſt AB: BC = Sinus C: Sinu A, und es verhalten ſich alſo in einem ieden Triangel die Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegen ſtehenden Winkeln.

§. 874.

Es hat dieſer Lehrſaz einen ſehr groſen Nuzzen, er erſtrekt ſich auf alle Triangel, und durch ihn kan man alle Fragen auflöſen, die bei den Triangeln vorkommen.

§. 875.

In einem ieden Triangel ABC, Tab. XXXI. fig. 292, verhalten ſich die Seiten AC und CB

zu ihrer Differenz, wie der Tangent der halben Summe, der an der Grundlinie AB befindlichen Winkeln CAB und CBA zu dem Tangent der halben Differenz dieſer Winkel.

Beweis.

Man verlängere die Seite AC, die dem größten Winkel entgegen ſtehet bis in D, und mache $CD = CB$, und $CE = CB$, man ziehe BE und DG durch die Punkten D und B, mit BE aber durch den Punkt A die Linie AG, und ſchlieſe ſo.

1) Weil $DA = DC + CA$, (§. 30.), und $DC = CB$; So iſt $DA = AC + CB$ (§. 25.), und alſo DA die Summe der Seiten AC und CB.

2) Die Linie $EA = CA - CE$, CE aber iſt $= CB$, und daher iſt $EA = CA - CB$ (§. 25.), und alſo EA der Unterſcheid der Seiten CA und CB.

3) Da $DC = CB = BE$: So läſt ſich aus C über DBE ein halber Cirkel beſchreiben, und daher iſt der $\angle mp = 90^\circ$ (§. 562.), nun iſt aber GA # BE, und daher iſt der $\angle mp =$ dem $\angle u = 90^\circ$ (§. 495. und 525.). Da alſo der $\angle mp =$ dem $\angle u$, und der $\angle o =$ dem $\angle o$; So iſt auch der $\angle q =$ dem $\angle st$ (§. 548.).

4) Der $\angle x =$ dem $\angle s + pr$ (§. 549.), und der $\angle x =$ dem $\angle q + p$ (§. 549.), und daher iſt auch der $\angle s + pr =$ dem $\angle p + q$ (§. 39.).

5) Da CE = CB; So iſt der $\angle q =$ dem $\angle p$ (§. 550.), und daher der $\angle q =$ dem $\angle \frac{1}{2}(s + pr)$ (N. 4.), es iſt aber der $\angle q =$ dem $\angle st$ (N. 3.), und daher iſt auch der $\angle st =$ dem $\angle \frac{1}{2}(s + pr)$ (§. 25.), nun iſt aber der $\angle \frac{1}{2}(s + pr)$ die halbe Summe der Winkel CAB und CBA; und daher iſt auch der $\angle st$ die halbe Summe der Winkel CAB und CBA, es iſt aber DG der Tangent des Winkels st (§. 835.), und daher iſt DG der Tangent der halben Summe der Winkel CAB und CBA.

6) Wenn man von der halben Summe zweier Winkel den kleineren Winkel abziehet; So bleibt die halbe Differenz dieſer Winkel übrig, weil die kleine Zahl der halben Summe weniger der halben Differenz gleich iſt, und alſo die halbe Summe aus der kleinen Zahl, und der halben Differenz beſtehet (§. 365.): Wenn man daher den kleinern Winkel s der $\angle$ CAB und CBA von dem Winkel st abziehet, der die halbe Summe der Winkel CAB und CBA iſt (N. 5.); So bleibt der $\angle t$ übrig, und dieſer iſt die halbe Differenz der $\angle$ CAB und CBA, es iſt aber die Linie BG der Tangent des Winkels t (§. 835.), und daher iſt BG der Tangent der halben

ben Differenz der ∠ CAB und CBA. Weil nun BE ⌗ AG: So iſt DA: EA = DG: BG (§. 589.), und es verhält ſich alſo die Summe der beiden Seiten AC und CB = DA (N. 1.), zu ihrer Differenz EA (N. 2.), wie der Tangent DG der halben Summe der Winkel CAB und CBA (N. 5.), zum Tangenten BG der halben Differenz dieſer Winkel (N. 6.).

§. 876.

Wenn man aus einem Punkt F auſerhalb eines Cirkels, Tab. XXXI. fig. 293, zwei gerade Linien in einen Cirkel ziehet, die ihn in A und G, und B und D durchſchneiden: So iſt FG: FD = FB: FA.

Beweis.

Der Winkel AGD ſtehet auf dem Bogen ABD, und der Winkel ABD ſtehet auf dem Bogen AGD, und daher iſt das Maas der ∠ AGD + ABD = 180° (§. 560.), es iſt aber auch der ∠ FBA und ABD = 180° (§. 489.), und darum iſt der ∠ AGD + ABD = dem ∠ FBA + ABD (§. 39.), nun iſt aber der ∠ ABD = dem ∠ ABD (§. 27.), und daher iſt auch der ∠ FBA = dem ∠ AGD (§. 87.). In den Triangeln FGD und FAB iſt alſo der ∠ FBA = dem ∠ AGD, und der ∠ DFG = dem ∠ DFG

 (§ 27.),

(§. 27.), und daher iſt der △ FBA ∽ dem △ FGD, und FG: FD = FB: FA (§. 586.).

§. 877.

Wenn man den Winkel DFG ſo gros macht, daß die Punkten B und D zulezt in den Punkt H fallen: So iſt FH ein Tangent (§. 407.), und es iſt FD: FH = FH: FB.

§. 878.

Weil in einer ieden geometriſchen Proportion das Product der äuſern Glieder dem Product der mitlern Glieder gleich iſt (§. 228.): So iſt auch FG. FA = FD. FB, und FD. FB = FH. FH oder FH^2 (§. 876. und 877).

§. 879.

In einem Triangel ABC, Tab. XXXI. fig. 294, aus einer gegebenen Seite AB, und zwei Winkeln A und C die übrigen Seiten zu finden.

Auflöſung.

Weil ſich die Seiten der Triangeln, wie die Sinus der ihnen gegen über ſtehenden Winkeln verhalten (§. 873.), und alſo der Sinus des Winkels C: AB = der Sinus des Winkels A: BC: So ſchlage man, um erſt die Seite BC zu finden, den Logarithmum von dem Sinus des Winkels C, den Logarithmum

rithmum von AB, und den Logarithmum von dem Sinus des Winkels A in den Tabellen auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den erſteren ab, iezt aber ſchlage man den Logarithmum in den Tabellen unter den gemeinen Zahlen auf, welcher dem übrig gebliebenen Logarithmo am nächſten komt; So iſt die Zahl, welche daneben ſtehet, die Seite BC.

Exempel.

Es ſei der Winkel $C = 20^{\circ}\,15'$, die Seiten $AB = 15^{\circ}$, und der $\angle A = 31^{\circ}\,17'$: So rechnen wir ſo.

Log. von $AB = 15^{\circ} =$	1.1760913
Log. des Sin. des $\angle A = 31^{\circ}\,17' =$	9.7153937
	10.8914850
Log. des Sin. des $\angle C = 20^{\circ}\,15' =$	9.5392230
Log. von $BC =$	1.3522620

Schlägt man nun dieſen in den Tabellen unter den gemeinen Zahlen auf: So iſt die Zahl, deren Logarithmus ihm am nächſten komt, 22 und alſo $BC = 22^{\circ}$ (§. 466.).

Wenn man auch Schuhe haben will: So verwandele man die gefundene 22° durch die Anhängung einer Nulle in Schuhe, und in $22^{\circ}\,0'$, und ſuche den Logarithmum von BC hinter 220 unter der Characte-

riſtica 2 auf: So findet man, daß er dem Logarithmo von 225 am nechſten komt, und alſo hat BC $2\overset{0}{2}\overset{I}{5}$ (§. 284. und 286.). Hängt man noch eine Null an, und verwandelt $2\overset{0}{2}\overset{I}{5}$ in Zolle, und in $2\overset{0}{2}\overset{I}{5}\overset{II}{0}$, und ſuchet den Logarithmum von BC hinter 2250 unter der Characteriſtica 3 auf, ſo bekomt man auch Zolle, wenn nur BC noch eiuen, oder etliche ganze Zolle hält. Da, wenn die Winkel A und C bekant ſind, auch der ∠ B gegeben iſt (§. 547.): So findet man auch die andere unbekante Seite AC, wenn man ſchlieſt, der Sinus des Winkels C: AB = Sinus des Winkels B: AC, und ſonſt eben ſo, wie zuvor verfährt. Weil man auch den Winkel C weis, wenn die Winkel A und B an der Seite AB gegeben ſind: So kan man auch aus AB, und den Winkeln A und B auf eben die Art die übrigen Seiten BC und AC finden.

§. 880.

In einem Triangel ABC, Tab. XXXI. fig. 295, aus zwei gegebenen Seiten AB und BC, und einem Winkel A, welcher einer von dieſen Seiten entgegen ſtehet, die übrigen beiden Winkel C und B zu finden.

Aufloſung.

Weil ſich die Seite BC zu dem Sinu des ihr gegen über ſtehenden Winkels A verhält, wie die

Seite

Seite AB zu dem Sinu des ihr gegenüber ſtehenden Winkels C (§. 873.): So ſchlage man den Logarithmum von BC, den Logarithmum des Sinus des ∠ A, und den Logarithmum von AB in den Tafeln auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den erſteren ab, den Logarithmum aber, welcher dieſem Reſt am nächſten komt, ſchlage man in den Tafeln auf; So ſtehet daneben der Winkel, wovon er der Logarithmus des Sinus iſt, und man weis alſo den Winkel C. Die Winkel A und C addire man endlich, und ziehe ihre Summe von 180° ab: So bekomt man den Winkel B (§. 547.), und es ſind alſo die übrigen beiden Winkel B und C gefunden.

Exempel.

Es ſei BC = 6° 2', der ∠ A = 54° 26', und AB = 4° 5': So iſt die Rechnung dieſe.

Log. von dem Sinus des ∠ A = 54° 26' =	9.9103251
Der Log. von AB = 4° 5' =	1.6532125
	11.5635376
Der Log. von BC = 6° 2' =	1.7923917
Log. von dem Sinu des ∠ C =	9.7711459

Schlägt man nun dieſen in den Tabellen auf: So findet man, daß ihm der Logarithmus des Sinus

von $36^{\circ}11'$ am nächſten komt, und es iſt alſo der Winkel C $= 36^{\circ}11'$.

Weil der Logarithmus von $36^{\circ}11'$ etwas kleiner, als der durch die Rechnung gefundene Logarithmus iſt, der Winkel von $36^{\circ}12'$ aber etwas gröſer iſt, als eben dieſer Logarithmus: So muß der Winkel A noch etliche Secunden halten (§.480.). Man nehme daher an, wenn man auch Secunden haben will, daß die Logarithmi von einer Minute bis zu der folgenden in einerlei Verhältnis mit den Bogen zunehmen, und verfahre, um auch die Secunden zu finden, auf die folgende Art.

Man ziehe von dem Logarithmo des Winkels $36^{\circ}12' = 9.7712976$, den Logarithmum von $36^{\circ}11' = 9.7711249$ ab: So iſt der Unterſcheid dieſer Logarithmorum 1727. Man ziehe ferner von dem in dem Exempel gefundenen Logarithmo 9.7711459 den nächſt kleineren, nemlich den Logarithmum von $36^{\circ}11' = 9.7711249$ ab; So iſt ihr Unterſcheid 210. Jezt ſage man: 1727 geben $60''$, was geben 210? und rechne ſo.

$$1727 : 60'' = 210$$

$$\underline{\quad 60}$$

$$12600$$

```
      (51
     576(1
    12600 | 7''
     1727
```

Es hat alſo der Winkel C $36^\circ\, 1'\, 17''$.

Weis man, daß der gefundene Winkel C ſtumpf iſt: So muß man den Winkel, den man gefunden hat, von 180° abziehen, weil ſtumpfe und ſpizze Winkel, die 180° ausmachen, einerlei Sinum haben (§. 831.), da man dann den ſtumpfen ∠ C bekomt. Denn wenn man mit BC aus B einen Cirkel beſchreibt: So iſt BE = BC (§. 406.), und es läſt ſich aus den Seiten AB und BC, und dem ∠ A ſowol der △ ABC, als ABE machen, und in ienem iſt der geſuchte Winkel ſpiz, in dieſem aber der geſuchte Winkel BEA ſtumpf, in beiden inzwiſchen iſt AB und BC = BE, und der Winkel A gegeben.

Da alſo in dem Triangel ABC der $\angle A = 54^\circ\, 26'\, 0''$
und der $\angle C = 36^\circ\, 11'\, 7''$

So iſt die Summe der $\angle A + C = 90^\circ\, 37'\, 7''$
Ziehet man nun von $180^\circ = 179^\circ\, 59'\, 60''$
die Summe der $\angle A + C = 90^\circ\, 37'\, 7''$

ab: So iſt der Winkel $B = 89^\circ\, 22'\, 53''$

Da ſolchergeſtalt auch der dritte Winkel B gegeben iſt; So kan man die Seite AC finden, wenn man ſchlieſt: Der Sinus des ∠C : AB = Sinus ∠B : AC. Dieſemnach kan man aus zwei Seiten AB, und BC, und einem Winkel, der einer Seite entgegen ſtehet, die zwei unbekanten Winkel, und die eine unbekante Seite finden.

§. 881.

In einem Triangel ABC, Tab. XXXI. fig. 292, aus zwei gegebenen Seiten AC und CB, und dem Winkel C, den dieſe Seiten einſchlieſen, die übrigen Winkel A und B zu finden.

Aufloſung.

Weil ſich die Summe der Seiten AC und CB zu ihrer Differenz verhält, wie der Tangent von der halben Summe der unbekanten Winkel A und B zu dem Tangent der halben Differenz dieſer Winkel (§. 875.),

(§. 875.), und die Summe der Winkel A und B übrig bleibt, wenn man den Winkel C von 180° abziehet (§. 546.), folglich auch die halbe Summe der Winkel A und B bekant iſt: So ſchlieſe man wie AC + CB zu AC — CB, ſo der Tangent $\frac{1}{2}$(A + B), zu dem Tangenten $\frac{1}{2}$ (A—B). Man ſchlage alſo von der Summe der Linien AC und CB, von der Differenz dieſer Linien, und von dem Tangenten der halben Summe der Winkel A und B die Logarithmen in denen Tabellen auf, man addire die lezteren, und ziehe von ihrer Summe den erſteren ab, ſo hat man den Logarithmum des Tangenten von der halben Differenz der Winkel A und B, ſchlägt man nun dieſen in den Tafeln auf, ſo ſtehet daneben der Winkel, wovon er der Tangent iſt, und demnach weis man die halbe Differenz der Winkel A und B. Da nun die halbe Summe zweier Gröſen und ihre halbe Differenz der groſen, die halbe Summe zweier Gröſen, weniger ihrer halben Differenz aber der kleinen Zahl gleich iſt (§. 265.): So addire man zu der halben Summe der Winkel A und B die gefundene halbe Differenz, ſo bekomt man den gröſeren Winkel B, welcher der gröſten Seite AC entgegen geſezt iſt (§. 557.), hingegen aber den kleinern Winkel A, wenn man dieſe halbe Differenz von der halben Summe abziehet.

Exem-

Exempel.

Es ſei $AC = 5^{\circ}5'$, $CB = 4^{\circ}$, und der Winkel $C = 48^{\circ}4'$: So rechnen wir ſo.

$$\text{Da } AC = 5^{\circ}5'$$
$$\text{und } CB = 4^{\circ}0'$$

$$\text{So iſt } AC + CB = 9^{\circ}5'$$

$$\text{Weil } AC = 5^{\circ}5'$$
$$\text{und } CB = 4^{\circ}0'$$

$$\text{So iſt } AC - CB = 1^{\circ}5'$$

$$\text{Da der } \angle A + B + C = 180^{\circ} = 179^{\circ}60'$$
$$\text{und der } \angle C = 48^{\circ}4'$$

$$\text{So iſt der } \angle A + B = 131^{\circ}56'$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2}(A + B) = 65^{\circ}58'$$

$$\text{Log. von } AC - CB = 1^{\circ}5' = 1.1760913$$
$$\text{Log. des Tang. vom } \angle \tfrac{1}{2}(A + C) = 65^{\circ}58' = 9.9606176$$

$$11.1367089$$

$$\text{der Log. von } AC + CB = 9^{\circ}5' = 1.9777236$$

$$\text{Log. Tang. vom } \angle \tfrac{1}{2}(A - B) = 9.1589853$$

Schlägt man iezt dieſen in den Sinustafeln unter den Tangenten auf, ſo komt ihm der Logarithmus

von

von $8^{\circ}12'$ am nächſten, und es iſt die halbe Differenz der Winkel A und B = $8^{\circ}12'$.

$$\text{Da alſo } \angle \tfrac{1}{2}(A + B) = 65^{\circ}58'$$
$$\text{und } \angle \tfrac{1}{2}(A - B) = 8^{\circ}12'$$

$$\text{So iſt } \angle \tfrac{1}{2}(A + B) + \angle \tfrac{1}{2}(A - B) = \text{dem } \angle B = 74^{\circ}10'$$
$$\text{Und da } \angle \tfrac{1}{2}(A + B) = 65^{\circ}58'$$
$$\text{und } \angle \tfrac{1}{2}(A - B) = 8^{\circ}12'$$

$$\text{So iſt } \angle \tfrac{1}{2}(A + B) - \angle \tfrac{1}{2}(A - B) =$$
$$\text{dem Winkel } A = 57^{\circ}46'$$
$$\text{Es iſt alſo der Winkel } C = 48^{\circ}04'$$
$$\text{" " " } B = 74^{\circ}10'$$
$$\text{und der " " } A = 57^{\circ}46'$$

$$\text{Und daher die Summe der } \angle A + B + C = 180^{\circ}$$

Da man alſo die Winkel in dieſem Triangel kent: So kan man auch die unbekante dritte Seite AB finden, wenn man ſchlieſt, wie der Sinus des ∠ B: AC, oder der Sinus des ∠ A: CB = der Sinus des ∠ C: AB (§. 873.).

§. 882.

In einem Triangel FCG, Tab. XXXI. fig. 293, aus den drei gegebenen Seiten FC, CG und FG die Winkel dieſes Triangels zu finden.

Auflö-

Auflöſung.

Man beſchreibe mit der kleinſten Seite CG aus der Spizze C des Triangels einen Cirkel; So iſt CD = CG (§. 406.), und FD die Summe der Seiten FC und CG, und, weil BC = CG (§. 406.), FB der Unterſcheid der Linien FC und CG. Weil nun FG : FD = FB : FA (§. 876.): So ſuche man zu der Seite FG, der Summe der Seiten FC und CG, und dem Unterſcheid dieſer Seiten, die Linie FA, dieſe nun ziehe man von FG ab; So bekomt man AG. Jezt gedenke man ſich von C auf die Sehne AG eine Perpendicularlinie CE, ſo iſt AE = EG (§. 570.), FEC und EGC ſind rechtwinkelichte Triangel, und es iſt $EG = AE = \frac{1}{2} AG$, und $FE = FA + \frac{1}{2} AG$. Da alſo in dem rechtwinkelichten Triangel EGC die Seiten EG und GC, und in dem rechtwinkelichten Triangel FEC die Seiten FE und FC bekant ſind: So kan man auch nunmehr, weil in beiden Triangeln ein rechter Winkel E iſt, der CG und FC entgegen ſtehet, dieſe Aufgabe auflöſen, und in dem Triangel EGC die Winkel ECG und EGC, in dem Triangel FEC aber die Winkel FCE und ECF finden, wenn man ſchlieſt: CG : Sinu des ∠E = EG : Sinu des ∠C, und FC : Sinu des ∠E = FE : Sinu des ∠C, da dann der $\angle CFE = 90^{\circ} - \angle FCE$

∠ FCE, und der ∠ EGC = 90° − ∠ ECG (§. 551. 872. und 880.).

Exempel.

Es ſei CG = $\overset{0}{4}\overset{I}{2}$, FC = $\overset{0}{5}\overset{I}{6}$, und FG $\overset{0}{6}\overset{I}{4}$: So iſt unſere Rechnung die folgende.

Da CG = $\overset{0}{4}\overset{I}{2}$
und FC = $\overset{0}{5}\overset{I}{6}$

So iſt CG + FC = FD = $\overset{0}{9}\overset{I}{8}$
Da FC = $\overset{0}{5}\overset{I}{6}$
und CG = $\overset{0}{4}\overset{I}{2}$

So iſt FC − CG = FB = $\overset{0}{1}\overset{I}{4}$

Log. von CG + FC = FD = $\overset{0}{9}\overset{I}{8}$ = 1.9912261
Log. von FB = $\overset{0}{1}\overset{I}{4}$ = 1.1461280

3.1373541
der Log. von FG = $\overset{0}{6}\overset{I}{4}$ = 1.8061800

Log. von AF = 1.3311741

Schlägt man nun dieſen in den Tabellen auf; So komt ihm der Logarithmus von 21, oder $\overset{0}{2}\overset{I}{1}$, und, wenn man ihn unter der Characteriſtica 2 aufſucht, der Logarithmus von 214, oder $\overset{0}{2}\overset{I}{1}\overset{II}{4}$ am nächſten.

Da

Da nun $FG = 6^{0}4^{I}0^{II}$

und $FA = 2^{0}1^{I}4^{II}$

So iſt $AG = 4^{0}2^{I}6^{II}$

und $\frac{1}{2} AG = AE = EG = 2^{0}1^{I}3^{II}$

Da alſo $AE = 2^{0}1^{I}3^{II}$

und $FA = 2^{0}1^{I}4^{II}$

So iſt $FE = 4^{0}2^{I}7^{II}$

Log. Sinus totius = 10.0000000

Log. von $EG = 2^{0}1^{I}3^{II}$ = 2.3283796

12.3283796

der Log. von $CG = 4^{0}2^{I}0^{II}$ = 2.6232493

Log. des Sinus des ∠ ECG = 9.7051303

Schlägt man iezt dieſen in den Tafeln auf: So komt ihm der Logarithmus des Sinus von $30^{\circ}28'$ am nächſten, und da der ∠ EGC = 90° — ∠ ECG (§. 551.); So iſt der Winkel EGC = $59^{\circ}32'$.

Log. Sinus totius E = 10.0000000

Log. $FE = 4^{0}2^{I}7^{II}$ = 2.6304279

12.6304279

der Log. $FC = 5^{0}6^{I}0^{II}$ = 2.7481880

Log. Sinus des ∠ FCE = 9.8822399

Schlägt

Schlägt man auch dieſen in den Tabellen auf: So findet man, daß ihm der Logarithmus von $49^\circ 41'$ am nächſten kommen, und es iſt der $\angle$ CFE = 90° — $\angle$ FCE = $40^\circ 19'$.

Da alſo der Winkel ECG = $30^\circ 28'$
nnd der Winkel FEC = $49^\circ 41'$

So iſt der Winkel FCG = $80^\circ 9'$
Und da der Winkel EGC = $59^\circ 32'$
und der Winkel CFE = $40^\circ 19'$

So ſind in dem Triangel FGC die
Winkel FCG, EGC und CFE = 180°

§. 883.

Da durch die vorhergehende Aufgaben alle Fragen aufgelöſt ſind, die bei einem Triangel vorkommen: So wollen wir die Trigonometrie nur noch auf einige Fälle in der Geometrie anwenden.

§. 884.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 151, wenn man nicht von A nach B, aber aus einem Stand C zu beiden Oertern kommen kan.

Aufloͤſung.

Man meſſe in dem Triangel ABC die Seite CB, und die Winkel A und C: So iſt der Sinus des ∠ A: CB = der Sinus des ∠ C: AB, und man kan die Seite AB finden (§. 879.), oder man meſſe CA und CB und den Winkel C, daraus aber finde man den ∠ A (§. 881.), und alsdann, wie vorhin, die Seite AB, auch meſſe man CB, und die Winkel C und B, und ſuche daraus den Winkel A; So kan man ebenwol aus dem Winkel A, der Seite CB, und dem Winkel C die Weite AB finden (§. 879.)

§. 885.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 153, wenn man nur zu einem A kommen kan.

Aufloͤſung.

Man meſſe in dem Triangel ABC, die Seite AC, und die Winkel A und C: So findet man den dritten Winkel B, wenn man A und C von 180° abziehet (§. 546.), und es iſt der Sinus des ∠ B: AC = der Sinus des ∠ C: AB, hieraus aber kan man die Seite AB finden (§. 879.).

§. 886.

Die Weite zweier Oerter A und B zu meſſen, Tab. XXXII. fig. 296, wenn man zu keinem kommen kan.

Aufloͤſung.

Man nehme nach Gefallen drei Staͤnde C, D und E an, die in einer geraden Linie liegen. Man meſſe in den Triangeln ADC und BDE die Seiten CD und DE, und die Winkel ACD und ADC, und BDE und BED. Jezt ziehe man die Winkel ADC und ACD von 180° ab; So bekomt man den Winkel CAD (§. 547.): Eben ſo ziehe man die Winkel BDE und BED von 180° ab; So bekomt man den Winkel DBE: Endlich ziehe man die Winkel ADC und BDE von 180° ab; So weis man den Winkel ADB (§. 489.): Nunmehr ſuche man zum Sinu des ∠ CAD, der Seite CD, und dem Sinu des ∠ C die Seite AD, zu dem Sinu des ∠ DBE, der Seite DE, und dem Sinu des ∠ E die Seite DB (§. 879.); So iſt AD, DB und der ∠ ADB bekant, hieraus nun finde man den ∠ DAB (§. 881.), zu dem Sinu des ∠ DAB, der Seite BD, und dem Sinu des ∠ ADB aber die Seite AB; So iſt die verlangte Weite gemeſſen.

§. 887.

Eine Höhe AB zu meſſen, Tab. XIIII. fig. 157, zu der man kommen kan.

Aufloͤſung.

Man meſſe den Winkel ADE, und die Stand-Linie BC=ED (§. 527.). Weil nun E ein rechter Winkel iſt: So ziehe man den Winkel D von 90° ab; So bekomt man den Winkel EAD (§. 551.). Jezt finde man zum Sinu des Winkels A, zu ED, und dem Sinu des Winkels ADE die Hoͤhe AE (§. 879.), und addire dazu CD=BE (§. 527.); So bekomt man AB: Wenn inzwiſchen BC nicht horizontal iſt; So meſſe man EB, wie AE, und addire dieſe Hoͤhe zu AE.

§. 888.

Eine Höhe AB zu meſſen, Tab. XV. fig. 163, zu der man nicht kommen kan.

Aufloͤſung.

Man meſſe aus zwei Staͤnden D und C die Winkel AmE und n, und ziehe von dem ∠ AmE den Winkel n ab; So bekomt man den Winkel mAn (§. 549.). Jezt meſſe man auch die Standlinie DC=mn (§. 527.), und ſuche zum Sinu des Winkels mAn, zur Seite mn, und dem Winkel n die

die Seite Am. Weil nun der Winkel E $=90^{\circ}$; So ſuche man zum Sinu toto, der Seite Am, und dem Sinu des Winkels AmE die Seite AE, hierzu aber addire man Cn=BE (§. 527.), ſo iſt AB gemeſſen. Wenn inzwiſchen BC nicht horizontal iſt: ſo ſuche man aus dem Sinu toto E, Am, und dem Sinu A $=90^{\circ}-\angle$ AmE (§. 551.) die Seite mE, man meſſe den Winkel EmB, ſo weis man den Winkel EBm (§. 551.), aus dem Sinu des Winkels EBm, Em, und dem Sinu des Winkels EmB nun finde man BE, und addire dieſe Höhe zu AE, ſo iſt die Höhe AB gefunden.

§. 889.

Aus der Seite BC eines regulären Vieleks den Radium AB zu finden, Tab. XXXII. fig. 297.

Auflöſung.

Man dividire 360° durch die Zahl der Seiten: So bekomt man den Winkel BAC (§. 568.), dieſen nun ziehe man von 180° ab, und dividire den Reſt mit 2, ſo weis man den Winkel BAC (§. 639.), iezt ſchlieſe man: wie der Sinus des $\angle$ A : BC = der Sinus des $\angle$ C : AB (879.), ſo bekomt man den Radium AB.

§. 890.

Aus dem Radio AB die Seite BC eines gegebenen Vieleks zu finden, Tab. XXXII. fig. 297.

Auflöſung.

Man finde, wie in der vorigen Aufgabe, die Winkel A und C, und ſuche zu dem Sinu des ∠ C, zu AB, und zu dem Sinu des ∠ A die Seite BC (§. 879.).

§. 891.

Mit einer Linie AB, zu der man nicht kommen kan, Tab. XXXII. fig. 298, durch einen Punkt C eine Parallellinie abzuſtekken.

Auflöſung.

Man meſſe aus dem Stand C den Winkel ACE und ACB, und ziehe den lezteren von dem erſteren ab: So weis man auch den Winkel BCE, man meſſe ferner aus dem Stand E die Winkel BEC und AEC, zugleich aber auch die Standlinie CE. Die Winkel ACE und AEC ziehe man von 180° ab, ſo bekomt man den ∠ CAE, eben ſo ziehe man auch die ∠ BCE und BEC von 180° ab, ſo bekomt man den Winkel CBE (§. 547.). Jezt ſuche man zu dem Sinu des Winkels CAE, zu CE, und zu dem Sinu des Winkels AEC die Seite AC (§. 879.), eben

eben ſo ſuche man aber auch zu dem Sinu des Winkels CBE, zu CE, und dem Sinu des Winkels BEC die Seite CB, ſo weis man AC, CB, und den gemeſſenen Winkel ACB, hieraus nun finde man den Winkel ABC (§. 881.), und mache dieſem den Winkel BCD gleich (§. 497.); So iſt CD die verlangte Parallellinie (§. 525.).

§. 892.

Eine ganze Gegend in den Grund zu legen, oder eine Charte zu machen.

Aufloͤſung.

Man nehme zwei Staͤnde in A und B an, man meſſe die Winkel CAB und CBA, und die Standlinie AB, ſo iſt auch der Winkel ACB bekant, und man kan aus dem Sinu des Winkels C, der Linie AB, und dem Sinu des Winkels CBA die Seite AC, aus dem Sinu des Winkels ACB, AB, und dem Sinu des Winkels CAB die Seite BC finden (§. 879.). Man weis alſo die Weiten des Ortes C von den Staͤnden A und B. Verfaͤhrt man nun auf eben die Art mit den Orten D, E, F, G und H: So bekomt man die Weiten dieſer Orte von den Staͤnden A und B. Miſſet man endlich die Winkel ACK, und KCA: So kan man auch, da AC gefunden iſt, wie vorhin, KC und AK finden, und eben-

eben ſo kan man bei den Triangeln AFK, BHI und BIE verfahren. Trägt man dieſemnach alle dieſe Triangel aus den Ständen A und B ſo, wie ſie an einander liegen, nach einem Maasſtaab auf das Papier (§. 532.), ſo iſt die Charte gemacht, wenn man nur die Wälder, Berge, Felder, Wieſen, Bäche, Weege, Brükken, und dergleichen Dinge beſonders aufnimt, und auf dieſe Charte bringet (§. 644.), dieſelbe aber ſo auszeichnet, wie es unſere Figur weiſt.

Regiſter.

A.

Abgeſchnittene, abgekürzte, oder abgeſtuzte Pyramide Seite 429. §. 446
deren Inhalt zu finden S. 714. §. 788
deren Inhalt zu finden, wenn ſie ſchief iſt S. 715. §. 789
Abgeſchnittener, abgekürzter, oder abgeſtuzter Kegel S. 431. §. 447
deſſen Inhalt zu finden S. 710. §. 785
Abgekürzter ſchiefer Kegel S. 431. §. 447
deſſen Inhalt zu finden S. 715. §. 789
Abſchnitt eines Cirkels S. 425 §. 436
deſſen Inhalt zu finden S. 658 §. 726
Abſchnitt der Kugel S. 433 §. 451
ſeinen Inhalt zu finden S. 735. §. 809
Abſolute Gröſen S. 297. §. 294
Abziehung S. 48. §. 76
ihr Zeichen S. 48. §. 77
Achtek S. 421. §. 426
Achtel S. 63. §. 95
Addiren Brüche S. 317. §. 309
Addiren Gröſen S. 302. §. 303
Addition S. 47. §. 74
Addition ihre Probe S. 62 63. §. 94. 95.
Addition ihr Zeichen S. 47 §. 75
Addition ſezt wieder zuſammen, was die Subtraction aufgelöſt hat S. 71 §. 98
Aehnliche Dinge S. 11. §. 19
Aehnliche Figuren S. 522 522. §. 581. 582
Aehnliche Gröſen S. 297 §. 293
Aehnliche Gröſen ſind gleiche Gröſen S. 15. §. 28
Aehnliche Triangel S. 523 523. 523. 524. 524. 524 §. 583. 584. 585. 586. 587. 588
Aehnliche Verhältniſſe S. 194 §. 211
Aehnlichkeit ihr Zeichen S. 12 § 20
Aequatio S. 337. §. 333
pura S. 339. §. 336
adfecta S. 339. §. 336
Aeuſere Glieder der Proportion S. 197. §. 217
Aggregat S. 47. §. 74
Algebra S. 6. 295. §. 8. 290
Aliquanter Teil der einen von zwei gleichen Gröſen, iſt auch der aliquante Teil von der andern von dieſen Gröſen S. 26. §. 46

Aliquoter Teil der einen von zwei gleichen Gröſen, iſt auch der aliquote Teil von der andern von dieſen Gröſen Seite 25. §. 45
Alligationsregel S. 267. §. 260
Altimetrie S. 407. §. 387
Analyſis S. 295. §. 290
Analytic S. 295. §. 290
Andere Glied der Proportion S. 197. §. 217
Anzahl von Dingen S. 10 §. 15
Arithmetiſche Progreſſion, ihre Eigenſchaften zu unterſuchen S. 401. §. 381
Arithmetiſche Progreſſion S. 276. §. 262
abnehmende S. 277. §. 263
zunehmende S. 277. §. 263
Arithmetiſche Progreſſion, darinnen machen drei Glieder ein ſtetige arithmetiſche Proportion aus S. 277. §. 264
vier Glieder hingegen eine unſtetige arithmetiſche Proportion S. 278. §. 265
Arithmetiſche Progreſſion, darinnen die Glieder zu finden S. 278. §. 266
Arithmetiſche Proportio continua S. 199. §. 221
Arithmetiſche Proportio discreta S. 199. §. 221
Arithmetiſche Proportion S. 198. §. 200
ihre Bezeichnung S. 200 §. 223
Arithmetiſche Proportion, darinnen iſt die Summe der mittleren der Summe der äuſern Glieder gleich S. 202. 203. 203. §. 224. 225. 226
Arithmetiſche Proportion, darinnen verhält ſich das erſte Glied zum dritten, wie das andere zum vierten S. 206. §. 233
Arithmetiſche Proportion, darinnen das vierte Glied zu finden S. 211. 212. 213. §. 236. 237. 238
Arithmetiſche Proportion, darinnen das erſte, andere, und dritte Glied zu finden S. 213. §. 239
Arithmetiſche Verhältnis S. 189. §. 204
ihr Zeichen S. 191. §. 206
Arithmetiſche Verhältnis darinnen iſt das groſe Glied weniger dem Unterſcheid das kleine, und das kleine Glied und der Unterſcheid zuſammen genommen das groſe Glied S. 191. §. 207
Arithmetiſche Verhältnis, darinnen das groſe oder kleine Glied zu finden S. 192. §. 208
Arithmetiſche Verhältnis, darinnen verhalten ſich die Summen, wenn man zu den Gliedern gleiches addirt, wie dieſe Glieder S. 195. §. 213
Arithmetiſche Verhältnis, darinnen verhalten ſich die Reſte, wenn man

von

von den Gliedern gleiches abziehet, wie dieſe Glieder Seite 195. §. 214
Aufgabe algebraiſche S. 354 §. 348
ihre Bedingungen S. 354. §. 349
ihre Benennung S. 354. § 350
Aufgabe algebraiſche auflöſen was es iſt S. 354. §. 351.
Aufgabe algebraiſche aufzulöſen S. 355. §. 353.
Aufgabe algebraiſche, dabei hat man auf die Benennung, die Gleichung, und Reduction zu ſehen S. 356. §. 354
Aufgabe unbeſtimte S. 354. § 352
Aufgaben algebraiſche zur Uebung S. 361. 363. 365. 366. 367. 369. §. 359. 360. 361. 362. 363. 364
Aufheben einen Bruch, was es iſt S. 120. §. 127
Aufzuheben einen Bruch S. 120. §. 128
Ausdehnung geometriſche S. 408. §. 388
Ausdehnungen, wenn ſie einander dekken S. 435. §. 455
Auseinander laufende Linien S. 414. §. 409.
Auseinander laufende Flächen S. 418. §. 420
Ausführung, oder Auswikkelung der algebraiſchen Aufgabe S. 356. §. 354
Ausgedehnte Gröſe meſſen S. 439. §. 462
Ausſchnitt eines Ringes S. 425. § 436
deſſen Inhalt zu finden S. 662. §. 728
Ausſchnitt der halben Kugel S. 433. §. 451
Ausſchnitt der Kugel S. 433. §. 451
Ausſchnitt eines Cirkels S. 425. §. 436
Ausſchnitt eines Cirkels iſt einem Triangel gleich, der den Bogen des Ausſchnitts zur Grundlinie, und den Radium zur Höhe hat S. 641. §. 709
Ausſchnitt eines Cirkels, wie deſſen Flächeninhalt zu finden S. 642. 656. §. 710. 725
Ausſchnitt einer Kugel, deſſen Inhalt zu finden S. 736. §. 810.
Ausſchnitt von einer halben Kugel, deren Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Ausſchnitt eines Cylinders, deſſen Inhalt zu finden Seite 736. §. 810
Ausſchnitt eines Kegels, deſſen Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Ausſchnitt eines abgekürzten Kegels, deſſen Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Ausſchnitt eines Cylinders zu findē, wenn darinnen ein abgekürzter Kegel ausgehöhlt iſt S. 736. §. 810

Ausſchnitt eines Cylinders zu finden, wenn darinnen ein kleinerer ausgehöhlt iſt Seite 736. §. 810
Ausſchnitt eines abgekürzten Kegels zu finden, wenn darinnen ein Cylinder ausgehöhlt iſt S. 736. §. 810
Ausziehen die Wurzel, was es iſt S. 153. §. 172
die Quadratwurzel S. 153 §. 172
die Cubikwurzel, was es iſt S. 153. §. 172
Auszuziehen die Quadratwurzel S. 168. 171. 174. 175. 176. 176. 327. 327. 328. 332. 538. § 187. 188. 189. 190. 191. 192. 322. 323. 324 327. 607
Auszuziehen die Cubikwurzel S. 177. 181. 183. 185. 186. 187. 327. 329. 330. 332. §. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 322. 325 326. 327
Axe des Cylinders S. 429. §. 444
Axe des Kegels S. 431. §. 447
Axe der Kugel S. 433 §. 451
Axen einer Kugel ſind einander gleich S. 434. §. 453

B.

Balkenruthe S. 688. §. 770
Balkenſchuh S. 688. §. 770
Baſis der Figur S. 424. §. 431
Baſtardbrüche S. 112 §. 113
Bedingung der algebraiſchen Aufgabe S. 354. §. 349
Begrif überhaupt S. 9. §. 13
gemeinſchaftlicher S. 9. §. 13
Beiahende Gröſen S. 297 §. 294
Bekante Gröſen, wie ſie benent werden S. 296 §. 291
Benennung der algebraiſchen Aufgabe S. 354. §. 350
Beſtimte Gleichung S. 338 §. 335
Billon S. 32. §. 58
ihr Zeichen S. 39. §. 65
Binomiſche Wurzel S. 151 §. 169
Biquadrat S. 150. §. 168
Bogen S. 413. §. 405
Bogen concentriſcher Cirkel zwiſchen einerlei Radiis haben zu ihren Peripherien einerlei Verhältnis S. 453. §. 479
Bogen, die zwiſchen den Schenkeln des Winkels beſchrieben werden, haben gleich viele Grade S. 454. §. 482
Bogen zwiſchen den Schenkeln des Winkels beſtimmen ſeine Gröſe S. 455 §. 483
Bogen in einem Cirkel ſind gleich, wenn die Sehnen gleich ſind S. 511. §. 567
Bogen, aus ſeiner Höhe und der halben Sehne den Diameter des Cirkels zu dieſem Bogen zu finden S. 555. 628

Breite

Breite eines Fluſſes zu meſſen Seite 495. §. 538.
Brigge und Neper, wie ſie die Logarithmen gefunden S. 291. §. 284
Bruch, wie er vergröſert wird S. 114. 115. 118. § 119 120. 125
wie er verkleinert wird S. 115. 116. 117. §. 121 122. 124
Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler, und Nenner durch eine Zahl multiplicirt S. 116 §. 123
Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler, und Nenner durch eine Zahl dividirt S. 119. §. 126
Bruch aufheben, was es iſt S. 120. §. 127
Bruch aufzuheben S. 120 §. 128
Bruch, deſſen Logarithmum wie man ihn findet S. 290. §. 283
Bruch auf wenige Glieder zu bringen S. 315. §. 307
Brüche gemeine S. 110. 11 §. 109. 110
zehnteiliche S. 110. 135 §. 109. 154
ihre Beſchaffenheit S. 136 137. §. 155. 156.
ſechzigtheiliche S. 110 §. 109
ihre Beſchaffenheit S. 145 145. §. 163. 164
Brüche gemeine mit Decimalzahlen zu vergleichen S. 138. §. 157
Brüche gleiche S. 114. §. 118
Brüche eigentliche S. 112. §. 113
deren Beſchaffenheit S. 112. §. 115
uneigentliche S. 112. §. 113
deren Beſchaffenheit S. 112. §. 113
wie ſie geſchrieben werden S. 111. §. 112
Brüche, wenn ſie gros und klein ſind S. 112. §. 114
Brüche von einerlei Nahmen, oder Benennung S. 120 §. 129
Brüche, mit denen man rechnen will, müſſen einerlei Benennung haben S. 121. §. 130
Brüche unter einerlei Benennung zu bringen S. 121 122. 123. §. 131. 132. 133
Brüche zu addiren S. 124 125. §. 134. 135
Brüche zu ſubtrahiren S. 125 126. 126. 127. 127. 128 §. 136. 137. 138. 139 140. 141
Brüche zu multipliciren S. 128. 129. 130. 130 130. 131. §. 142. 143 144. 145. 146. 147
Brüche zu dividiren S. 131 133. 133. 133. 134. 134 §. 148. 149. 150. 151 152. 153
Brüche ſechzigtheiliche können als ganze Zahlen geſchrieben werden S. 146. §. 165
Brüche ſechzigtheiliche zu addiren, zu ſubtrahiren, zu multi-

multipliciren, und zu dividiren Seite 147. §. 166
Brüche, darinnen die Regeldetri auszuüben S. 234 235. 237. 243. 247 §. 251. 252. 253. 254. 255
Brüche unter einerlei Benennung zu bringen S. 316 §. 308
Brüche zu addiren S. 317 §. 309
zu ſubtrahiren S. 318. §. 310
zu multipliciren S. 319 §. 311
zu dividiren S. 320. §. 312
Brüche in einer Gleichung wegzuſchaffen S. 343 §. 343
Buchſtaben, wie man ſie in der Algebra ordnet S. 299. §. 298
Buchſtabenrechnung S. 6. §. 8

C.

Caracteriſtica S. 292. §. 286
Catheti S. 421. §. 428
Centrum S. 413. §. 405
Charte zu machen S. 807 §. 892
Chorda S. 413. §. 407
Circumferenz S. 413. §. 405
Cirkel S. 412 §. 403
eccentriſche S. 412. §. 403
concentriſche S. 412. § 403
Cirkel, alle ſind einander ähnlich S. 413. §. 404
Cirkel, die einander dekken, ſind ſich gleich S. 436. §. 458
Cirkel, die einander gleich ſind, dekken ſich S. 436. §. 458
Cirkel mit einer geraden Linie zu beſchreiben S. 438. §. 460
Cirkel wird in 360 Grad geteilt S. 453. §. 480
Cirkel, dariñ iſt der Winkel an dem Mittelpunkt zweimal ſo gros, als der Winkel an der Peripherie S. 507. §. 559
Cirkel, darinn ſind die Sehnen gleich, welche gleiche Bogen haben S. 510. §. 566
Cirkel, darinn ſind die Bogen gleich, wenn die Sehnen gleich ſind S. 511 §. 567
Cirkel, in gleiche Teile zu teilen S. 511. §. 568.
Cirkel, in gleiche Teile geteilt gibt eine regulare Figur S. 511. §. 568
Cirkel, deſſen Peripherie zu finden S. 649. §. 720
Cirkel, deſſen Diameter zu finden S. 651. §. 722
Cirkel, dazu den Mittelpunkt zu finden S. 517. 518 §. 574. 575
Cirkel, in ein Quadrat zu verwandeln S. 637. §. 704
Cirkel, deſſen Quadratinhalt iſt einem Triangel gleich, der die Peripherie zur Grundlinie, den Radium aber zur Höhe hat S. 639. §. 707
Cirkel, wie deſſen Quadratinhalt zu finden S. 640 653. §. 708. 723
Cirkel, wenn man aus einem Punkt

Punkt auſſer ihm in ihn zwei gerade Linien ziehet, wie ſie ſich verhalten Seite 787. 788. 788. §. 876. 877. 878
Cirkel halber S. 425. §. 436
Cirkelbogen in zwei gleiche Teile zu teilen S. 515 §. 571
Cirkelfläche S. 425. §. 436
Coefficient S. 299. §. 296
muß von dem Exponent wol unterſchieden werden S. 299. §. 297
Complementum eines Bogens S. 749. §. 838
Congruente Dinge S. 13. §. 23
Congruenz, ihr Zeichen S. 13 §. 24
Conus, ſiehe Kegel.
Conus truncatus, ſiehe abgeſchnittener Kegel.
Coſecant S. 750. §. 840
Coſecant des ſpizzen Winkels iſt auch der Coſecans des ſtumpfen Winkels, der mit ihm 180° macht S. 750. §. 841
Coſecant, wie er zu finden S. 752. §. 844
Coſinus S. 749. §. 838
Coſinus eines ſpizzen und ſtumpfen Winkels, die 180° halten, iſt einerlei S. 750. §. 839
Coſinus, wie er zu finden S. 751. §. 842
Coſinus, Cotangenten, und Coſecanten ähnlicher Bogen verhalten ſich wie ihre verſchiedene Radii S. 753. §. 845
Coſinus künſtlicher S. 755 §. 847
Coſinus aus dem Sinu zu finden S. 765. § 855
Coſinum, daraus und aus dem Sinu den Sinum des halben Bogens zu finden S. 766. §. 856.
aus dieſen Stükken den Sinum des doppelten Bogens zu finden S. 766 §. 857
Cotangent S. 750. §. 840
Cotangent eines ſpizzen Winkels iſt auch der Cotangent des ſtumpfen Winkels, der mit ihm 180° ausmacht S. 750. §. 841
Cotangent, wie er zu finden S. 752. §. 844
Crura des Winkels S. 415 §. 411
Cubikinhalt, einen in den andern zu verwandeln S. 692. §. 775
Cubiklinie S. 681. §. 762
Cubikruthe S. 681. §. 762
Cubikſchuh S. 681. §. 762
Cubikſcrupel S. 681. §. 762
Cubik zweiter Scrupel S. 681 §. 762
Cubikmaas, zehnſchühiges, wie es geteilt und bezeichnet wird S. 684 684. 684. 685. 688 §. 765. 766. 767. 768 770
Cubikmaas, zehnſchühiges,

was man dabei im Rechnen in Acht zu nehmen Seite 686. 688. §. 769. 770
Cubikmaas, zwölf- und ſechzehnſchůhiges, wie es geteilt und bezeichnet wird S. 689. 690. §. 771. 772
was man dabei im Rechnen in Acht zu nehmen hat S. 690. 773
Cubikmaas zehnſchůhiges in zwölf- und ſechzehnſchůhiges zu verwandeln S. 691. §. 774
Cubikwurzel S. 150 §. 168
Cubikwurzel ausziehen, was es iſt S. 153. §. 172
Cubikwurzel auszuziehen S. 177. 181. 183. 185 186. 187. 327. 329. 330 332. §. 193. 194. 195 196. 197. 198. 322. 325 326. 327
Cubikwurzel durch die Logarithmen auszuziehen S. 287. §. 279
Cubikzahl vollkommene S. 153. §. 174
unvollkommene S. 153 §. 174
Cubikzahl unvollkommene, wie ſie in eine Decimalzahl zu verwandeln S. 156. §. 177.
Cubikzahl, ihr Logarithmus iſt dreimal ſo gros, als der Logarithmus ihrer Wurzel S. 286. §. 277
Cubikzahl aus dem Logarithmo zu erkennen S. 287. §. 278
Cubikzahl, darinnen eine Zahl durch die Logarithmen zu erheben S. 287. §. 280
Cubikzahlen von 1 bis 10 S. 157. §. 178
Cubikzoll S. 681. §. 762
Cubiſche Gleichung S. 338 §. 335
Cubus S. 150. 432. §. 168. 450
Cubus der binomiſchen Wurzel, wie er beſchaffen S. 162. 165. §. 183. 184
Cubus der polynomiſchen Wurzel, wie er beſchaffen S 165. 166. §. 185. 186
Cubi, zweier Unterſcheid zu finden, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind S. 396. §. 378
Cylinder S. 429. §. 444
ſenkrechter S. 429. §. 444
ſchiefer S. 429. §. 444
ſeine Seite S. 429. §. 444
ſeine Axe S. 429. §. 444
wie er entſtehet S. 429 §. 445
Cylinder und Prismata, die einerlei Grundfläche haben, und zwiſchen zwei ebenen Parallelflächen ſtehen, ſind einander gleich S. 672. §. 551
Cylinder iſt einem Prisma gleich, mit dem er einerlei Grundfläche und Höhe hat S. 673. §. 753
Cylinder deſſen Inhalt zu finden S. 700. §. 779
deſſen Grundfläche oder

Höhe aus dem Inhalt zu finden Seite 702. §. 780
Cylinder und Prismata verhalten ſich wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, hingegen aber wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind S. 703 §. 681
Cylinder, die gleich hoch ſind, verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Diametrorum S. 704. §. 782
Cylinder und Würfel, die gleich dik und hoch ſind, verhalten ſich wie 785 zu 1000 S. 704. §. 782
Cylinder, von ſeinem Ausſchnitt den Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Cylinder, wenn darinnen ein abgekürzter Kegel ausgehöhlt iſt, den Inhalt des Ausſchnitts zu finden S. 736. §. 810
Cylinder, wenn darinnen ein kleinerer Cylinder ausgehöhlt wird, den Inhalt des Ausſchnitts zu finden S. 736. §. 810
Cylinder etlichemal ſo gros zu machen, als einen gegebenen S. 740. §. 815
Cylinder in einen andern Cylinder zu verwandeln, wozu die Gröſe der Grundfläche gegeben iſt S. 742. §. 819

D.

Damm, deſſen Inhalt zu finden S. 737. §. 811
Decimalbrüche S 135. §. 154
ihre Beſchaffenheit S. 136 §. 155
Decimalcubikmaas in zwölf- oder ſechzehnſchühiges Maas zu verwandeln S. 691. §. 774
Decimalmaas S. 440. §. 466
wie es bezeichnet wird S. 441. §. 467
in gemeines zu verwandeln S. 442. §. 469
Decimalquadratmaas wie es geteilet und bezeichnet wird S. 594. 594. 597 §. 656. 657. 659
was dabei im Rechnen in Acht zu nehmen S. 595. 597. §. 658. 659
in zwölf- oder ſechzehnſchühiges zu verwandeln S. 599. §. 663
Decimalruthe S. 440. §. 466
Decimalzahlen S. 137. §. 156
mit gemeinen Brüchen zu vergleichen S. 138. §. 157
Decimalzahlen zu addiren S. 139. §. 158
zu ſubtrahiren S. 140. §. 159
zu multipliciren S. 141 §. 160
in einander zu dividiren S. 142. §. 161
Decimalzahlen haben ihren Nuzzen in der Geometrie S. 144. §. 162
Diagonallinie S. 424. §. 432

Regiſter.

Diagonallinien teilen eine Figur in Triangel Seite 424. §. 434
Diameter S. 413 § 407
iſt das doppelte des Radii S 414. §. 408
zu einem Flächeninhalt zu finden S 655. §. 724
ſeine Verhältnis zur Peripherie zu finden S. 644 645. 646. 647. 647. 648 648. §. 713. 714. 715 716. 717. 718. 719
Diameter eines Cirkels zu finden S. 651 §. 722
Differenz S. 48. §. 76
Dignität S. 150 §. 167
die erſte S. 150. § 168
die andere S 150. §. 168
die dritte S. 150 §. 168
die vierte S. 150 §. 168
die fünfte S. 150. §. 168
Ding S. 8. §. 10
Ding, ein iedes iſt ſich ſelbſt ähnlich S. 14. §. 26
gleich S. 14. §. 27
Dinge von einerlei Art S. 10 §. 14
von verſchiedener Art S. 10 §. 14
einerlei S. 11. § 18
verſchiedene S. 11 § 18
ähnliche S. 11. § 19
unähnliche S. 11. §. 19
gleiche S. 12. §. 21
ungleiche S. 12. §. 21
congruente S. 13. § 23
Dinge gröſere S. 17. §. 32
ihr Zeichen S. 17. §. 33
kleinere S. 17. §. 32
ihr Zeichen S. 17. §. 33
Dinge von der kleineren Art S. 34. §. 60
Dinge von der gröſeren Art S. 34. §. 60
Dividendus S. 51. §. 80
Dividiren Gröſen S. 311. §. 306
Brüche S. 320. §. 312
Diviſion S. 51. § 80
ihr Zeichen S. 51. §. 81
ihre Probe S. 104. §. 106
Diviſion löſt auf, was die Multiplication zuſammen geſetzt hat S. 105 §. 107
Diviſionsexempel S 221. §. 247
Diviſor S. 51. §. 80
Dodecaedrum S. 432. §. 450
Donlege Fläche S. 418. §. 420
Donlege Linie S. 421. §. 429
Dreiek S. 421. § 426
Dreiekkigtes Prisma S. 427 § 442
kan in drei gleiche Pyramiden geteilt werden S. 678. §. 758
Dreiekkigte Pyramide S. 429 §. 446
Dreifache S. 19 § 36
Dritte arithmetiſche Proportionalzahl S 200. § 222
Dritte geometriſche Proportionalzahl S. 200. § 222
Dritte Glied der Proportion S. 197. §. 217
Duplicirte Verhältnis S. 189 §. 204
Durchmeſſer S. 413. § 407
Durchſchnitt im Kegel iſt ein Cirkel S. 432 §. 449

Durch=

Durchſchnitte der Kugeln ſind Cirkel Seite 434. §. 454

Durchſchnitte ſind einander gleich, wenn zwey Parallelflächen von einer dritten durchſchnitten werden S. 670. §. 748

E.

Ebene S. 418. §. 420

Ebene Fläche S. 418. §. 420
ihre Lage wird durch drei Punkten beſtimt S. 662 §. 729

Ebene Flächen zwei durchſchneiden einander in einer geraden Linie S. 662. §. 730

Eigenſchaften einer arithmetiſchen Progreſſion zu unterſuchen S. 401 §. 381
einer geometriſchen Progreſſion zu unterſuchen S. 402 §. 382
der Logarithmorum zu unterſuchen S. 403. §. 383

Eigentliche Brüche S. 112 §. 113
deren Beſchaffenheit S. 112. § 115

Ein Ganzes S. 15. §. 29

Ein iedes Ding iſt ſich ſelbſt ähnlich S. 14. §. 26
gleich S. 14. §. 27

Einerlei Dinge S. 11. § 18

Einfache S. 19. § 36

Einfache Gleichung S. 338 §. 334

Einfache Gröſen S. 296 §. 292

Einheit S. 10. §. 16

Einheiten, wie man ſie zuſammen zählt S. 28. §. 51

Einheiten, oder Einer ihre Zeichen S. 35 §. 61
dieſe Zeichen ſind auch die Zeichen der übrigen Zahlen S. 36. §. 62

Einmaleins zu verfertigen S. 76. §. 101

Epipedometrie S. 407 §. 387

Ergänzung des Bogens S. 749. §. 838

Erhabene Fläche S. 418 § 420

Erſte Glied der Proportion S. 197 §. 217

Etwas Wirkliches S. 298 §. 295

Exponent der Potenz S. 152 322. §. 171. 314

Exponent der Verhältnis S. 188. §. 202

Eythimetrie S. 407 §. 387

F.

Factor S. 49. §. 76

Factores eines Products durch die Logarithmen zu finden S. 283. §. 272

Factum S. 49. §. 76

Faß ohmen S. 719. §. 792

Faß viſiren S. 719. 721 §. 792. 793

Faß viſiren, das nicht voll iſt S. 721 §. 794

Figur S. 417. § 418
ihre gleichnamige Teile S. 417. §. 418

Figur geradlinigte S. 419 §. 421

Figur, krummlinigte Seite 419. §. 421
vermiſchtlinigte S. 419 §. 421
Figur ihre Seiten S. 420 §. 422
gleichſeitige S. 420. §. 422
ungleichſeitige S. 420 §. 422
gleichwinkelichte S. 420 §. 423
Figur ungleichwinkelichte S. 420. §. 423
rechtwinkelichte S. 420 §. 424
ſchiefwinkelichte S. 420 §. 424
reguläre oder ordentliche S. 420. §. 425
irreguläre oder unordentliche S. 420. §. 425
vierſeitige S. 421. §. 426
vielſeitige S. 421. §. 426
Figur, ihre Grundlinie oder Baſis S. 424. §. 431
ihre Höhe S. 424. §. 431
ihre Spizze S. 424. §. 431
Figur, darinnen kan man iede Linie zur Grundlinie annehmen S. 424. §. 432
Figur kan durch Diagonallinien in Triangel geteilt werden S. 424. §. 434
Figur in einem Cirkel beſchrieben S. 425. §. 435
Figur, eine iede geradlinigte zu zeichnen S. 566. §. 638
Figur in den Grund legen was es iſt S. 571. §. 643
Figur ihre Quadratur S. 591 §. 652
Figur eine iede geradlinigte in den Grund zu legen S. 570. §. 644
Figur, eine iede geradlinigte Figur in ein Parallelogrammum zu verwandeln S. 637. §. 703
Figur reguläre, wie ſie um eine andere reguläre entſtehet S. 638. §. 706
Figuren, die einander dekken, ſind ſich gleich und ähnlich S. 464. §. 498
Figuren, die einander gleich und ähnlich ſind, dekken ſich S. 465. §. 499
Figuren, die einander dekken, darinnen ſind die gleichnamige Stücke gleich S. 465. §. 500
Figuren ähnliche S. 522. 522 §. 581. 582
Figuren, ihr Maasſtaab kan ein Quadrat, oder ein Rechtek ſein S. 590 §. 650
Figuren, zu ihrem Maasſtab hat man ein Quadrat angenommen S. 590 §. 651
Fläche S. 417. §. 418
Fläche ebene S. 418. §. 420
ihre Lage wird durch drei Punkten beſtimt S. 662 §. 729
krumme S. 418. §. 420
erhabene S. 418. §. 420
hohle S. 418. §. 420
horizontale S. 418. §. 420
ſöhlige S. 418. §. 420
perpendiculare S. 418 §. 420

Fläche, verticale Seite 418 §. 420
ſeigere S. 418. §. 420
ihre Neigung S. 418. §. 420
ihr Neigungswinkel S. 418 §. 420
ſchiefe S. 418. §. 420
donlege S. 418. §. 420
gleichlaufende S. 418 §. 420
auseinander laufende S. 418. §. 420
zuſammen laufende S. 418 §. 420
Fläche, darauf ſtehet eine Linie perpendicular, oder ſchief S. 663. §. 731
Fläche geradlinigte in gleiche Teile zu teilen S. 627 630. §. 691. 692
Fläche in einen in ihr gegebenen Punkt kan nur eine Perpendicularlinie gezogen werden S. 665 §. 734
Fläche aus einem auſer ihr gegebenen Punkt kan nur eine Perpendicularlinie auf ſie gezogen werden S. 665 §. 735
Fläche ſtehet auf einer andern perpendicular, wenn ſie durch eine gerade Linie gelegt wird, die auf dieſer perpendicular ſtehet S. 666. §. 737.
Fläche, wenn eine auf der andern perpendicular ſtehet, ſo iſt auch die Linie, die auf dem Durchſchnitt perpendicular ſtehet, perpendicular auf die Fläche, worinnen der Durchſchnitt iſt S. 667 §. 740
Flächen zwei ebene durchſchneiden einander in einer geraden Linie S. 662. §. 730
Flächen, die zu einander eine Neigung haben, ſtehen auf der Fläche ihres Neigungswinkels perpendicular S. 666 §. 739
Flächen, wenn ſich zwei durchſchneiden, und auf einer dritten perpendicular ſtehen, ſo iſt auch ihr Durchſchnitt perpendicular auf dieſe Fläche S. 667. §. 741
Flächen, wenn ſie ſich auf einer dritten ſenkrecht durchſchneiden, ſo ſind ſie ſelbſt perpendicular auf dieſe Fläche S. 668 §. 742
Flächen ſind einander parallel, wenn eine gerade Linie auf beiden perpendicular ſtehet S. 670 §. 746
Flächeninhalt S. 591. §. 652
Flächeninhalt des Quadrats zu finden S. 592. §. 653
Flächeninhalt des Rechteks zu finden S. 602. §. 665
Flächeninhalt der Raute und länglichten Raute zu finden S. 604. §. 667

Flächeninhalt des Triangels zu finden Seite 605 §. 668
Flächeninhalt eines Trapezii zu finden S. 609. §. 671
einer ieden geradlinigten irregulären Figur zu finden S. 611. §. 672
einer ieden Figur zu finden, die Krümmungen hat S. 615. § 673
eines regulären Vielecks zu finden S. 616. §. 674
Flächeninhalt, daraus den Diameter zu finden S. 655. §. 724
Flächeninhalt des Cirkels zu finden S. 640 653. § 708 723
Flächeninhalt des Ausſchnitts des Cirkels wie er zu finden S. 642 656 §. 710. 725
Flächeninhalt des Abſchnitts eines Cirkels zu finden S 658 §. 726
Flächeninhalt eines Ringes zu finden S. 661. §. 727
Flächeninhalt eines Ausſchnitts von einem Ring zu finden S. 662. §. 728
Flächeninhalt an einem Körper zu finden S. 739 §. 813
Fluß, ſeine Breite zu meſſen S. 495. §. 538
Fünfek S. 421 §. 426
reguläres S. 423. §. 430
deſſen Seite zu finden S. 759. 763. §. 850. 851
Fünfekkigte Pyramide S. 429 §. 446
Fünfekkigtes Prisma S. 427 §. 442
Fus S. 440. §. 466
ſein Zeichen S. 441. §. 467

G.

Ganze S. 15. §. 29
Ganze iſt ſeinen Teilen gleich S. 16. §. 30
Ganze und ein oder etliche ſeiner Teile ſind ungleich S. 16. §. 31
Ganze iſt gröſer, als ein und etliche ſeiner Teile S. 18 §. 34
Ganze, ein und etliche Teile von ihm ſind kleiner, als es ſelbſt S. 18 §. 34
Gebrochene Zahl S. 113 §. 116
deren Beſchaffenheit S 113 §. 117
Gegend in den Grund zu legen oder eine Charte zu machen S. 807. §. 892
Gehalt, verſchiedener Mark-Silber daraus zu beſtimmen, wie viel man von dem einen zu dem andern nehmen muß, um eine Mark von einem gewiſſen Gehalt zu bekommen S. 385. 389 391. §. 373. 374. 376
Gemeine Brüche S. 110 110. §. 109. 110
Gemeines Maas S. 441 §. 467
in Decimalmaas zu verwandeln S. 442. §. 469
Genante Zahl S. 34. §. 60

Genante

Genante Zahlen zu addiren Seite 63. §. 96
Genante Zahlen zu ſubtrahiren S. 72. §. 99
Genante Zahlen zu multipliciren S. 84. §. 104
Genante Zahlen zu dividiren S. 105. §. 108
Genante Zahlen, darinnen die Regeldetri ausüben S. 247. §. 256
Genau meſſender Teil S. 18 §. 35
nicht genau meſſender S. 18 §. 35
Geodeſie S. 407. §. 387
Geometrie iſt mit der Grubenbaukunſt verknüpft S. 34. §. 1. 2
Geometrie teilt ſich in die eigentliche Geometrie, und die Trigonometrie S. 405. §. 384
Geometrie höhere S. 406 §. 385
niedere S. 406. §. 385
theoretiſche, oder ſpeculativiſche S. 406. §. 386
practiſche S. 406. §. 386
Geometriſche Ausdehnung S. 408. § 388
Geometriſche Progreſſion S. 276. § 262
abnehmende S. 277. §. 263
zunehmende S. 277. §. 263
darinnen machen drei Glieder eine ſtetige geometriſche Proportion aus S. 277. §. 264
vier Glieder hingegen eine unſtetige geometriſche Proportion S. 278 §. 265
Geometriſche Progreſſion, darinnen die Glieder zu finden S. 279. §. 267
Geometriſche Progreſſion, ihre Eigenſchaften zu unterſuchen S. 402. §. 382
Geometriſche Proportio continua S. 199. §. 221
Geometriſche Proportio diſcreta S. 199 §. 221
Geometriſche Proportion S. 198. §. 220
ihre Bezeichnung S. 200 §. 223
Geometriſche Proportion darinnen iſt das Product der äußeren dem Product der mittleren Glieder gleich S. 204. 205. 206. §. 228. 229. 230
Geometriſche Proportion, darinnen verhält ſich das erſte Glied zum dritten, wie das andere zum vierten S. 208 §. 233
Geometriſche Proportion, darinnen das vierte Glied zu finden S. 214. 216. 216 §. 240. 241. 242
Geometriſche Proportion, darinnen das erſte, andere, und dritte Glied zu finden Seite 216. §. 243
Geometriſche Ruthe S. 440 §. 466
Geometriſche Verhältnis S. 189. §. 204
ihr Zeichen S. 191 §. 206
Geometriſche Verhältnis, darin=

darinnen iſt das kleine gleich dem groſen Glied dividirt durch den Namen der Verhältnis, und das groſe Glied gleich dem kleinen Glied multiplicirt durch den Namen der Verhältnis S. 193. §. 209
Geometriſche Verhältnis, darinnen das groſe, oder kleine Glied zu finden S. 193. §. 210
Geometriſche Verhältnis, darinnen verhalten ſich die Producte wie die Glieder, wenn man dieſe mit gleichem multiplicirt S. 195. §. 215
Geometriſche Verhältnis, darinnen verhalten ſich die Quotienten wie die Glieder, wenn man dieſe durch gleiches dividirt S. 196. §. 216
Gerade Linie S. 411. §. 399
Gerade Linien alle ſind einander ähnlich S. 412. §. 401
Gerade Linien, nur eine kan zwiſchen zwei Punkten ſein S. 412. §. 400
Gerade Linien, zwei können keinen Raum einſchlieſen S. 418. §. 419
Gerade Linien, die ſich dekken, ſind ſich gleich S. 435 §. 456
Gerade Linien, die ſich gleich ſind, dekken ſich S. 436 §. 457
Gerade Linie durch zwei Punkten zu ziehen S. 436 §. 459
Gerade Linie, damit einen Cirkel zu beſchreiben S. 438 §. 460
Gerade Linie, darüber kan ein halber Cirkel beſchrieben werden S. 438. §. 461
Gerade Linie, ihr Maas iſt eine Länge S. 439. §. 464
Gerade Linie, wie ſie zu meſſen S. 440. §. 465
Gerade Linie zu meſſen S. 450. 452. §. 477. 478
Gerade Linie in zwei gleiche Teile zu teilen S. 475. 476. §. 515. 517
Gerade Linie in vier und mehrere gleiche Teile zu teilen S. 475 §. 516
Gerade Linie in gleiche Teile zu teilen S. 526. 527. 528. 528. 530. 531. §. 590. 591. 592. 593. 597. 598
Gerade Linie auf eine ebene Fläche ſtehet auf dieſer Fläche perpendicular, wenn ſie mit zwei Linien in dieſer Fläche rechte Winkel macht S. 663. §. 733
Gerade Linie, wenn ſie einer Fläche parallel iſt S. 668 §. 743
Gerade Linie, wenn ſie auſer einer Ebenen ſ aber einer Linie in ihr parallel iſt, ſo iſt ſie der ganzen Fläche parallel S. 668. §. 744
Gerade Linie, wenn ſie auſer einer

einer ebenen Fläche, aber einer Linie in dieſer Fläche parallel iſt, ſo iſt ſie allen Parallellinien dieſer Linie parallel Seite 669. §. 745
Gerade Linie, wenn ſie auf zwei Flächen perpendicular ſtehet, ſo ſind dieſe Flächen parallel S. 670. §. 746
Gerade Linien zwei, wenn ſie von Parallelflächen geſchnitten werden, ſo werden ſie in proportionirliche Teile geteilt S. 671. §. 750
Gerade Linien zwei, wie ſie ſich verhalten, wenn man ſie aus einem Punkt auſerhalb eines Cirkels in dieſen Cirkel ziehet S. 787. 788. 788. §. 876. 877. 878
Geradlinigte Figur S. 419 §. 421
Geradlinigte Fläche in gleiche Teile zu teilen S. 627 630. §. 691. 692
Geradlinigter Körper S. 426. §. 439
Geradlinigte Figur, eine iede zu zeichnen S. 566 § 638
Geradlinigte Figur, eine iede in den Grund zu legen S. 570. §. 644
Geradlinigten irregulären Figur, einer ieden Flächeninhalt zu finden S. 611. §. 672
Geſellſchaftsrechnung, oder Geſellſchaftsregel S. 260. §. 259
Geſez die Zahlen zu bezeichnen S. 39. §. 66
Geſez zu zählen S. 28 §. 51 u. f.
Gevierte Ruthe S. 590. §. 651
Gleichdikker Körper S. 427. §. 440
deſſen Grundfläche aus dem Inhalt zu finden S. 702. §. 780
deſſen Höhe aus dem Inhalt zu finden S. 702. §. 780
Gleichdikke Körper verhalten ſich wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, und wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind S. 703. §. 781
Gleiche Brüche S. 114. §. 118
Gleiche Dinge S. 12. §. 21
Gleiche Dinge können für einander geſezt werden S. 13. §. 25
Gleiche Verhältnis S. 189. §. 203
Gleiche Verhältniſſe S. 194 §. 211
Gleichheit ihr Zeichen S. 12. §. 22
Gleichlaufende Linien S. 414. §. 409
ihr Zeichen S. 415. §. 410
Gleichnamige Glieder der Proportion S. 197. §. 217
Gleichnamige Teile einer Figur S. 417. §. 418
Gleichſeitiger Kegel S. 431. §. 447

Gleichſeitige Figur Seite 420. §. 422
Gleichſeitiger Triangel S. 421 §. 427
Gleichſeitigen Triangel zu machen S. 488. §. 530
Gleichſeitiger Triangel, darinnen ſind alle Winkel gleich, und ieder hat 60 Grad S. 504. 505. §. 552. 553
Gleichſchenkelichter Triangel S. 421. §. 427
Gleichſchenkelichten Triangel zu machen S. 489. §. 531
Gleichſchenkelichter Triangel, darinnen ſind die Winkel an der Grundlinie gleich, und die Perpendicularlinie aus der Spizze teilet den Winkel an der Spizze, die Grundlinie, und den Triangel in zwei gleiche Teile S. 503. §. 550
Gleichung S. 337. §. 333
ihre vordern und hintern Glieder S. 337. §. 333
einfache S. 338 §. 334
vom erſten Grad S. 338 §. 334
beſtimte S. 338. §. 335
höhere beſtimte S. 338 §. 335
Gleichung quadratiſche S. 338. §. 335
vom zweiten Grad S. 338 §. 335
cubiſche Gleichung S. 338 §. 335
vom dritten Grad S. 338 §. 335
Gleichung vom vierten Grad S. 338. §. 335
reine S. 339. §. 336
unreine S. 339. §. 336
darinnen eine Gröſe reduciren, oder den Werth beſtimmen S. 339. §. 337
Gleichung, darinnen eine unbekante Gröſe durch die Addition zu reduciren S. 340. 341. §. 338. 339
darinnen eine unbekante Gröſe durch die Subtraction zu reduciren S. 341 §. 340
darinnen eine unbekante Gröſe durch die Multiplication zu reduciren S. 342. §. 342
auf o zu reduciren S. 342 §. 341
daraus alle Brüche wegzuſchaffen S. 343. §. 343
darinnen eine unbekante Gröſe durch die Diviſion zu reduciren S. 344 §. 344
darinnen eine unbekante Gröſe durch das Wurzelausziehen zu reduciren S. 346. §. 345
darinnen eine unbekante Gröſe durch das Erheben in die Dignität zu reduciren S. 349 §. 346
darinnen vor die unbekante Gröſe ihren Werth zu ſezzen S. 351. §. 347
Gleichwinkelichte Figur S. 420. §. 423

Glieder

Glieder der Verhältnis Seite 188. §. 201
erſtes und anderes, oder vorhergehendes folgendes S. 188. §. 201
Glieder einer gebundenen Gröſe S. 300. §. 301
Glieder in einer geometriſchen Proportion ſo zu verändern, daß ſie noch proportional bleiben S. 399. §. 380
Grad S. 453. §. 480
ſein Zeichen S. 454. §. 481
Grad der Potenz S. 152. §. 171
Grade S. 146 §. 165
Grade, dadurch werden die Winkel gemeſſen S. 456 §. 484
Gränze S. 409. § 393
Gran S. 440. § 466
ſein Zeichen S. 441 § 467
Gröſe S. 10. § 15
ihre Teile S. 10. § 16
ihre Merkmale S. 11. §. 17
Gröſe ſurde oder ſtumme S. 153. § 174
Gröſen ähnliche ſind auch gleiche S. 15 § 28
Gröſen vergleichen S. 19 §. 37
Gröſen, die man mit einander vergleicht, müſſen von einerlei Art ſein S. 20 §. 38
Gröſen, wenn zwei einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie ſich ſelbſt gleich S. 20 §. 39
Gröſe, welche gröſer, als eine von zwei gleichen Gröſen, die iſt auch gröſer als die andere S. 21. §. 40
Gröſe, welche kleiner, als eine von zwei gleichen Gröſen, die iſt auch kleiner, als die andere S. 22. § 41
Gröſen zwei, wenn eine iede davon das zweifache, das dreifache u. ſ. w., ſo ſind dieſe Gröſen gleich S. 22 § 42
Gröſen zwei gleiche, haben einerlei zwei- und dreifaches u. ſ. w. S. 23, §. 43
Gröſen zwei, wenn eine iede die Hälfte, oder der dritte, oder der vierte u. ſ. w. Teil von einer dritten Gröſe iſt, ſo ſind ſie ſich ſelbſt gleich S. 24 § 44
Gröſe von zwei gleichen iſt der aliquote Teil der einen, auch der aliquote Teil der andern S. 25 § 45
Gröſen von zwei gleichen iſt der aliquante Teil der einen, auch der aliquante Teil der andern S. 26 §. 46
Gröſen ſtehen entweder mit andern in Verknüpfung, oder nicht S. 45. §. 69
Gröſen, die mit andern in keiner Verknüpfung ſtehen, ſind ganze Gröſen, Brüche, und Potenzen S. 45. §. 70
Gröſe iſt keiner weiteren Veränderung unterworfen,

als daß ſie ſich vermehren und vermindern läſt Seite 46. §. 71
Gröſe, wie ihre Vermehrung geſchiehet S. 46. §. 72
wie ihre Verminderung geſchiehet S. 46. §. 73
Gröſen ſummirende S. 47 §. 74
Gröſen von einerlei Art können nur addirt werden S. 53. §. 83
Gröſen von einerlei Art können nur ſubtrahirt werden S. 53. §. 84
Gröſen, gleiche zu gleichen addirt, geben gleiche Summen §. 54. §. 85
Gröſen, gleiche zu ungleichen geben ungleiche Summe S. 55. §. 86
Gröſen gleiche von gleichen abgezogen geben gleiche Reſte S. 55. §. 87
Gröſen, gleiche von ungleichen abgezogen gaben ungleiche Reſte S. 56. §. 88
Gröſen, gleiche mit gleichen multiplicirt geben gleiche Producte S. 56. §. 89
Gröſen, ungleiche mit gleichen multiplicirt geben ungleiche Producte S. 57 §, 90
Gröſen, gleiche mit gleichen dividirt geben gleiche Quotienten S. 58. §. 91
Gröſen, ungleiche mit gleichen dividirt geben ungleiche Quotienten S. 58. §. 92
Gröſen, welche mit einander in einer Verknüpfung ſtehen, ſind Verhältniſſe, Proportionen, und Progreſſionen S. 187 §. 199
Gröſen bekante, wie ſie benent werden S. 296. §. 291
Gröſen unbekante, wie ſie benent werden S. 296 §. 291
Gröſen einfache S. 296. §. 292
Gröſen zuſammengeſezte S. 296. §. 292
Gröſen ähnliche S. 297. §. 293
unähnliche S. 297. §. 293
ungleichnamige S. 297 §. 293
gleichnamige S. 297. §. 293
Gröſen poſitive S. 297. 298 §. 294. 295
negative S. 297. 298 §. 294. 295
wirkliche S. 297. §. 294
beiahende S. 297. §. 294
verneinende S. 297. §. 294
gebundene S. 297. §. 294
ungebundene S. 297. §. 294
abſolute S. 297. §. 294
Gröſen ihre Buchſtaben, wie man ſie in der Algebra ordnet S. 299. §. 298
Gröſen werden in der Algebra bei ihrer Erfindung entweder vor ſich betrachtet, oder mit andern verglichen S. 300. 300. 337 §. 299. 300. 333
Gröſe, gebundene ihre Glieder S. 300. §. 301

Gröſe gebundene reduciren, was es iſt Seite 300 §. 301
Gröſe gebundene zu reduciren S. 301. §. 302
Gröſen zu addiren S. 302 §. 303
Gröſen von eiander zu ſubtrahiren S. 304. §. 304
Gröſen mit einander zu multipliciren S. 307. §. 305
Gröſen in einander zu dividiren S. 311. §. 306
Gröſen unbekante in einer Gleichung reduciren, oder ihren Werth beſtimmen S. 339. §. 337
Gröſen zwei ſo zu verändern, daß ſie ihre erſte Verhältnis behalten S. 397 §. 379
Gröſe ausgedehnte meſſen S. 439. §. 462
Gröſere Dinge S. 17. §. 32
ihr Zeichen S. 17. §. 33
Grundfläche S. 427. §. 440
Grundlinie des Triangels aus dem Inhalt zu finden S. 608 §. 670
Grundlinie einer Figur S. 424 §. 431
Gürtel S. 433. §. 451

H.

Halbe Kugel S. 433. §. 451
ihr Ausſchnitt S. 433. §. 451
deſſen Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Halber Cirkel kan über eine gerade Linie beſchrieben werden S. 438. §. 461
Halbmeſſer S. 413. §. 405
Hauptglied S. 253. §. 258
Hauptzahlen S. 291. §. 285
Hemisphérium S. 433. §. 451
Hexaedrum S. 432. §. 450
Hindere Glieder der Gleichung S. 337. §. 333
Höhe der Figur S. 424. §. 431
Höhe des Prisma S. 427 §. 442
Höhe der Pyramide S. 429 §. 446
Höhe zu meſſen, zu der man kommen kan S. 498. 545 547. 547. 804. §. 540 616. 617. 618. 887
Höhe zu meſſen, zu der man nicht kommen kan S. 499 553. 554. 804. §. 541 626. 627. 888
Höhe, zu der man kommen kan, mit einem Staab zu meſſen S. 548. 549. 552 §. 619. 620. 625
Höhe mit zwei Stäben zu meſſen S. 549. 552 §. 621. 625
Höhe aus dem Schatten zu meſſen S. 550. 551. 552 § 622. 623. 625
Höhe mit einem Spiegel zu meſſen S. 552. 552 §. 624. 625
Höhe eines Bogens, dazu und zu ſeiner halben Sehne den Diameter ſeines Cirkels zu finden S. 555 §. 628
Höhe des Triangels aus dem Inhalt zu finden S. 608 §. 670

Höhere beſtimte Gleichung Seite 338. §. 335
Höhere Geometrie S. 406 §. 385
Hohle Fläche S. 418. §. 420
Horizontale Fläche S. 418 §. 420
Horizontallinie S. 416 §. 414
Hunderte S. 29. 30. §. 53. 54
ihre Namen S. 29. 30 §. 53. 54
ihre Zeichen S. 36. 37. §. 62 63
Hunderttauſende S. 31. 32 §. 56. 57
ihre Namen S. 31. 32 §. 56. 57
Hypothenuſa S. 421. §. 428

J.

Icoſaedrum S. 432. §. 450
Inhalt der Fläche S. 591 §. 652
Inhalt des Körpers S. 681 §. 763
Inhalt des Würfels zu finden S. 681. §. 764
Inhalt eines Parallelopipedi zu finden S. 693. §. 776
Inhalt eines dreiekkigten Prismatis zu finden S. 696. §. 777
Inhalt eines ieden vielekkigten Prismatis zu finden S. 698. §. 778
Inhalt des Cylinders zu finden S. 700 §. 779
Inhalt einer Pyramide zu finden S. 704. §. 783
Inhalt des Kegels zu finden S. 706. §. 784
Inhalt eines abgekürzten rechtwinkelichten Kegels zu finden Seite 710 §. 787
Inhalt einer abgekürzten rechtwinkelichten Pyramide zu finden S. 714 §. 788
Inhalt einer abgekürzten ſchiefen Pyramide zu finden S. 715. §. 789
Inhalt der Kugel aus dem Diametro zu finden S. 729. §. 806
Inhalt von der Dikke einer hohlen Kugel zu finden S. 733. §. 807
Inhalt von dem Abſchnitt einer Kugel zu finden S. 735. §. 809
Inhalt der Zona zu finden S. 736. §. 810
Inhalt von dem Ausſchnitt einer Kugel zu finden S. 736. §. 810
Inhalt von dem Ausſchnitt einer halben Kugel zu finden S. 736. §. 810
Inhalt von dem Ausſchnitt eines Cylinders zu finden S. 736. §. 810
Inhalt von dem Ausſchnitt eines Kegels zu finden S. 736. §. 810
Inhalt von dem Ausſchnitt eines abgekürzten Kegels zu finden S. 736 §. 810
Inhalt von einem ieden Kör-

per

per zu finden, der aus verſchiedenen zuſammen geſezt iſt, Seite 737. §. 811
Inhalt eines Dammes zu finden S. 737. §. 811
Inhalt eines ieden irregulären Körpers zu finden S. 738. §. 812
Irrationalgröſe S. 153. 332 §. 174. 328
daraus kan die Wurzel nicht genau ausgezogen werden S. 154. §. 175
Irrationalgröſen unter einerlei Benennung zu bringen S. 332. §. 329
Irrationalgröſen einfacher auszudrukken S. 334 §. 330
zu addiren und zu ſubtrahiren S. 335 §. 331
zu multipliciren und zu dividiren S. 336 §. 332
Irreguläre Figur S. 420 §. 425
Irregulärer Körper S. 427 §. 441
Irreguläres Vielek S. 423 §. 430
Fünfek S. 423. §. 430
Sechsek S. 423. §. 430
Irreguläres Vielek, deſſen Inhalt zu finden S. 616 §. 674
iſt einem Triangel gleich, der den Umfang des Vieleks zur Grundlinie, und die Höhe der Triangel zur Höhe hat, worinnen es ſich verteilen läſt S. 617. §. 675

K.

Kegel S. 431. §. 447
abgeſchnittener, abgekürzter, oder abgeſtuzter S. 431. §. 447
ſenkrechter S. 431. §. 447
ſchiefer S. 431. §. 447
gleichſeitiger S. 431. §. 447
ungleichſeitiger S. 431 §. 447
deſſen Seite S. 431. §. 447
deſſen Axe S. 431. §. 447
abgekürzter ſchiefer S. 431 §. 447
Kegel ſenkrechter, wie er entſtehet S. 432 §. 448
Kegel, darinnen iſt der Durchſchnitt ein Cirkel S. 432 §. 449
Kegel, die einerlei Grundfläche und Höhe haben, ſind einander gleich S. 677 §. 757
Kegel iſt der dritte Teil von einem Cylinder, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat S. 680 §. 760
Kegel, deſſen Inhalt zu finden S. 706. §. 784
Kegel verhalten ſich, wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind S. 709. §. 786
Kegels eines abgekürzten rechtwinkelichten Inhalt zu finden S. 710. §. 787
Kegel abgekürzter ſchiefer, deſſen

deſſen Inhalt zu finden Seite 715. §. 789
Kegel, von ſeinem Ausſchnitt den Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Kegel abgekürzter, von ſeinem Ausſchnitt den Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Kegel abgekürzter, wenn darinnen ein Cylinder ausgehöhlt iſt, den Inhalt des Ausſchnitts zu finden S. 736. §. 810
Kegel etlichemal ſo gros zu machen, als einen gegebenen S. 740. §. 815
Kegel in einen andern Kegel zu verwandeln, wozu die Grundfläche gegeben iſt S. 742. §. 820
Kegel in einen Cylinder zu verwandeln S. 743 §. 821
Kennziffer der Decimalzahlen S. 137. §. 156
Kennziffer der Logarithmorum S. 292. §. 286
Kleinere Dinge S. 17. §. 32
ihr Zeichen S. 17. §. 33
Körper mathematiſcher S. 426. §. 438
geradlinigter S. 426 §. 439
krumlinigter S. 426 §. 439
vermiſchtlinigter S. 426 §. 439
Körper gleichdikker S. 427 §. 440
Körper, deſſen Grundfläche aus dem Inhalt zu finden S. 702. §. 780
deſſen Höhe aus dem Inhalt zu finden S. 702 §. 780
ſpizzer S. 427. §. 440
Körper ſpizze, verhalten ſich, wie ihre Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind S. 709. §. 786
Körper ſpizzer, deſſen Grundfläche aus dem Inhalt zu finden S. 709. §. 785
Körper regulär oder ordentlicher S. 427. § 441
irregulärer oder unordentlicher S. 427. §. 441
Körper gleichdikke ſind einander gleich, wenn ſie einerlei Grundfläche und Höhe haben S. 673 §. 752
Körper einen ieden zu viſiren S 722. §. 796. 797
Körper gleichdikke, verhalten ſich wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, und wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind S. 703 §. 781
Körper, eines ieden Inhalt zu finden, der aus verſchiedenen zuſammen geſezt iſt S. 737. §. 811

Körper

Körper, eines ieden irregulären Inhalt zu finden Seite 738. §. 812
Körper, den Inhalt ſeiner Fläche zu finden S. 739 §. 813
Körper, wie ſie zu teilen S. 739. §. 813
Körper, einen ieden in einen Würfel zu verwandeln S. 744. §. 824
Körper, ihre Zeichnung S. 744 §. 825
Körperliche Inhalt S. 687 §. 736
Körperlicher Winkel S. 426 §. 437
Kreis S. 412. §. 403
concentriſcher S. 412. §. 403
eccentriſcher S. 412. §. 403
Kreiſe, alle ſind einander ähnlich S. 413. §. 404
Kreuzruthe S. 590. §. 651
Krumlinigte Figur S. 419 §. 421
Krumme Fläche S. 418. §. 420
Krumme Linie S. 411. §. 399
Kugel S. 433. §. 451
ihre Axe S. 433. §. 451
ihre Pole S. 433. §. 451
Kugel, ihr Ausſchnitt S. 433 §. 451
Kugel, halbe S. 433. §. 451
ihr Ausſchnitt S. 433. §. 451
Kugel, ihr Abſchnitt S. 433 §. 451
ihre Zona, oder Gürtel S. 433. §. 451
Kugel, ihr Durchſchnitt iſt ein Cirkel S. 434. §. 454
Kugel iſt $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder, welcher die Axe der Kugel zum Diameter der Grundfläche, und eben dieſe Axe zur Höhe hat S. 723. §. 798
Kugel, ihr Inhalt iſt einer Pyramide gleich, welche die Kugelfläche zur Grundfläche, und den Radium der Kugel zur Höhe hat S. 726. §. 801
Kugel, ihr Inhalt wie er zu finden S. 727. §. 802
Kugel, ihre Kugelfläche, oder ihr Radius, wie er aus dem Inhalt zu finden S. 727. §. 802
Kugel, ihren Inhalt aus dem Diametro zu finden S. 729. §. 806
Kugel hohle, von ihrer Dikke den körperlichen Inhalt zu finden S. 733. §. 807
Kugel, ihren Diameter aus dem Inhalt zu finden S. 734. §. 808
Kugel, von ihrem Abſchnitt den Inhalt zu finden S. 735. §. 809
Kugel, von ihrem Ausſchnitt den Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Kugel halbe, von ihrem Ausſchnitt den Inhalt zu finden S. 736. §. 810
Kugel zu finden, die etlichemal ſo gros iſt, als eine gegebene S. 740 §. 816
Kugel in einen Cylinder zu verwandeln S. 743 §. 822

Kugel in einen Kegel zu verwandeln Seite 743 §. 823
Kugelfläche S. 433. §. 451
Kugelfläche verhält ſich zum gröſten Cirkel wie 4 zu 1 S. 728. §. 803
Kugelfläche, wie ſie zu finden S. 728. 729 §. 804. 805
Kugeln, alle ſind einander ähnlich S. 434. §. 452
Kugeln verhalten ſich in ihren Inhälten zu einander, wie die Würfel ihrer Diametrorum S. 726 §. 800
Kuxe S. 260. §. 259
damit aus dem Felde gehen S. 260. §. 259

L.

Lachter S. 63. §. 95
Länglichte Raute S. 422 §. 429
Länglichte Raute wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilt, die entgegengeſezten Winkel ſind gleich, und die entgegengeſezten Seiten parallel S. 559. §. 632
Länglichte Raute iſt ein Parallelogrammum S. 560 §. 633
Länglichte Raute aus zwei gegebenen ungleichen Seiten, und einem Winkel zu machen S. 564. §. 637
Länglichte Raute, ihren Inhalt zu finden S. 604 §. 667
Linie S. 408. §. 389
hat weder Breite, noch Dikke S. 408. §. 390
Linie natürliche S. 409. §. 392
phyſiſche S. 409. §. 392
Linie gerade S. 411. §. 399
krumme S. 411 §. 399
vermiſchte S. 411. §. 399
Linie gerade, davon iſt ieder ausgedehnter Teil eine gerade Linie S. 411 §. 399
Linie gerade, nur eine iſt zwiſchen zwei Punkten S. 412. §. 400
Linie ſtehet auf der andern ſenkrecht, lothrecht, oder perpendicular S. 416 §. 414
Linie ſtehet auf der andern ſchief S. 416. §. 414
Linie ſtehet auf einer Ebene perpendicular S. 663 §. 731
Linie ſtehet auf einer Ebene ſchief S. 663. §. 732
Linie donlege S. 421 §. 428
Linie gerade durch zwei Punkten zu ziehen S. 436 §. 459
Linie gerade, damit einen Cirkel zu beſchreiben S. 438 §. 460
Linie, über eine gerade kan ein halber Cirkel beſchrieben werden S. 438. §. 461
Linie gerade, ihr Maas iſt eine Länge S. 439. §. 464

Linie gerade, wie ſie zu meſſen Seite 440. §. 465
Linie, ein Maas S. 440 §. 466
ihr Zeichen S. 441. §. 467
Linie gerade zu meſſen S. 450 452. §. 477. 478
Linie gerade, wenn ſie einer Fläche parallel iſt S. 668 §. 743
Linie gerade, wenn ſie auſerhalb einer Fläche, aber einer Line in ihr parallel iſt, ſo iſt ſie der ganzen ebenen Fläche parallel S. 668 §. 744
Linie gerade, wenn ſie auſerhalb einer ebenen Fläche, aber einer Linie in ihr parallel iſt, ſo iſt ſie allen Parallellinien dieſer Linie parallel S. 669. §. 745
Linie gerade, wenn ſie auf zwei Flächen parallel ſtehet, ſo ſind dieſe Flächen einander parallel S. 670 §. 746
Linie gerade auf eine Ebene, die mit zwei Linien in dieſer Fläche rechte Winkel macht, ſtehet auf dieſer Ebene perpendicular S. 663. §. 733
Linie, die einer Perpendicularlinie auf einer ebenen Fläche parallel iſt, ſtehet auch auf dieſer Fläche perpendicular S. 666 §. 738
Linie gerade in zwei gleiche Teile zu teilen S. 475 476. §. 515. 517
Linie gerade in vier und mehrere gleiche Teile zu teilen S. 475. §. 516
Linie, auf ihre Mitte eine Perpendicularlinie aufzurichten S. 479. 620 §. 523. 679
Linie, in einem in ihr gegebenen Punkt eine Perpendicularlinie aufzurichten S. 478. §. 521.
Linie, wenn ſie zwei Parallellinien durchſchneidet, wie ſich die Winkel verhalten S. 480. §. 525
Linie, wenn ſie zwei durchſchneidet, nud die Wechſelswinkel, oder der äuſere und innere Winkel ſind gleich, oder die innern machen 180 Grad, ſo ſind dieſe Linien parallel S. 481. §. 526
Linie, damit durch einen Punkt eine Parallellinie zu ziehen S. 484. §. 529
Linie, daraus einen gleichſeitigen Triangel zu machen S. 488. §. 530
Linie aus einer, und zwei daran liegenden Winkeln einen Triangel zu machen S. 493 §. 534
Linie gerade, auf ihr Ende eine Perpendicularlinie aufzurichten S. 518. 620 §. 576. 678
Linie gerade in gleiche Teile zu teilen S. 526. 527. 528 528. 530. 531. §. 590 591. 592. 593. 597. 598

Linie kleinere nach der Proportion zu teilen, wornach eine gröſere geteilt iſt Seite 528. §. 594
Linie eine gröſere nach der Proportion zu teilen, wornach eine kleinere geteilt iſt S. 529. §. 595
Linie zu verkleinern, oder verjüngen S. 529. 532 §. 596. 600
Linie zu vergröſern S. 529 532. §. 596. 600
Linien viele können keine Breite ausmachen S. 408 §. 391
Linien, zwei gerade können keinen Raum einſchlieſen S. 418. §. 419
Linien gerade, die ſich dekken, ſind ſich gleich S. 435 §. 456
Linien gerade, die ſich gleich ſind, dekken ſich S. 436 §. 457
Linien gerade zwei, wenn ſie von Parallelflächen geſchnitten werden, ſo werden ſie in proportionirliche Teile geteilt S. 671. §. 750
Linien, wenn ſich zwei in einem Punkt durchſchneiden; So ſind die Verticalwinkel gleich S. 460 §. 492
Linien zwei, die auf einer dritten perpendicular ſtehen, ſind parallel S. 501 §. 544
Linien, aus zwei ungleichen einen gleichſchenkelichten Triangel zu machen S. 489. § 531
Linien aus drei ungleichen einen ungleichſeitigen Triangel zu machen S. 490 §. 532
Linien aus zweien, und einem eingeſchloſſenen Winkel einen Triangel zu machen S. 492. §. 533
Linien, durch zwei gerade Parallellinien gezogen, teilen die erſtere in proportionirliche Teile S. 532 §. 599
Linien, zu zwei die dritte geometriſche Proportionallinie zu finden S. 535 §. 603
Linien, zu drei die vierte geometriſche Proportionallinie zu finden S. 536 §. 604
Linien, zwiſchen zwei die mittlere geometriſche Proportionallinie zu finden S. 537-539. §. 606 608
Logarithmi, dadurch zu multipliciren S. 283. §. 271
Logarithmi, dadurch zu dividiren S. 290. §. 282
Logarithmorum, ihre Eigenſchaften zu unterſuchen S. 403. §. 383
Logarithmum von einer mittleren Zahl zu finden S. 292. 294. 295. §. 287 288. 289
Logarithmum eines Sinus zu finden S. 772. 774 §. 864. 865

Loga-

Logarithmum eines Secant zu finden Seite 775 §. 867
Logarithmum eines Tangent zu finden S. 775. §. 866
Logarithmus S. 280. §. 268
wie er entſteht S. 280. §. 269
Logarithmus, wenn er von Eins Null iſt, ſo iſt der Logarithmus des Products die Summe der Logarithmorum, der in einander multiplicirten Zahlen S. 281. 403 §. 270. 383
Logarithmus des Quadrats iſt zweimal ſo gros, als der Logarithmus der Wurzel, wenn er von Eins Null iſt S. 284 403. §. 273. 383
Logarithmus, daraus kan man erkennen, ob eine Zahl eine Quadratzahl iſt S. 285. §. 274
Logarithmus der Cubikzahl iſt dreimal ſo gros, als der Logarithmus der Wurzel S. 286. 403. §. 277. 383
Logarithmus, daraus kan man erkennen, ob eine Zahl eine Cubikzahl iſt S. 287 §. 278
Logarithmus, wenn er von Eins Null iſt; So iſt der Logarithmus des Quotienten der Unterſcheid zwiſchen den Logarithmis der beiden in einander dividirten Zahlen S. 288. 403. §. 281. 383
Logarithmus des Bruchs, wie man ihn findet S. 290. §. 283
Longimetrie S. 407. §. 387

M.

Maas S. 439. §. 462
Maas und die Teile der ausgedehnten Gröſe müſſen von einer Art ſein S. 439 §. 463
Maas der geraden Linien iſt eine Länge S. 439 §. 464
Maas gemeines S. 441. §. 468
in Decimalmaas zu verwandeln S. 442. §. 469
Maasſtaab S. 439. §. 462
Maasſtaab veriüngter S. 449 §. 475
Maasſtaab, veriüngten zu machen S. 449. §. 476
Maasſtaab veriüngten mit Transverſallinien zu machen S. 533. 534 §. 601. 602
Maasſtaab der Figuren kan ein Quadrat oder Rechtek ſein S. 590. §. 650
Maasſtaab der Figuren, dazu iſt ein Quadrat angenommen S. 590. §. 651
Maasſtaab der Körper, dazu hat man einen Cubum angenommen S. 680 §. 761
Magiſter Matheſeos S. 618 §. 676
Markſcheidekunſt S. 4. §. 3
woher ſie ihren Namen erhalten S. 4. §. 4

Markſcheidekunſt ſezt die Arithmetik und Geometrie zum Grunde Seite 5 §. 5. 6.
Mathematiſcher Kőrper S. 426. §. 438
geradlinigter S. 427. §. 439
krumlinigter S. 427. §. 439
vermiſchtlinigter S. 427 §. 439
Mehr, als Nichts S. 298 §. 295
Merkmale eines Dinges S. 9 §. 12
Meſſen eine ausgedehnte Gröſe S. 439. §. 462
Meßkette S. 446. §. 471
Meßkette zu machen S. 447 §. 473
Meßruthe S. 446. §. 471
Meßruthe, oder Meßſtange zu machen S. 446. §. 472
Meßſchnur S. 446. §. 471
Meßſchnur zu machen S. 448 §. 474
Million S. 32. §. 58
ihr Zeichen S. 39. §. 65
Minute S. 146. 453 §. 165. 480
ihr Zeichen S. 454. §. 481
Mittelpunkt S. 413. §. 405
Mittelpunkt zu einem Cirkel zu finden S. 517. 518 §. 574. 575
Mittlere Glieder der Proportion S. 197. §. 217
Mittlere Proportionalzahl S. 198. §. 219
Mittlere arithmetiſche Proportionalzahl S. 200 §. 222
Mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zwiſchen zwei Zahlen zu finden S. 209. §. 234
Mittlere geometriſche Proportionalzahl S. 200 §. 222
zwiſchen zwei Zahlen zu finden S. 210. §. 235
Mittlere Zahlen S. 291. §. 285
Mononomiſche Wurzel S. 151. §. 169
Multiplicandum S. 49. §. 78
Multiplication S. 49. §. 78
ihr Zeichen S. 49. §. 79
ihre Probe S. 83. §. 103
Multiplication ſezt wieder zuſammen, was die Diviſion aufgelőſt hat S. 105. §. 107
Multiplicationsexempel S. 221. §. 247
Multiplicator S. 49 §. 78
Multipliciren, dabei muß man die Producte zweier Zahlen geſchwind wiſſen S. 75. §. 100
Multipliciren durch die Logarithmen S. 283. §. 271
Multipliciren Gröſen S. 307 §. 305
Brűche S. 319. §. 311

N.

Name der Verhältnis S. 188 §. 202
Nebenglied S. 253. §. 258
Nebenwinkel S. 416. §. 413
Nebenwinkel, die auf einer geraden Linie ſtehen, haben

zuſammen 180 Grad Seite 459. §. 489
Nebenwinkel, wenn einer bekannt iſt, ſo kan man den andern finden S. 460 §. 490
Negative Gröſen S. 297. 298 §. 294. 295
Neigung einer Fläche S. 418 §. 420
Neigungswinkel einer Fläche S. 418. §. 420
Neigungswinkel ſind gleich, wenn zwei Parallelflächen von einer dritten durchſchnitten werden S. 671. §. 749
Nenner S. 111. §. 111
Neper und Brigge, wie ſie die Logarithmen gefunden S. 291. §. 284
Nichts S. 298. §. 295
Nichts, was mehr iſt S. 298 §. 295
Nichts, was weniger iſt S. 298. §. 295
Niedere Geometrie S. 406 §. 385
Nivelliren S. 407. §. 387
Null S. 36. §. 62
Nnmeriren S. 52. §. 82

O.

Oberfläche S. 418. §. 420
Oblongum S. 422. §. 429
Octaedrum S. 432. §. 450
Oefnung des Winkels S. 415 §. 411
Oerter zweier, ihre Weite zu meſſen, wenn man nicht gerade zu ihnen kommen kan S. 494. 539. 541 §. 536. 610. 611
Oerter zweier, ihre Weite zu meſſen, wenn man nur zu einem kommen kan S. 494. 541. 542. §. 536 612. 613
Oerter zweier, Weite zu meſſen, wenn man zu keinem kommen kan S. 496. 543 545. §. 539. 614. 615
Ohmen ein Faß S. 717. §. 792
Ordentliche Figur S. 420 §. 425
Ordentlicher Körper S. 427 §. 441

P.

Parallelfläche S. 418 §. 420
Parallelflächen, dazwiſchen ſind alle Perpendicularlinien einander gleich S. 670. §. 747
Parallelflächen, wenn zwei von einer dritten durchſchnitten werden, ſo ſind die Durchſchnitte einander gleich S. 670. §. 748
Parallelflächen, dabei ſind die Neigungswinkel gleich, wenn ſie von einer dritten Fläche durchſchnitten werden S. 671 §. 749
Parallellinie durch einen Punkt mit einer gegebenen Linie zu ziehen S. 484. §. 529
Parallellinie durch einen Punkt mit einer Linie

zu

zu ziehen, zu der man nicht kommen kan Seite 806. §. 891
Parallellinien S. 414. §. 409
ihr Zeichen S. 415. §. 410
Parallellinien, wenn zwei von einer dritten durchſchnitten werden, wie ſich die Winkel verhalten, die daher entſtehen S. 480. §. 525
Parallellinien, alle zwiſchen zwei Parallellinien ſind gleich S. 483. §. 527
Parallellinien durch zwei gerade Linien gezogen, teilen die leztere in proportionirliche Teile S. 532. §. 599
Parallelogramma, welche einerlei Grundlinie und Höhe haben, ſind ſich gleich S. 588. §. 646
Parallelogramma, zwei die einerlei Höhe haben, verhalten ſich in ihren Inhälten wie ihre Grundlinie S. 622. §. 682
Parallelogramma, zwei die einerlei Grundlinie haben, verhalten ſich wie ihre Höhen S. 624. § 684
Parallelogrammum S. 422 §. 429
Parallelogrammum, ein iedes iſt einem Quadrat, oder einem Rechtek gleich, das mit ihm einerlei Grundlinie und Höhe hat S. 589. §. 647
Parallelogrammum durch einen in einer Seite gegebenen Punkt in zwei gleiche Teile zu teilen S. 625. §. 686
Parallelogrammum in gleiche Teile zu teilen S. 626 §. 687
Parallelogrammum in proportionirliche Teile zu teilen S. 627. §. 689
Parallelogrammum in ein anderes zu verwandeln S. 635. §. 700
Parallelopipedum S. 427 § 442
deſſen Inhalt zu finden S. 693. § 776
Paralleltrapezium S. 422 §. 429
Pars aliquota S. 18. §. 35
aliquanta S. 18. §. 35
Peripherie S. 413 §. 405
Peripherie des Cirkels wird in 360 Grad geteilt S. 453. §. 480
Peripherie zu einem Flächeninhalt zu finden S. 655 §. 724
Peripherie des Cirkels zu finden S. 649. §. 720
einen Teil von ihr zu finden S. 651. §. 721
Perpendiculare Fläche S. 418. §. 420
Perpendicularlinie S. 416 §. 414
macht auf einer andern zwei rechte Winkel S. 417. §. 416
Perpendicularlinie in einem gegebenen Punkt einer

Linie

Linie zu fällen Seite 478
478. §. 521. 522
Perpendicularlinie auf die Mitte einer Linie aufzurichten S. 479. 620 §. 523. 679
Perpendicularlinie durch einen über einer Linie gegebenen Punkt auf dieſe Linie zu fällen S. 479 §. 524
Perpendicularlinie, welche die Sehne in zwei gleiche Teile teilet, teilet auch den Bogen in zwei gleiche Teile, und gehet durch den Mittelpunkt des Cirkels S. 513 §. 569
Perpendicularlinie aus dem Mittelpunkt des Cirkels teilet die Sehne und den Bogen in zwei gleiche Teile S. 514. §. 570
Perpendicularlinie auf das Ende einer geraden Linie aufzurichten S. 518 620. §. 576. 679
Perpendicularlinie aus dem Mittelpunkt des Cirkels auf den Tangenten durchſchneidet ihn in dem Berührungspunkt S. 520. §. 578
Perpendicularlinie auf einer Ebene macht mit allen Linien in dieſer Ebene rechte Winkel S. 663 §. 732
Perpendicularlinie nur eine kan in einen in einer Fläche gegebenen Punkt gezogen werden S. 665 §. 734
Perpendicularlinie nur eine kan aus einem auſerhalb einer ebenen Fläche gegebenen Punkt auf dieſe Fläche gezogen werden S. 665 §. 735
Perpendicularlinie von einem Punkt auf eine ebene Fläche iſt die kürzeſte von den Linien, die von dieſem Punkt auf dieſe Fläche gezogen wird S. 665. §. 736
Perpendicularlinie auf eine ebene Fläche, wenn dadurch eine andere ebene Fläche gelegt wird, ſo ſteht auch dieſe auf jener perpendicular S. 666. §. 737
Perpendicularlinien, alle zwiſchen zwei Parallelflächen ſind einander gleich S. 670. §. 747
Pfeil S. 749. §. 838
Planimetrie S. 407. §. 387
Pole der Kugel S. 433 §. 451
Polygon S. 421. §. 426
Polygonwinkel S. 423 §. 430
Polygonwinkel in einem Vielek zu finden S. 556 §. 629
Polynomiſche Wurzel S. 151 §. 169

Poſitive Gröſe Seite 297. 298 §. 294. 295
Potenz S. 150. §. 167
Potenz zu einer andern Potenz zu erheben S. 324. §. 318
Potenz, daraus die Wurzel zu ziehen S. 325. §. 319
Potenzen, wie ſie in der Algebra ausgedrukt werden S. 321. §. 313
Potenzen zu multipliciren S. 322. §. 315
Potenzen zu dividiren S. 323 323. §. 316. 317
Poteſtät S. 150. §. 167
Praktik die welſche S. 272 §. 261
Praktiſche Geometrie S. 406 §. 386
Prisma S. 427. §. 442
dreiekkigtes S. 427. §. 442
ſechsekkigtes S. 427. §. 442
ſchiefes S. 427. §. 442
ſenkrechtes S. 427. §. 442
rechtwinkelichtes S. 427 §. 442
ſeine Höhe S. 427. §. 442
Prisma, wie es entſtehet S. 429. §. 443
Prisma iſt einem Cylinder gleich, mit dem es einerlei Grundfläche und Höhe hat S. 673. §. 753
Prisma dreiekkigtes, iſt die Hälfte von einem Parallelopipedo, das eine noch einmal ſo groſe Grundfläche, und eben die Höhe hat S. 673. §. 754
Prisma dreiekkigtes, kan in drei gleichgroſe Pyramiden geteilt werden S. 678 §. 758
Prisma dreiekkigtes, deſſen körperlichen Inhalt zu finden S. 696. §. 777
Prisma vielekkigtes, deſſen Inhalt zu finden S. 698 §. 778
Prisma, aus deſſen Inhalt die Grundfläche, oder Höhe zu finden S. 702. §. 780
Prisma etliche mal ſo gros zu machen, als ein gegebenes S. 740. §. 815
Prisma in ein anderes von einer andern Grundfläche zu verwandeln S. 741 §. 817
Prisma in ein anderes Prisma zu verwandeln, wozu die Gröſe der Grundfläche gegeben iſt S. 742 §. 819
Prismata und Cylinder, die einerlei Grundfläche haben, und zwiſchen zwei ebenen Parallelflächen ſtehen, ſind einander gleich S. 672. §. 751
Prismata und Cylinder verhalten ſich wie ihre Höhen, wenn ihre Grundflächen gleich ſind, und wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich ſind S. 703. §. 781
Probe S. 62. §. 94
Probe, ob man recht addirt S. 62. 63. §. 94. 95
Probe, ob man recht ſubtrahirt S. 71. §. 98

Probe, ob man recht multiplicirt Seite 83. §. 103
Probe, ob man recht dividirt S. 104. §. 106
Product S. 49. §. 78
Product, ſeine Factores durch die Logarithmen zu finden S. 233. §. 272
Product, deſſen Logarithmus iſt die Summe der Logarithmorum der in einander multiplicirten Zahlen, wenn der Logarithmus von Eins Null iſt S. 281. §. 270
Producte, aus gleichen läſt ſich eine geometriſche Proportion machen S. 206. §. 231
Progreſſion S. 276. §. 262
arithmetiſche S. 276. §. 262
geometriſche S. 276. §. 262
Progreſſion zunehmende S. 277. §. 263
abnehmende S. 277. §. 263
Progreſſion arithmetiſche, darinnen machen drei Glieder eine ſtetige arithmetiſche Proportion aus S. 277. §. 264
vier Glieder hingegen machen eine unſtetige arithmetiſche Proportion aus S. 278. §. 265
Progreſſion geometriſche, darinnen machen drei Glieder eine ſtetige geometriſche Proportion aus S. 277. §. 264
vier Glieder hingegen machen eine unſtetige geometriſche Proportion aus S. 278. §. 265
Progreſſion arithmetiſche, darinnen die Glieder zu finden S. 278 §. 266
Progreſſion geometriſche, darinnen die Glieder zu finden S. 279. §. 267
Progreſſion arithmetiſche, ihre Eigenſchaften zu unterſuchen S. 401. §. 381
Progreſſion geometriſche, ihre Eigenſchaften zu unterſuchen S. 402. §. 382
Proportio continua, oder ſtetige, oder zuſammenhängende Proportion S. 197 §. 218
diſcreta, oder eine unſtetige Proportion S. 197 §. 218
Proportio arithmetica continua S. 199. §. 221
Proportio geometrica continua S. 199. §. 221
arithmetica diſcreta S. 199 §. 221
geometrica diſcreta S. 199 §. 221
Proportion machen S. 206 §. 231
Proportion S. 197. §. 217
deren erſtes Glied S. 197 §. 217
deren anderes Glied S. 197 §. 217
deren drittes Glied S. 197 §. 217
deren viertes Glied S. 197 §. 217
deren äuſere Glieder S. 197. §. 217

Proportion, deren mittlere Glieder Seite 197. §. 217
deren gleichnamige Glieder S. 197. §. 217
Proportion arithmetiſche S. 198. §. 220
geometriſche S. 198. §. 220
Proportion, ihre Bezeichnung S. 200. §. 223
Proportion, in einer arithmetiſchen iſt die Summe der äuſeren Glieder der Summe der mittleren gleich S. 202. 203. 203 §. 224. 225. 226
Proportion, in einer geometriſchen iſt das Product der äuſeren Glieder dem Product der mittleren Glieder gleich S. 204 205. 206. §. 228. 229. 230
Proportion arithmetiſche, darinnen verhält ſich das erſte zu dem dritten, wie das andere zum vierten Glied S. 206. §. 232
Proportion geometriſche, darinnen verhält ſich das erſte zum dritten Glied, wie das andere zum vierten S. 208. §. 233
Proportion arithmetiſche, darinnen das vierte Glied zu finden S. 211. 212 213. §. 236. 237. 238
Proportion geometriſche, darinnen das vierte Glied zu finden S. 214. 216 216. 536. §. 240. 241 242. 605
Proportion arithmetiſche, darinnen das erſte, andere, und dritte Glied zu finden S. 213. §. 239
Proportion geometriſche, darinnen das erſte, andere, und dritte Glied zu finden S. 216. §. 243
Proportion geometriſche, darinnen die Glieder ſo zu verändern, daß ſie noch proportional bleiben S. 399. §. 380
Proportionallinie, die dritte geometriſche zu zwei Linien zu finden S. 535 §. 603
Proportionallinie, die vierte geometriſche zu drei Linien zu finden S. 536. §. 604
Proportionallinie, die mittlere geometriſche zwiſchen zwei Linien zu finden S. 537. 539. §. 606. 608
Proportionalzahl die mittlere S. 198. §. 219
die vierte S. 198 §. 219
Proportionalzahl mittlere arithmetiſche S. 200 §. 222
Proportionalzahl mittlere geometriſche S. 200 §. 222
Proportionalzahl dritte arithmetiſche S. 200. §. 222
Proportionalzahl vierte arithmetiſche S. 200 §. 222
dieſe zu finden S. 211. 212 213. §. 236. 237. 238
Proportionalzahl dritte geometriſche S. 200 §. 222

Proportionalzahl vierte geometriſche Seite 200. §. 222
dieſe zu finden S. 214. 216 216. §. 240. 441. 242
Punkt S. 409. §. 393
hat keine Länge, Breite und Dikke S. 409. §. 394
Punkt, alle Winkel darum machen 360 Grad S. 460 §. 491
Punkt mathematiſcher S. 410 §. 396
phyſiſcher S. 410. §. 396
wie er entſtehet S. 410 §. 397
muß in der Ausübung ſo fein gemacht werden, wie möglich S. 411. §. 398
Punkt, in einen in einer Fläche kan nur eine Perpendicularlinie gezogen werden S. 665. §. 734
aus einem auſerhalb einer Fläche kan nur eine Perpendicularlinie auf eine Fläche gezogen werden S. 665. §. 735
auſer einem Cirkel, wenn man aus ihm zwei gerade Linien in dieſen Cirkel ziehet, wie ſie ſich verhalten S. 787. 788. 788. §. 876. 877. 878
Punkt, wenn ſich darinnen zwei Linien durchſchneiden, ſo ſind die Verticalwinkel gleich S. 460. §. 492
Punkten, viele an einander können keine Länge ausmachen S. 410. §. 395
Punkten, zwiſchen zweien kan nur eine gerade Linie ſein, und die iſt die kürzeſte Seite 412. §. 400
Punkten alle ſind einander ähnlich S. 412. §. 400
durch zwei eine gerade Linie zu ziehen S. 436. §. 459
durch drei gegebene einen Cirkel zu beſchreiben S. 515. §. 572
Pyramide S. 429. §. 446
dreiekkigte S. 429. §. 446
vierekkigte S. 429. §. 446.
fünfekkigte S. 429. §. 446
abgeſchnittene, oder abgekürzte, oder abgeſtuzte S. 429. §. 446
ſenkrechte S. 429. §. 446
ſchiefe S. 429. §. 446
ihre Höhe S. 429. §. 446
wenn ſie mit einer ebenen Fläche parallel mit der Grundfläche durchſchnitten wird, ſo iſt der Durchſchnitt der Grundfläche ähnlich, Seite 674. §. 755
Pyramide iſt der dritte Teil von einem Prisma, das mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat S. 679. §. 759
ihren Inhalt zu finden S. 704. §. 783
Pyramide einer abgekürzten rechtwinkelichten Inhalt zu finden S. 714. §. 788
einen abgekürzten ſchiefen Inhalt zu finden S. 715. §. 789

Pyramide in eine andere von einer andern Grundfläche, oder einen Kegel zu verwandeln Seite 741. §. 818
in eine andere zu verwandeln, wozu die Grundfläche gegeben iſt S. 742. §. 820
in ein Prisma zu verwandeln S. 743. §. 821
Pyramiden, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, ſind einander gleich S. 676. §. 756
verhalten ſich, wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich ſind, und wie die Grundflächen, wenn die Höhen gleich ſind S. 709. §. 786.
Pythagoras S. 618. §. 676
Pythagoriſche Lehrſaz S. 618. §. 676
Pythagoriſche Rechentiſch S. 76. §. 101

Q.

Quadrant Seite 425. §. 436
iſt das Maas der rechten Winkel S. 461. §. 494
Quadrat S. 150. 422. §. 168 429
vollkommenes S. 153. §. 174
unvollkommenes S. 153 §. 174
unvollkommenes, wie es in Decimalzahlen zu verwandeln S. 155. §. 176
der binomiſchen Wurzel, wie es beſchaffen S. 157. §. 179
Quadrat der polynomiſchen Wurzel, wie es beſchaffen Seite 160. 161. §. 181. 182
deſſen Logarithmus iſt noch einmal ſo gros, als der Logartihmus ſeiner Wurzel S. 284. §. 273
eine Zahl darinn zu erheben durch die Logarithmen S. 285. §. 276
wird von der Diagonallinie in zwei gleiche Teile geteilt, die entgegen geſezten Winkel ſind gleich, und die entgegen geſezten Seiten parallel S. 559. §. 632
iſt ein Parallelogrammum S. 560. §. 633
in einem Cirkel zu beſchreiben S. 569. §. 641
ſeinen Flächeninhalt zu finden S. 592. §. 653
aus einer Seite zu machen S. 560. §. 634
zu machen, das noch einmal ſo gros iſt, als ein gegebenes S. 621. §. 680
in eine Raute, oder länglichte Raute zu verwandeln S. 633. §. 697
in ein Rechtek zu verwandeln S. 635. §. 700
Quadrate, zweier Unterſchied zu finden, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind S. 397. §. 379
verſchiedene zu addiren, oder

oder ein Quadrat zu machen, das etlichen zuſammen genommen, gleich iſt Seite 621. §. 681
Quadratinhalt S. 591. §. 652
den einen in den andern zu verwandeln S. 600. §. 664
eines Rechteks zu finden S. 602. §. 665
einer Raute und länglichten Raute zu finden S. 604. §. 667
eines Triangels zu finden S. 605. §. 668
eines Trapezii zu finden S. 609. §. 671
einer ieden geradlinigten irregulären Figur zu finden S. 611. §. 672
einer Figur zu finden, die Krümmungen hat S. 615 §. 673
eines regulären Vieleks zu finden §. 616. §. 674
eines Cirkels iſt einem Triangel gleich, der die Peripherie zur Grundlinie, und den Radium zur Höhe hat S. 639. §. 707
des Cirkels, wie er zu finden S. 640. 653. §. 708. 723
Quadratiſche Gleichung S. 338. §. 335
Quadratlinie S. 590. §. 651
Quadratmaas zehnſchůhiges, wie es geteilt, und bezeichnet wird S. 593. 593 594. 594. 597. §. 654 655 656. 657. 659
Quadratmaas zehnſchůhiges, was man dabei im Rechnen in Acht zu nehmen S. 595. 597. §. 658. 659
Quadratmaas zwölf- und ſechzehnſchůhiges, wie es geteilt und bezeichnet wird S. 598. 598. §. 660 661
was man dabei im Rechnen in Acht zu nehmen S. 599. §. 662
Quadratmaas zehnſchůhiges in zwölfſchůhiges oder ſechzehnſchůhiges zu verwandeln S. 599. §. 663
Quadratruthe S. 590. §. 651
Quadratſchuh S. 590. §. 651
Quadratſcrupel S. 590. §. 651
Quadratſcrupel zweiter S. 590. §. 651
Quadratur einer Figur S. 591. §. 652
Quadratur des Cirkels S. 591. §. 652
Quadratwurzel S. 150. §. 168
Quadratwurzel ausziehen S. 153. §. 172
Quadratwurzel, ihr Zeichen S. 153. §. 173
Quadratwurzel auszuziehen S. 168. 171. 174. 175 176. 176. 327. 327. 328 332. 538. §. 187. 188 189. 190. 191. 192. 322 323. 324. 327. 607
Quadratwurzel durch den Logarithmum auszuziehen S. 285. §. 275
Quadratzahl aus dem Logarithmum

garithmo zu erkennen Seite 285. §. 274
Quadratzahlen von 1 bis 10 S. 157. §. 178
Quadratzoll S. 590. §. 651
Quadrillion S. 32. §. 58
ihr Zeichen S. 39. §. 65
Quadrinomiſche Wurzel S. 151. §. 169
Quantitates complexae S. 297. §. 294
Quantitates incomplexae S. 297. §. 294
Querſinus S. 749. 750. §. 838 839
Querſinus ähnlicher Bogen verhalten ſich, wie ihre verſchiedene Radii S. 753. §. 845
Quotient S. 51. §. 80
Quotient, deſſen Logarithmus iſt der Unterſchied der beiden in einander dividirten Zahlen, wenn der Logarithmus von Eins Null iſt. S. 288. §. 281
Quotus S. 51. §. 80

R.

Radius S. 413. §. 405
wie er in der Trigonometrie geteilt wird S. 755 §. 847
Radius macht mit dem Tangenten einen rechten Winkel S. 519. §. 577
Radii alle ſind einander gleich S. 413. §. 406
Radii einer Kugel ſind einander gleich S. 434. §. 453
Rationalgröſe S. 153. §. 174
Raute S. 422. §. 429
Raute länglichte S. 422 §. 429
Raute wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilt, die entgegen geſezten Winkel ſind gleich, und die entgegen geſezten Seiten parallel S. 559. §. 632
Raute iſt ein Parallelogrammum S. 560. §. 633
Raute länglichte wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilt, die entgegen geſezten Winkel ſind gleich, und die entgegen geſezten Seiten parallel S. 559. §. 632
Raute länglichte iſt ein Parallelogrammum S. 560 §. 633
Raute aus einer gegebenen Seite, und einem Winkel zu machen S. 563 §. 636
Raute länglichte aus zwei gegebenen ungleichen Seiten, und einem Winkel zu machen S. 564. §. 637
Raute und der länglichten Raute Flächeninhalt zu finden S. 604 §. 667
Raute in ein Quadrat zu verwandeln S. 633. §. 698
Rechenkunſt S. 6. §. 7. 8.
beſchäftiget ſich vorerſt mit den Eigenſchaften, und dann mit der Erfindung der Gröſen S. 8. §. 9

Rechenkunſt, darinnen werden die allgemeinſten Wahrheiten von den Eigenſchaften der Gröſe betrachtet Seite 8. §. 10
Rechenkunſt erſtrekt ſich in der Erfindung der Gröſen auf den Gebrauch der Zeichen, und die Erfindung der Gröſen ſelbſt S. 26. §. 47
Rechentiſch, pytagoriſche S. 76. §. 101
Rechnungsarten, die vier S. 52. §. 82
Rechtek S. 422. §. 429
Rechtek wird durch die Diagonallinie in zwei gleiche Triangel geteilt, die entgegen geſezten Winkel ſind gleich, und die entgegen geſezten Seiten parallel S. 559. §. 632
Rechtek iſt ein Parallelogrammum S. 560. §. 633
Rechtek zu machen aus zwei ungleichen Seiten S. 562 §. 635
Rechtek in einen Triangel zu verwandeln S. 631 §. 693
Rechtek in ein Quadrat zu verwandeln S. 632. §. 695
in ein anderes Rechtek zu verwandeln S. 632 §. 696
Rechtek in eine Raute, oder längliche Raute zu verwandeln S. 633. §. 697
Rechtek, deſſen Quadratinhalt zu finden S. 602. §. 665
Rechtek, darinnen aus dem Flächeninhalt die Länge oder Breite zu finden S. 603. §. 666
Rechter Winkel S. 417 §. 415
Rechter Winkel hat 90 Grad, oder einen Quadranten S. 461. §. 494
Rechtwinkelichte Figur S. 420. §. 424
Rechtwinkelichte Triangel ſind gleich, wenn ein Cathetus, und die Hypothenuſa gleich ſind S. 471 §. 509
Rechtwinkelichter Triangel S. 421. §. 428
Rechtwinkelichter Triangel läſt ſich aus dem einen Catheto, und der Hypothenuſa machen S. 472 §. 510
aus einem Catheto und der Hypothenuſa zu machen S. 493. §. 535
Rechtwinkelichter Triangel, wenn darinnen beide ſpizze Winkel 45 Grad haben S. 504. §. 551
darinnen iſt die Hypothenuſa am gröſten S. 507 §. 558
Rechtwinkelichter Triangel, wenn aus der Spizze eine Perpendicularlinie gefält wird, was geſchiehet S. 539. 539. §. 608 609
Rechtwinkelichter Triangel, darinnen iſt das Quadrat der Hypothenuſa ſo gros,

gros, als das Quadrat der Cathetorum Seite 618 §. 676
Rechtwinkelichter Triangel, darinnen aus den Cathetis die Hypothenuſa zu finden S. 619. §. 677
darinnen aus der Hypothenuſa, und dem einen Catheto den andern Cathetum zu finden S. 620 §. 678
darinnen aus der Hypothenuſa, und einem ſpizzen Winkel die übrigen Seiten zu finden S. 776 §. 868
darinnen aus einem ſpizzen Winkel, und einem Catheto die ihm gegenüber ſtehende Seite zu finden S. 778. §. 869
darinnen aus eben dieſen Dingen die Hypothenuſa zu finden S. 779. §. 870
darinnen aus den Cathetis einen ſpizzen Winkel zu finden S. 780. §. 871
darinnen aus der Hypothenuſa, und einem Catheto die ſpizzen Winkel zu finden S. 782 §. 872
Rechtwinkelichtes Prisma S. 427. §. 442
Rectangulum S. 422 §. 429
Rectimetrie S. 407. §. 387
Reduciren eine Gröſe S. 300 301. §. 301. 302
Reduction der algebraiſchen Aufgabe S. 356. §. 354
Regula alligationis S. 267 §. 260
Regula compoſita S. 253 §. 258
Regula de quinque, oder von Fünfen S. 253. §. 258
Regula detri ſimplici directa S. 250. §. 257
Regula detri ſimplici indirecta oder inverſa S. 250 §. 257
Regula duplex, oder compoſita S. 253. §. 258
Regula mixtionis S. 267 §. 260
Regula Societatis S. 260 §. 259
Regeldetri S. 217. §. 244
deren Anwendung S. 217 218. 221. 223. 226. 228 §. 245. 246. 247. 248 249. 250
Regeldetri in Brüchen S. 234. §. 251
Regeldetri, wenn nur ein Glied ein Bruch iſt S. 235. 247. §. 252. 255
Regeldetri, wenn zwei Glieder aus Brüchen beſtehen S. 237. 247. §. 253. 255
Regeldetri, wenn alle drei Glieder aus Brüchen beſtehen S. 243. 247. §. 254 255
Regeldetri in genanten Zahlen S. 247. §. 256
Regeldetri die verkehrte S. 250. §. 257
Reguläre Figur S. 420 §. 425
wie ſie um eine andere entſtehet S. 638. §. 706

Regulärer Körper Seite 427 §. 441
Reguläres Fünfek S. 423 §. 430
Reguläres Sechsek S. 423 §. 430
Reguläres Sechsek, deſſen Seite iſt dem Radio des Cirkels gleich S. 570 §. 642
Reguläres Vielek S. 423 §. 430
Reguläres Vielek in ein Rechtek zu verwandeln S. 635. §. 701
Reguläres Vielek, darinnen die Summe aller Winkel zu finden S. 557. §. 630
Reguläres Vielek aus einer gegebenen Seite zu zeichnen S. 568. 569. 569 §. 639. 640. 641
Reguläres Vielek in einen Cirkel zu beſchreiben S. 569 §. 641
Reihe S. 276. § 226
Reſt S. 48. §. 76
Rhomboides S. 422. §. 429
Rhombus S. 422. §. 429
Riemenruthe S. 597. §. 659
Riemenſchuh S. 597. § 659
Ring S. 425. §. 436
deſſen Inhalt zu finden S. 661. §. 727
Ruthe S. 440. §. 466
geometriſche S. 440. §. 466
fünfzehnſchühige S. 441 §. 468
ſechzehnſchühige S. 441 §. 468
zwölfſchühige S. 441. §. 468

S.

Sagitta S. 749. §. 838.
Schachtruthe S. 688. §. 770
Schachtſchuh S. 688. §. 770
Scheitel des Winkels S. 415 §. 411
Schenkel des Winkels S. 415 §. 411
Schiefe Fläche S. 418 §. 420
Schiefe Pyramide S. 429 §. 446
Schiefer Cylinder S. 429 §. 444
Schiefer Kegel S 431 §. 447
Schiefer Winkel S. 417 §. 415
Schiefes Prisma S. 427 §. 442
Schiefwinkelichte Figur S. 420. §. 424
Schuh S. 440. §. 466
ſein Zeichen S. 440 §. 467
Schuhe, ihre Verſchiedenheit S. 444. § 470
Schuhe zu verwandeln S. 444. §. 470
Scrupel S 440. §. 466
Scrupel ſein Zeichen S 441 §. 467
zweiter S. 440. §. 466
ſein Zeichen S. 441. §. 467
Secans Complementi S. 750 §. 840
Secans Complementi des ſpizzen Winkels iſt auch der Secans Complementi des ſtumpfen Win-

Winkels, der mit ihm 180° ausmacht Seite 750 §. 841
Secant des Bogens und Winkels S. 748. §. 835
Secant des ſpizzen Winkels iſt zugleich der Secant des ſtumpfen Winkels, der mit ihm 180° ausmacht S. 748. §. 836
Secant, wie er zunimt S. 748. §. 836
Secant, wie er zu finden S. 751. §. 843
Secant künſtlicher S. 755 §. 847
Secant, deſſen Logarithmum zu finden S. 775. §. 867
Secanten ähnlicher Bogen verhalten ſich, wie ihre verſchiedene Radii S. 753. §. 845
Sechsek S. 421. §. 426
Sechsek reguläres, deſſen Seite iſt dem Radio des Cirkels gleich S. 570 §. 642
Sechsekkigtes Prisma S. 427. §. 442
Sechzehnſchühiges Quadratmaas, wie es geteilt und bezeichnet wird S. 598 598. §. 660. 661
was dabey im Rechnen in Acht zu nehmen S. 599. §. 662
in Decimalquadratmaas zu verwandeln S. 599 §. 663
Sechzehnſchühiges Cubicmaas, wie es geteilt wird S. 689. 690 §. 771. 772
was dabey im Rechnen zu beobachten S. 690 §. 773
in Decimalmaas zu verwandeln S. 691 §. 774
Sechzigteilige, oder Sexageſimalbrüche S. 145 §. 163
ihre Beſchaffenheit S. 145. §. 164
können wie ganze Zahlen geſchrieben werden S. 146. §. 165
Sechzigteilige, oder Sexageſimalbrüche zu addiren, zu ſubtrahiren, zu multipliciren, und zu dividiren S. 147. §. 166
Sector S. 425. §. 436
Secunde S. 146. 453 §. 165. 480
ihr Zeichen S. 454. §. 481
Segmentum S. 425. §. 436
Sehne S. 413. §. 407
Sehnen in einem Cirkel ſind gleich, wenn die Bogen gleich ſind S. 510 §. 566
Seigere Fläche S. 418 §. 420
Seigere Linie S. 416. § 414
Seigerteufe S. 416. §. 414
Seite des Cylinders S. 429 §. 444
Seite von einem in einem Cirkel beſchriebenen Vielek

Vielek zu finden, das noch einmal ſo viele Seiten hat Seite 642 §. 711
Seite des Zehneks zu finden S. 756. 759. §. 848 849
Seite des Fünfeks zu finden S. 759. 763. §. 850 851
Seite eines Vieleks, zu finden, das um einen Cirkel beſchrieben iſt S. 643 §. 712
Seite eines Vieleks, daraus den Radium zu finden S. 805. §. 889
Seite eines Vieleks aus dem Radio zu finden S. 806 §. 890
Seite des Kegels S. 431 §. 447
Seiten der Figur S. 420 §. 422
Seitenflächen S. 427 §. 442
Semidiameter S. 413 §. 405
Senkrechte Pyramide S. 429 §. 446
Senkrechter Cylinder S. 429 §. 444
Senkrechter Kegel S. 431 §. 447
Senkrechter Kegel, wie er entſtehet S. 432. §. 448
Senkrechtes Prisma S. 427 §. 442
Sezwaage S. 452. §. 478
Siebenek S. 421. §. 426
Silber von verſchiedenem Gehalt dabei zu finden, wie viel man von iedem nehmen muß, damit ein gewiſſer Gehalt heraus komt S. 385 389. 391. §. 373. 374 376
Silber zu finden, wie viel man Kupfer darunter miſchen muß, um es vor einen gewiſſen Preis geben zu können S. 390 §. 375
Sinu, aus dieſem und dem Coſinu den Sinum des halben Bogens zu finden S. 766. §. 856
aus dieſen Stükken den Sinum des doppelten Bogens zu finden S. 766. §. 857
Sinu aus dem von einer Minute den Sinum etlicher Secunden zu finden S. 768. §. 860
Sinu aus dem von 30°, 15°, 45° und 36° eine Sinustafel zu machen S. 769 §. 861
Sinu aus einem gegebenen Tangenten zu finden S. 771. § 862
Sinu aus einem gegebenen den Secant zu finden S. 772. §. 863
Sinum eines Winkels von 30° zu finden S. 764 §. 852

Sinum eines Winkels von 45° zu finden Seite 764 §. 853
Sinum eines Winkels von 36° zu finden S. 765 §. 854
Sinus des Bogens, und des Winkels S. 746 §. 829
Sinus rectus, naturalis oder primus S. 749 §. 838
Sinus künſtlicher S. 755 §. 874
Sinus eines Bogens iſt die halbe Sehne von ſeinem doppelten Bogen S. 746. §. 803
Sinus eines ſpizzen und ſtumpfen Winkels, die 180° halten, iſt einerlei Sinus S. 746. §. 831
Sinus wird um deſto gröſer, ie näher der Winkel einem rechten Winkel komt S. 747. §. 832
Sinus, der gröſte iſt der Radius S. 747. §. 833
Sinus totus, oder maximus S. 747. §. 833
Sinus partialis S. 747 §. 833
Sinus, alle ſind einander parallel S. 748. §. 834
Sinus und Tangent ſind einander parallel S. 749. §. 837
Sinus complementi S. 749 §. 838
Sinus verſus S. 749. 750 §. 838. 839
wie er zu finden S. 851 §. 842
Sinus ähnlicher Bogen verhalten ſich, wie ihre verſchiedene Radii S. 753. §. 845
Sinus verſus ähnlicher Bogen verhalten ſich, wie ihre verſchiedene Radii S. 753. §. 845
Sinus daraus den Coſinum zu finden S. 765 §. 855
Sinus aus zwei, den Sinum des halben Bogens zu finden S. 767. §. 858
Sinus aus zwei, deren Unterſchied nicht über 45° iſt, den Sinus des Bogens zu finden, der zwiſchen ſie fält S. 768 §. 859
Sinus, deſſen Logarithmum zu finden S. 772 774. §. 864. 865
Söhlige Linie S. 416. § 414
Fläche S. 418. §. 420
Sohle S. 416. §. 414
Solidometrie S. 407. §. 387
Species, die vier S. 52 §. 82
Speculativiſche Geometrie S. 406. §. 386
Spizwinkelichter Triangel S. 421. §. 428
Spizze der Figur S. 424 §. 431

Spizze

Spizze des Winkels Seite 415 §. 411
Spizzer Körper S. 427 §. 440
deſſen Grundfläche aus dem Inhalt zu finden S. 709. §. 785
deſſen Höhe aus dem Inhalt zu finden S. 709 §. 785
Winkel S. 417. §. 415
Winkel und ſtumpfer die 180° machen, haben einerlei Sinus, Tangent, Secant, Coſinus, Cotangent, und Coſecant S. 746. 748. 750. 750 §. 831. 836. 839. 840
Stamgröſe S. 150. §. 167
Stereometrie S. 407. §. 387
Stetige Proportion S. 198 §. 218
Stumpfen und ſpizzen Winkels Sinus, Coſinus, Tangent, Secant, Cotangent, und Coſecant iſt einerlei S. 746 748. 750. 750. §. 831 836. 839. 840
Stumpfer Winkel S. 417 §. 415
Stumpfwinkelichter Triangel S. 421. §. 428
Stumpfwinkelichter Triangel darinnen iſt die Seite am gröſten, ſo dem ſtumpfen Winkel entgegen geſezt iſt S. 507. §. 558
Stunde S. 146. §. 165
Subtenſa S. 413. §. 407
Subtraction Seite 48. §. 76
ihr Zeichen S. 49 §. 77
ihre Probe S. 71. §. 98
löſt auf, was die Addition zuſammen geſezt hat S. 71. §. 98
Subtrahiren Gröſen S. 304. §. 304
Brüche S. 318. §. 310
Summe S. 47. §. 74
aus zwei gleichen läſt ſich eine arithmetiſche Proportion machen S. 204. §. 227
Summirende Gröſen S. 47. §. 74
Surde, oder ſtumme Gröſe S. 153. §. 174

T.

Tangens complementi S. 750. §. 840
Tangens complementi eines ſpizzen Winkels iſt auch der Tangens complementi des ſtumpfen Winkels, der mit ihm 180° ausmacht S. 750. §. 841
Tangent des Bogens und Winkels S. 748. §. 835
des ſpizzen Winkels iſt zugleich der Tangent des ſtumpfen Winkels, der mit ihm 180° ausmacht S. 748. §. 836
und Sinus ſind einander parallel S. 749. §. 837
deſſen Logarithmum zu finden S. 775. §. 866

Tangent, wie er zu finden Seite 751. §. 843
künſtlicher S. 755. §. 847
Tangente S. 413. §. 407
durch einen auſerhalb dem Cirkel gegebenen Punkt zu ziehen S. 521. §. 580
durch einen Punkt in der Peripherie zu ziehen S. 520. §. 579
Tangenten ähnlicher Bogen verhalten ſich wie ihre verſchiedene Radii S. 753 §. 845
Tauſende S. 30. 31. §. 54. 55
ihre Namen S. 30. 31. §. 54. 55
ihre Zeichen S. 38. 64
Tauſendmaltauſend S. 32. 32 §. 57. 58
ihre Namen S. 32. 32. §. 57. 58
Teil genau meſſender S. 18. §. 35
nicht genau meſſender S. 18 §. 35
Teile der Gröſe S. 10. §. 16
gleichnamige einer Figur S. 417. §. 418
Tertie S. 146. 453. §. 165. 480
ihr Zeichen S. 454. §. 481
Tetraedrum S. 432. §. 450
Theoretiſche Geometrie S. 406. §. 386
Trapezium S. 422. §. 429
deſſen Inhalt zu finden S. 609. §. 671
in ein Rechtek zu verwandeln S. 636. §. 702
in einen Triangel zu verwandeln S. 636. §. 702
Trapezoides S. 422. §. 429
Triangel S. 421. §. 426
gleichſeitiger, oder ein Triangulum aequilaterum S. 421. §. 427
gleichſchenkelichter, oder ein Triangulum aequicrurum S. 421. §. 427
ungleichſeitiger, oder ein Triangulum ſcalenum S. 421. §. 427
rechtwinkelichter, Triangulum rectangulum S. 421. §. 428
ſpizwinkelichter, Triangulum acutangulum S. 421 §. 428
ſtumpfwinkelichter, Triangulum obtusangulum S. 421. §. 428
darinnen durchſchneiden ſich zwei Linien in einem Punkt S. 466 §. 502
in iedem ſind zwei Seiten gröſer, als die dritte S. 466. §. 501
läſt ſich aus einer Seite, und zwei daran liegenden Winkeln machen S. 470 §. 506
läſt ſich aus zwei Seiten, und dem von ihnen eingeſchloſſenen Winkel machen S. 468. §. 504
läſt ſich aus drei Seiten machen S. 471. §. 508
läſt ſich aus einer Seite, und zwei Winkeln, wovon einer dieſer Seite entgegen ſtehet, machen S. 473. §. 512

Trian-

Triangel, nur einer kan aus drei Teilen eines Triangels, worinnen wenigſtens eine Seite iſt, gemacht werden Seite 474. §. 513
rechtwinkelichter, läſt ſich aus einem Catheto, und der Hypothenuſa machen S. 472. §. 510
ſind gleich, wenn eine Seite, und zwei Winkel gleich ſind, wovon einer dieſer Seite entgegen ſtehet S. 472. §. 511
ſind gleich, wenn in beiden zwei Seiten, und ein eingeſchloſſener Winkel gleich iſt S. 467. §. 503
ſind gleich, wenn eine Seite und zwei daran liegende Winkel gleich ſind S. 468. §. 505
ſind gleich, wenn alle Seiten gleich ſind S. 470. §. 507
aus zwei Seiten, und einem eingeſchloſſenen Winkel zu machen S. 492 §. 533
aus einer Seite, und zwei daran liegenden Winkeln zu machen S. 493. §. 534
darinnen machen alle drei Winkel 180 Grad S. 500 §. 542
darinnen kan nur ein rechter Winkel ſein S. 501. §. 543
darinnen kan nur ein ſtumpfer Winkel ſein S. 501. §. 545
Triangel, einen gleichſeitigen aus einer Linie zu machen Seite 488. §. 530
einen gleichſchenkelichten aus zwei gegebenen ungleichen Linien zu machen S. 489. §. 530
einen ungleichſeitigen aus drei ungleichen Linien zu machen S. 490. §. 532
einen rechtwinkelichten aus einem Catheto, und der Hypothenuſa zu machen §. 493. §. 335
wenn ſie gleich ſind, ſo ſtehen gleichen Seiten gleiche Winkel entgegen, und umgewendet S. 474. §. 514
wenn man darinnen einen Winkel von 180 Grad abziehet, ſo bleiben die beiden andern Winkel übrig S. 502. §. 546
Triangel, wenn man darinnen zwei von 180 Grad abziehet, ſo bleibt der dritte übrig S. 502. §. 547
Triangel, wenn in zweien zwei Winkel des einen, zweien Winkeln des andern gleich ſind, ſo iſt auch der dritte Winkel in dem einen dem dritten in dem andern gleich S. 502. §. 548
Triangel, wenn man darinnen eine Seite verlängert, ſo iſt der äuſere den innern

innern Winkeln gleich, die ihm gegenüber ſtehen Seite 503. §. 549
Triangel in einem gleichſchenkelichten ſind die Winkel an der Grundlinie gleich, und die Perpendicularlinie aus der Spizze teilet den Winkel an dieſer Spizze, die Grundlinie, und den Triangel in zwei gleiche Teile S. 503. §. 550
Triangel rechtwinkelichter, wenn darinnen beide ſpizze Winkel 45 Grad haben S. 504. §. 551
Triangel gleichſeitiger, darinnen ſind alle Winkel gleich, und ieder hat 60 Grad S. 504. 505. §. 552 553
Triangel, wenn darinnen die Winkel an der Grundlinie gleich ſind, ſo iſt er ein gleichſchenkelichter Triangel, und die Perpendicularlinie aus der Spizze teilet den Winkel an der Spizze, die Grundlinie, und den Triangel in zwei gleiche Teile S. 505. §. 554
Triangel iſt ein gleichſeitiger, wenn in ihm alle Winkel gleich ſind, und ieder 60 Grad hat S. 506. 506 §. 555. 556
Triangel, darinnen ſtehet die gröſte Seite dem gröſten Winkel, und die kleinſte Seite dem kleinſten Winkel entgegen S. 506 §. 557
Triangel rechtwinkelichter, darinnen iſt die Hypothenuſa am gröſten S. 507. §. 558
Triangel ſtumpfwinkelichter, darinnen iſt die Seite am gröſten, ſo dem ſtumpfen Winkel entgegen ſtehet S. 507. §. 558
Triangel kan als eine in einem Cirkel beſchriebene Figur betrachtet werden S. 517. §. 573
Triangel ähnliche S. 523 523. §. 583. 584
Triangel ſind einander ähnlich, wenn zwei gleichnamige Seiten einerlei Verhältnis haben, und die Winkel gleich ſind, die ſie einſchlieſen S. 523 §. 585
Triangel ſind einander ähnlich, wenn zwei gleichnamige Winkel gleich ſind S. 524 §. 586
Triangel ſind einander ähnlich, wenn alle drei Seiten einerlei Verhältnis haben S. 524. §. 587
Triangel ſind einander ähnlich, wenn zwei gleichnamige Seiten einerlei Verhältnis haben, und ein rechter Winkel, der einer Seite gegenüber ſtehet, dem gleichnamigen Winkel in dem andern Triangel

gel gleich iſt Seite 524 §. 588
Triangel, wenn darinnen mit der Grundlinie eine Parallellinie gezogen wird, ſo verhalten ſich die unteren, wie die oberen Teile S. 525. §. 589
Triangel rechtwinkelichter, wenn aus der Spizze des rechten Winkels eine Perpendicularlinie gefält wird, was geſchiehet S. 539. 539. §. 608. 609
Triangel in einem Cirkel zu beſchreiben S. 569. §. 641
Triangel iſt die Hälfte von einem Parallelogrammo, das mit ihm gleiche Grundlinie, und Höhe hat S. 587. §. 645
Triangel, welche einerlei Grundlinie, und Höhe haben, ſind ſich gleich S. 589. §. 648
Triangel, ieder iſt die Hälfte von einem Quadrat, oder einem Rechtek, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat S. 590 §. 649
Triangel ſeinen Inhalt zu finden S. 605. 607 §. 668. 669
Triangel, aus ſeinem Inhalt die Grundlinie, oder Höhe zu finden S. 608 §. 670
Triangel rechtwinkelichter, darinnen iſt das Quadrat der Hypothenuſa ſo gros, als das Quadrat der Cathetorum S. 618 § 676
darinnen aus den Cathetis die Hypothenuſa zu finden S. 619. §. 677
darinnen aus der Hypothenuſa, und einem Catheto den andern Cathetum zu finden S. 620. §. 678
Triangel in einem rechtwinkelichten aus der Hypothenuſa, und einem ſpizzen Winkel die übrigen Seiten zu finden S. 776 §. 868
darinnen aus einem ſpizzen Winkel, und einem Catheto, die ienem Winkel entgegen ſtehende Seite zu finden S. 778. §. 869
darinnen aus eben dieſen Dingen die Hypothenuſa zu finden S. 779. §. 870
darinnen aus den Cathetis einen ſpizzen Winkel zu finden S. 780. §. 871
darinnen aus der Hypothenuſa, und einem Catheto die ſpizzen Winkel zu finden S. 782. §. 872
Triangel, in einem ieden verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus der ihnen entgegen ſtehenden Winkeln S. 783. 784. §. 873 874
Triangel, in einem ieden verhalten ſich zwei Seiten zu ihrer Differenz, wie der Tangent der halben

Summe der Winkel an der Grundlinie zu dem Tangent der halben Differenz dieſer Winkel Seite 784. §. 875
Triangel, die einerlei Höhe haben, verhalten ſich in ihren Inhälten wie ihre Grundlinien S. 623 §. 683
Triangel verhalten ſich in ihren Inhälten wie ihre Höhen, wenn ihre Grundlinien gleich ſind S. 624. §. 685
Triangel in gleiche Teile zu teilen S. 626. §. 688
Triangel in proportionirliche Teile zu teilen S. 627 §. 690
Triangel in ein Rechtek zu verwandeln S. 631. § 693
Triangel in eine länglichte Raute zn verwandeln S. 632. §. 694
Triangel in ein Parallelogrammum zu verwandeln S 633 §. 699
Triangel in ein Quadrat zu verwandeln S. 637 §. 704
Triangel, darinnen läſt ſich trigonometriſch nichts finden, wenn nicht wenigſtens eine Seite gegeben iſt S. 745. §. 827
Triangel in einem aus einer Seite und zwei Winkeln die übrigen Seiten zu finden S. 788. §. 879
Triangel in einem aus zwei Seiten und einem Winkel, der einer von dieſen Seiten entgegen ſtehet, die übrigen Winkel zu finden S. 790. §. 880
Triangel in einem aus zwei Seiten, und einem Winkel, den dieſe Seiten einſchlieſen, die übrigen Winkel zu finden S. 794 §. 881
Triangel in einem aus allen drei Seiten die Winkel zu finden S. 795. §. 882
Triangel rechtwinkelichte ſind gleich, wenn ein Cathetus, und die Hypothenuſa gleich ſind S. 471 §. 509
Trigonometrie ebene S. 405 745. §. 384. 826
ſphäriſche S. 745. §. 826
Trigonometrie, darinnen ſtelt man die Linien durch Winkel vor S. 745 §. 828
Trigonometrie wird auf verſchiedene Fälle in der Geometrie angewendet S. 801. §. 883
Trillion S. 32. § 58
ihr Zeichen S. 39. §. 65
Trinomiſche Wurzel S. 151 §. 169
Triplicirte Verhältnis S. 189 §. 204

U.

Ueberſchuß Seite 48. §. 76
Umfang S. 413. §. 405
Unähnliche Dinge S. 11 §. 19
Unähn-

Unähnliche Gröſen Seite 297 §. 293
Unbekante Gröſen, wie ſie benent werden S. 296 §. 291
Unbekante Gröſe in einer Gleichung zu reduciren, oder ihren Werth zu beſtimmen S. 339. §. 337
Unbekante Gröſe in einer Gleichung durch die Addition zu reduciren S. 340. §. 338
in einer Gleichung durch die Subtraction zu reduciren S. 341. §. 340
in einer Gleichung durch die Multiplication zu reduciren S. 342. §. 342
in einer Gleichung durch die Diviſion zu reduciren S. 344. §. 344
in einer Gleichung durch das Ausziehen der Wurzel zu reduciren S. 346 §. 345
in einer Gleichung durch das Erheben in die Dignitäten zu reduciren S. 349. §. 346
Unbekante Gröſe davor den Werth in einer Gleichung zu ſezzen S. 351 §. 347
Unbeſtimte Aufgabe S. 354 §. 352
Uneigentliche Brüche S. 112 §. 113
deren Beſchaffenheit S. 112 §. 115
Ungebundene Gröſen S. 297 §. 294
Ungenante Zahl S. 34. §. 60
Ungenante Zahlen zu addiren S. 59. §. 93
Ungenante Zahlen von einander zu ſubtrahiren S. 66 §. 97
Ungenante Zahlen mit einander zu multipliciren S. 78. 102
Ungenante Zahlen in einander zu dividiren S. 88 §. 105
Ungleiche Dinge S. 12. §. 21
Ungleiche Gröſen S. 297 §. 293
Ungleiche Verhältnis S. 189 §. 203
Ungleichheit ihr Zeichen S. 17 §. 31
Ungleichſeitige Figur S. 420 422
Ungleichſeitigen Triangel zu machen S. 490. §. 532
Ungleichſeitiger Kegel S. 431 §. 447
Ungleichſeitiger Triangel S. 421. §. 427
Ungleichwinkelichte Figur S. 420. §. 423
Uninomiſche Wurzel S. 151 §. 169
Unordentliche Figur S. 420 §. 425
Unſtetige Proportion S. 197 § 218
Unterſchied S. 48 §. 76
Unterſchied zweier Quadrate zu finden, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind S. 395. §. 377

Unterſchied der Verhältnis Seite 190. §. 205
Unterſchied zweier Würfel zu finden, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind S. 396. §. 378
Unvollkommene Cubikzahl S. 153. §. 174
Unvollkommene Cubikzahl, wie ſie in eine Decimalzahl zu verwandeln S. 156. §. 177
Unvollkommenes Quadrat S. 153. §. 174
Unvollkommenes Quadrat, wie es in eine Decimalzahl zu verwandeln S. 155. §. 176

V.

Vergleichen der Gröſen S. 19 §. 37
Vergröſern eine Linie S. 529 532. §. 596. 600
Verhältnis S. 187. §. 200
ihre Glieder, ihr erſtes und anderes, oder vorhergehendes und folgendes Glied S. 188 §. 201
ihr Namen oder ihr Exponent S. 188. §. 202
ihr Zeichen S. 191. §. 206
Verhältnis arithmetiſche S. 189 §. 204
geometriſche S. 189. §. 204
zuſammengeſezte S. 189 §. 204
duplicirte S. 189. §. 204
triplicirte S. 189 §. 204
Verhältnis geometriſche, darinnen das groſe, oder kleine Glied zu finden S. 193. §. 210
Verhältnis gleiche S. 189 §. 203
ungleiche S. 189. §. 203
der gröſeren Ungleichheit S. 189. §. 203
der kleineren Ungleichheit S. 189. §. 203
Verhältnis in einer arithmetiſchen das groſe, oder kleine Glied zu finden S. 192. §. 208
Verhältnis in einer arithmetiſchen iſt das groſe Glied weniger dem Unterſchied das kleine, und das kleine Glied und der Unterſchied zuſammen genommen das groſe Glied S. 191. §. 207
Verhältnis, in einer geometriſchen iſt das kleine Glied gleich dem groſen Glied dividirt durch den Namen der Verhältnis, und das groſe Glied gleich dem kleinen Glied multiplicirt durch den Namen der Verhältnis S. 193. §. 209
Verhältnis, in einer arithmetiſchen verhalten ſich die Summen wie die Glieder, wenn man zu ihnen gleiches addirt S. 195 §. 213
Verhältnis in einer arithmetiſchen verhalten ſich die Reſte, wie die Glieder, wenn man von ihnen gleiches

gleiches abziehet Seite 195. §. 214
Verhältnis in einer geometriſchen verhalten ſich die Producte, wie die Glieder, wenn man ſie mit gleichem multiplicirt S. 195. §. 215
Verhältnis in einer geometriſchen verhalten ſich die Quotienten, wie die Glieder, wenn man dieſe durch gleiches dividirt S. 196. §. 216
Verhältnis des Diameters zur Peripherie zu finden S. 644. 645. 646. 647 648. 648. §. 713. 714 715. 716. 717. 718
Verhältnis des Radii zu dem Sinus, dem Tangent, Secant, Coſinus, Cotangent, und Coſecant iſt bei einerlei Winkel ſtets eine und eben dieſelbe, wenn nur der Radius, er mag ſo gros ſein, als er will, in ſtets gleiche Teile geteilt wird S. 754 §. 846
hierinnen liegt der Grund warum man den Radium in 10000000 Teile geteilt, und darnach die Sinustafeln verfertigt hat S. 755. §. 847
Verhältniſſe ähnliche oder gleiche S. 194. §. 211
Verhältniſſe zwei, die einer dritten gleich, ſind ſich ſelbſt gleich S. 194. §. 212
Veriüngen eine Linie S. 529 532. §. 596. 600
Veriüngten Maasſtaab zu machen S. 449. §. 476
Veriüngten Maasſtaab mit Transverſallinien zu machen S. 533. 534 §. 601. 602
Veriüngter Maasſtaab S. 449. §. 475
Verkehrte Regeldetri S. 250 §. 257
Vermiſchte Linie S. 411 §. 399
Vermiſchte Zahl S. 113. §. 116 deren Beſchaffenheit S. 113 §. 117
Vermiſchtlinigte Figur S. 419. §. 421
Vermiſchtlinigter Körper S. 426. §. 439
Vermiſchungsregel S. 267 §. 260
Verneinende Gröſen S. 297 §. 294
Verſchiedene Dinge S. 11 §. 18
Verticale Fläche S. 418 §. 420
Verticalwinkel, wenn ſich zwei Linien durchſchneiden, ſind einander gleich S. 460. §. 492
Verticalwinkel, wenn einer bekannt iſt; So weis man auch ſeinen Nebenwinkel S. 461. §. 493
Verwandelung der Figuren S. 625. bis 638. §. 686 bis 706

Verwandlung des Maaſes Seite 442. 444. §. 469 470
Vielek S. 421. §. 426
regulåres S. 423. §. 430
irregulåres . S. 423 §. 430
kan aus einem Punkt innerhalb demſelben in Triangel geteilt werden S. 424. §. 434
Vielek regulåres, darinnen den Poligonwinkel zu finden S. 556 §. 629
darinnen die Summe aller Winkel zu finden S. 557. §. 630
Vielek in einem ieden die Summe aller Winkel zu finden S. 558 §. 631
Vielek regulåres aus einer gegebenen Seite zu zeichnen S. 568. 569. 569 §. 639. 640. 641
Vielek regulåres, in einem Cirkel zu beſchreiben S. 569. §. 641
Vielek, eines regulåren Inhalt zu finden S. 616 §. 674
Vielek regulåres, iſt einem Triangel gleich, der den Umfang des Vieleks zur Grundlinie, und die Höhe der Triangel zur Höhe hat, worinnen es ſich verteilen låſt S. 617. §. 651
Vielek in ein Rechtek zu verwandeln S. 635 §. 701
Vielek in ein Quadrat zu verwandeln S. 637 §. 704
Vielek, deſſen Seite zu finden, wenn es noch einmal ſo viele Seiten hat, als ein anderes, das in einem Cirkel beſchrieben iſt S. 642 §. 711
Vielek, deſſen Seite zu finden, wenn es um einen Cirkel beſchrieben iſt. S. 643. §. 712
Vielek, darinnen aus der Seite den Radium zu finden S. 805 §. 889
Vielek, deſſen Seite zu finden S. 806. §. 890
Vielfache S. 19. §. 36
Vielſeitige Figur S. 421 §. 426
Vier Rechnungsarten S. 52. §. 82
Vier Species S. 52. §. 82
Vierek S. 421. §. 426
Vierekkichte Pyramide S. 429. §. 446
Vierfache S. 19. §. 36
Vierſeitige Figur S. 421 §. 426
Vierte arithmetiſche Proportionalzahl S. 200 §. 222
dieſe zu drei Zahlen zu finden S. 211. 212 213. §. 236. 237. 238
Vierte geometriſche Proportionalzahl S. 200. §. 222

Vierte Glieder der Proportion Seite 197. §. 217
Vierte Proportionalzahl S. 198. §. 219
dieſe zu drei Zahlen zu finden S. 214. 216 216. 536. §. 240. 241 242 605
Viſiren, ein Faß S. 719 721. §. 792. 793
Viſiren ein Faß, das nicht voll iſt S. 721. §. 794
Viſiren einen ieden Körper S. 722. §. 796. 797
Viſirſtaab zu machen, wodurch man finden kan, wie viele Maas in einem ieden hohlen Körper befindlich ſind S. 721. §. 795
Viſirſtaab zu machen, wodurch man finden kan, wie viele Maas von einer flüßigen Materie in einem cylinderiſchen Gefäſe enthalten ſind S. 716. 717. §. 790. 791
Vollkommene Cubikzahl S. 153. §. 174
Vollkommenes Quadrat S. 153. §. 174
Vordere Glieder der Gleichung S. 337. §. 333

W.

Waagrechte Linie S. 416 §. 414
Walze, ſiehe Cylinder
Waſſerwägen S. 407. §. 387
Weite zweier Oerter zu meſſen, zu den man nicht gerade zu kommen kan S. 494. 539. 541. 801 §. 536. 610. 611. 884
Weite zweier Oerter zu meſſen, wenn man nur zu einem kommen kan S. 494. 541. 542. 802 §. 537. 612. 613. 885
Weite zweier Oerter zu meſſen, wenn man zu keinem kommen kan S. 496. 543. 545. 803 §. 539. 614. 615. 886
Welſche Praktik S. 272. §. 261
Weniger als nichts S. 298. §. 295
Winkel S. 415. §. 411
ſeine Oefnung S. 415. §. 411
ſein Scheitel S. 415. §. 411
ſeine Schenkel, oder Crura S. 415. §. 411
ſeine Spizze S. 415. §. 411
wie er benent wird S. 415. §. 412
rechter S. 417. §. 415
ſchiefer S. 417. §. 415
ſpizzer S. 417. §. 415
ſtumpfer S. 417. §. 415
wie er bezeichnet wird S. 417. §. 417
im Vielek S. 423. §. 430
körperlicher, Angulus ſolidus S. 426. §. 437
die Bogen, die zwiſchen ſeinen Schenkeln beſchrieben werden, haben gleich viel Grade S. 454. §. 482
deſſen Gröſe wird durch den Bogen beſtimt, der zwiſchen ſeinen Schenkeln enthalten iſt S. 455. §. 483

Winkel werden durch Grade gemeſſen Seite 456. §. 484
ſind gleich, wenn ſie einerlei Maas haben S. 456. §. 485
haben einerlei Maas, wenn ſie gleich ſind S. 456. §. 485
gleiche, ſind auch ähnliche S. 456. §. 485
ähnliche, ſind auch gleiche S. 456. §. 485
die einander dekken, ſind gleich S. 457. §. 486
die gleich ſind, dekken ſich S. 457. §. 487
zu meſſen S. 457. §. 488
alle um einen Punkt machen 360 Grad S. 460. §. 491
rechter, hat 90 Grad, oder einen Quadranten S. 461. §. 494
alle rechte ſind ſich gleich S. 462. §. 495
ſpizzer, hat weniger als 90 Grad S. 462. §. 496
ſtumpfer, hat mehr als 90 Grad S. 462. §. 496
einem gegebenen gleich zu machen S. 462. §. 497
einen gegebenen in zwei gleiche Teile zu teilen S. 476. 477 §. 518. 520
einen gegebenen in vier und mehrere gleiche Teile zu teilen S. 477. §. 519
auf dem Felde mit einer Kette, oder Schnur an einem andern Ort abzuſtekken S. 484. §. 528
an dem Mittelpunkt des Cirkels iſt zweimal ſo gros, als der Winkel an der Peripherie S. 507. §. 559
an der Pheripherie hat den halben Bogen, worauf er ſtehet, zu ſeinem Maas S. 509. §. 560
an der Peripherie, alle die auf einem Bogen ſtehen, ſind ſich gleich S. 509. §. 561
an der Peripherie auf einem halben Cirkel iſt ein rechter Winkel S. 509. §. 562
Winkel auf einem kleinern Bogen, als ein halber Cirkel, iſt ein ſpizzer Winkel S. 510. §. 564
an der Periphhrie, der auf einem gröſeren Bogen ſtehet, als ein halber Cirkel, iſt ein ſtumpfer Winkel S. 510. §. 565
Winkelhakken zu probiren, ob er richtig iſt S. 509. §. 563
Wirkliche Gröſen S. 297. §. 294
Wirkliches Etwas S. 298. §. 295
Würfel S. 150. 432. §. 168. 450
Würfel, zweier Unterſchied zu finden, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind S. 396 §. 378
Würfel, die einerlei Seiten haben, ſind einander gleich S. 673 §. 753
deſſen Inhalt zu finden S. 681 §. 764
Würfel von dem Diametro der Kugel verhält ſich zur Kugel wie 300 : 157 S. 725. §. 799
Würfel zu finden, der etliche mal ſo gros iſt, als ein gegebener S. 740. §. 814
Wurzel S. 150. §. 167
ihre Bezeichnung S. 326. 327 §. 320. 321
Wurzel, mononomiſche S. 151 §. 169
binomiſche S. 151. §. 169
uninomiſche S. 151. §. 169
polynomiſche S. 151. §. 169
trinomiſche S. 151. §. 169
quadrinomiſche S. 151. §. 169
Wurzel, eine iede polynomiſche kan in eine binomiſche verwandelt werden S. 152. §. 170
Wurzel ausziehen S. 153. §. 172
Wurzel, binomiſche, wie ihr Quadrat beſchaffen S. 157. 160 §. 179. 180
Wurzel, polynomiſche, wie ihr Quadrat beſchaffen S. 160 161. §. 181. 182
Wurzel, binomiſche, wie ihr Cubus beſchaffen S. 162. 165. §. 183. 184

Wurzel,

Wurzel, polynomiſche, wie ihr Cubus beſchaffen Seite 165 166. §. 185. 186
Wurzel aus einer Potenz zu ziehen S. 325. §. 319
Wurzelgröſen S. 332. §. 328
Wurzelgröſen einfacher auszudrükken S. 334. §. 330
Wurzelgröſen zu addiren und zu ſubtrahiren S. 335. §. 331
Wurzelgröſen zu multipliciren, oder zu dividiren S. 336. §. 332

Z.

Zählen S. 28. 28. 29. 30. 31. 31. 32 32. §. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58
Zählen an den fünf Fingern S. 33. §. 59
Zähler S. 111. §. 111
Zahl S. 34. §. 60
genante S. 34. §. 60
ungenante S. 34. §. 60
Zahl, eine iede auszuſprechen S. 40. §. 67
eine iede, wie ſie geſagt wird, geſchwind zu ſchreiben S. 43. §. 68
Zahl, gebrochene S. 113. §. 116
deren Beſchaffenheit S. 113 §. 117
Zahl, vermiſchte S. 113. §. 116
deren Beſchaffenheit S. 113 §. 117
Zahl in eine Decimalzahl zu verwandeln S. 138. §. 157
Zahl zu finden, deren Hälfte, ein Drittel und ein Viertel zuſammen genommen, um Eins gröſer iſt, als die ganze Zahl S. 356. §. 355
Zahl zu finden, wovon ein beſtimter Teil um eine gewiſſe Zahl gröſer iſt, als ein anderer beſtimter kleinerer Teil S. 359 §. 357
Zahl zu finden, die einen gewiſſen Quotienten gibt, wenn man eine gewiſſe Zahl dazu addirt, und die Summe durch eine gewiſſe Zahl dividirt S. 360 §. 358
Zahlen S. 35. §. 61
Zahlen durch die Logarithmen in das Quadrat zu erheben S. 285. §. 276
Zahlen, ihr Geſez zu bezeichnen überhaupt S. 39. §. 66
Zahlen genante zu addiren S. 63 §. 96
Zahlen ungenante zu addiren S. 59. §. 93
Zahlen genante zu ſubtrahiren S. 72. §. 99
Zahlen ungenante von einander zu ſubtrahiren S. 66. §. 97
Zahlen genante zu multipliciren S. 84. §. 104
Zahlen ungenante zu multipliciren S. 78. §. 102
Zahlen genante zu dividiren S. 105. §. 108
Zahlen ungenante zu dividiren S. 88. §. 105
Zahlen durch die Logarithmen zu multipliciren S. 283. §. 271
Zahlen durch die Logarithmen zu dividiren S. 290 §. 282
Zahlen mittlere S. 291. §. 285
davon die Logarithmen zu finden S. 292. 294. 295. §. 287. 288. 289
Zahlen, zwei zu finden, die eine gewiſſe Summe ausmachen, und die eine um eine gewiſſe Zahl gröſer iſt, als die andere S. 358. §. 356
Zahlen aus zweier Summe und ihrer Differenz dieſe Zahlen zu finden S. 371. §. 365
Zahlen aus zweier Product und ihrer Summe dieſe Zahlen zu finden S. 372. §. 366
Zahlen aus zweier Summe und ihrem Quotient dieſe Zahlen zu finden S. 374. §. 367
Zahlen aus zweier Product und ihrer Differenz dieſe Zahlen zu finden S. 376. §. 368
Zahlen aus zweier Differenz und dem Quotienten dieſe Zahlen zu finden S. 377. §. 369

Regiſter.

Zahlen aus zweier Product und ihrem Quotienten dieſe Zahlen zu finden Seite379. §.370
Zahlen aus zweier Summe und der Differenz ihrer Quadrate dieſe Zahlen zu finden S. 381. §.371
Zahlen aus zweier Differenz und der Summe ihrer Quadrate die Zahlen zu finden S. 383 §.372
Zehnek reguläres, deſſen Seite zu finden S.756.759. §. 848 849
Zehner S. 28. 29. §. 52.53
ihre Namen S.29. §. 53
ihre Zeichen S.36. §. 62
Zehntauſende S.31. 31. §.55.56
ihre Namen S. 31. §.56
Zehnteiliche Brüche S. 110.135 §.109.154
ihre Beſchaffenheit S. 136 §. 155
Zeichen S. 27. §. 49
einfaches S. 27. §. 50
zuſammengeſeztes S. 27. §. 50
Zeichen der Aehnlichkeit S. 12 §. 20
der Gleichheit S. 12. § 22
der Congruenz S. 13. §. 24
der Ungleichheit S. 17. §. 33
des Gröſeren S. 17. §. 33
des Kleineren S. 17. §. 33
Zeichen der Addition S.47. §. 75
Zeichen der Einheiten oder Einer S.35. §.61
ſind auch Zeichen der übrigen Zahlen S.36. §. 62
Zeichen von den Hunderten S. 36.37. §.62.63
Zeichen der Verhältnis S.191 §.206
Zeichen des Winkels S. 417 §.417
Ziffern S.35. §.61
Zoll S.440. §.466
ſein Zeichen S.441. §.467
Zona S.433. §. 451
Zu drei gegebenen Zahlen die vierte arithmetiſche Proportionalzahl zu finden S. 211 212. 213. §. 236. 237. 238
Zuſammengeſezte Gröſen S.296 §. 292
Zuſammengeſezte Verhältnis S.189. §. 204
Zuſammenhangende Proportion S. 197. §. 218
Zuſammenlaufende Flächen S. 418. §. 420
Zuſammenlaufende Linien S. 414 §.409
Zwei Gröſen ſo zu verändern, daß ſie ihre erſte Verhältnis behalten S.397. §.379
Zweifache S. 19. §. 36
Zweiter Quadratſcrupel S. 590 §.651
Zweiter Scrupel S.440. §.466
ſein Zeichen S.441. §.467
Zwiſchen zwei gegebenen Zahlen die mittlere arithmetiſche Proportionalzahl zu finden S. 209. §. 234
Zwiſchen zwei Zahlen die mittlere geometriſche Proportionalzahl zu finden S. 210 §. 235
Zwölfſchühiges Cubikmaas in Decimalmaas zu verwandeln S. 691. §.774
wie es geteilt wird S.689 690. §.771.772
was dabei im Rechnen in Acht zu nehmen S.690. §.773
Zwölfteiliges Quadratmaas, wie es geteilt und bezeichnet wird S.598.598. §. 660. 661
was dabei im Rechnen in Acht zu nehmen S.599. §.662
in Decimalquadratmaas zu verwandeln S. 599. §.663

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Cancrin, Franz Ludwig <<von>>,

Franz Ludwig Cancrinus Hochfürstl. Hessen Hanauischen Cammerassessors und ö
ffentl. Lehrers der Mathematik wie auch ordentl. Mitglieds der Fürstl.
Hessischen Akademie der Wissenschaften zu Giessen erste Gründe der Berg
und Salzwerkskunde
Bd.: 6,1

Frankfurt am Main 1775

BHS I B 33-6,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10705528-7
VD18 90056965